1 Anmerkung zu Aufgabe 4

Ob Abbildung $\Phi : \ker\phi \rtimes H \to G, (n,h) \mapsto n \cdot \sigma(h)$ ein Homomorphismus ist, ist erst dann eine sinnvolle Frage, wenn man eine Multiplikation auf $\ker\phi \rtimes H$ definiert hat. Die Multiplikation in einem semidirekten Produkt ist mit Hilfe eines Homomorphismus $\psi : H \to \mathrm{Aut}(\ker\phi)$ definiert.
Unter der Annahme, dass die Abbildung Ψ ein Homomorphismus ist, kann man auch herausfinden, wie ψ definiert sein muss.
Für $n, m \in \ker\phi$ und $h, k \in H$ gilt nach Definition von Φ

$$\Phi((n,h)(m,k)) = \Phi(n\psi(h)(m), hk) = n\psi(h)(m) \cdot \sigma(hk)$$

und

$$\Phi(n,h)\Phi(m,k) = n\sigma(h)m\sigma(k).$$

Soll also Φ ein Gruppenhomomorphismus sein, so muss gelten

$$n\psi(h)(m) \cdot \sigma(hk) = n\sigma(h)m\sigma(k)$$

Multipliziert man die Gleichung von links mit n^{-1} und von rechts mit $\sigma(hk)$ so erhält man

$$\psi(h)(m) = \sigma(h)m\sigma(h)^{-1}.$$

In der Lösung weiter unten haben wir zur besseren Lesbarkeit des Beweises auf die Herleitung von ψ verzichtet und es nur angegeben und gezeigt, dass es die gewünschten Eigenschaften hat.

2 Lösungen

2.1 Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe von Primzahlordnung p, die auf der endlichen Menge X wirkt. Sei $Y \subset X$ ein Vetretersystem der Bahnen, d.h.

- es gilt $X = \bigcup_{y \in Y} Gy$,
- ist für $y, y' \in Y$ die Gleichung $Gy = Gy'$ erfüllt, so folgt $y = y'$.

Dann gilt offenbar $X^G \subset Y$ und somit haben wir

$$|X| = \sum_{y \in Y} |Gy| = \left|X^G\right| + \sum_{y \in (Y \setminus X^G)} |Gy|$$

hieraus folgt

$$|X| - \left|X^G\right| = \sum_{y \in (Y \setminus X^G)} |Gy| \qquad (*)$$

Nach der Bahnformel gilt: $|Gy| = |G| / |G_y|$, also ist $|Gy| = 1$ oder $|Gy| = p$. Ersteres gilt genau dann, wenn y ein Fixpunkt ist, also gilt für $y \in (Y \setminus X^G)$ die Gleichheit $|Gy| = p$, womit p die rechte Seite in (*) teilt. Damit gilt

$$\left|X^G\right| \equiv |X| \mod p$$

2.2 Aufgabe 2

Definiere $\phi : G \to \mathbb{Z}^3$ durch

$$(a,b,c) \mapsto \left(a, b, \frac{a+b+c}{3}\right)$$

Die Abbildung ϕ ist offenbar wohldefiniert, denn 3 teilt $a+b+c$, also ist $\frac{a+b+c}{3} \in \mathbb{Z}$. Die Abbildung $\psi : \mathbb{Z}^3 \to G$ definiert durch

$$(d,e,f) \mapsto (d,e,3f-(d+e))$$

ist wohldefiniert (denn $d+e+(3f-(d+e)) = 3f$ ist durch 3 teilbar) und invers zu ϕ. Man rechnet nachψ ist rechtsinvers

$$\phi\psi(d,e,f) = \phi(d,e,3f-(d+e)) = (d,e,\frac{3f}{3}) = (d,e,f)$$

und ψ ist linksinvers

$$\psi\phi(a,b,c) = \psi\left(a,b,\frac{a+b+c}{3}\right) = (a,b,(a+b+c)-(a+b)) = (a,b,c)$$

Dass ϕ ein Homomorphismus ist, folgt aus der Kommutativität und Assoziativität in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\phi(a,b,c) &= \left(a,b,\frac{a+b+c}{3}\right) + \left(a',b',\frac{a'+b'+c'}{3}\right) \\
&= \left(a+a', b+b', \frac{a+b+c}{3} + \frac{a'+b'+c'}{3}\right) \\
&= \left(a+a', b+b', \frac{(a+a')+(b+b')+(c+c')}{3}\right) \\
&= \phi(a+a', b+b', c+c') = \phi((a,b,c)+(a',b',c'))
\end{aligned}$$

2.3 Aufgabe 3

Sei $\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$ ein Gruppenhomomorphismus. ϕ ist eindeutig bestimmt durch

$$c_i = \frac{a_i}{b_i} := \phi(e_i) \text{ mit } e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \text{ 1 an der } i\text{-ten Stelle}$$

Seien nun q_{ij} die Primteiler von b_i, also $b_i = \prod_j q_{ij}$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, existiert eine Primzahl P, die von allen q_{ij} verschieden ist. Wir zeigen, dann $\frac{1}{P}$ nicht im Bild von ϕ liegt, damit wäre ϕ nicht surjektiv und somit kein Isomorphismus:
Angenommen dies wäre doch der Fall, dann gäbe es $n_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} n_i c_i$$

Nach Mulitplikation der Gleichung mit $P \cdot \prod_{i=1}^n b_i$ erhält man

$$\prod_{i=1}^n b_i = P \sum_{i=1}^n n_i a_i$$

Nun teilt P die rechte Seite, aber nicht die linke, da keiner der Primfaktoren auf der linken Seite P ist. Ein Widerspruch.

2.4 Aufgabe 4

Sei $\phi : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus und $\sigma : H \to G$ ein rechtsinverser Homomorphismus zu ϕ, also $\phi\sigma = \mathrm{id}_H$. Wir wollen zeigen, dass $G \cong \ker\phi \rtimes H$ gilt.
Setze $N := \ker\phi$. Mit hilfe von σ defnieren wir einen Homomorphismus $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ durch

$$h \mapsto (n \mapsto \sigma(h)n\sigma(h)^{-1})$$

(Dass dies ein Homomorphismus ist, folgt aus der Homomorphismuseigenschaft von σ

$$\psi(hk)(n) = \sigma(hk)n\sigma(hk)^{-1} = \sigma(h)\sigma(k)n\sigma(k)^{-1}\sigma(h)^{-1} = (\psi(h) \circ \psi(k))(n),$$

also gilt $\psi(hk) = \phi(h) \circ \psi(k)$. Für jedes $h \in H$ ist $\psi(h)$ ist offenbar bijektiv mit Inversem $\psi(h^{-1})$.)
Dass $\psi(h) \in \mathrm{Aut}(N)$ ist, folgt aus der Normalität von $N = \ker\phi$ (Kerne sind normal):

$$\forall n \in N : \quad \psi(h)n = \sigma(h)n\sigma(h)^{-1} \in N.$$

Wir zeigen nun, dass $\Phi : N \rtimes H \to G, (n,h) \mapsto n\sigma(h)$ ein Isomorphismus ist:
Homomorphie: Seien $n, m \in N$ und $h, k \in H$, dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi((n,h)(m,k)) &= \Phi(n\psi(h)(m), hk) = n\psi(h)(m)\sigma(hk)\\ &= n\sigma(h)m\sigma(h)^{-1}\sigma(h)\sigma(k)\\ &= n\sigma(h)m\sigma(k) = \Phi(n,h)\Phi(m,k)\end{aligned}$$

Injektivität: Sei (n,h) im Kern von Φ, also

$$n\sigma(h) = \Phi(n,h) = 1 \in G \qquad (*)$$

Dann gilt

$$1 = \phi(1) = \phi(n\sigma(h)) = \underbrace{\phi(n)}_{=1}(\underbrace{\phi\sigma}_{\mathrm{id}_H})(h) = h.$$

Da σ ein Homomorphismus ist, gitl also $\sigma(h) = 1$. Setzt man dies in (*) ein so erhält man ebenfalls $n = 1$, also ist Φ injektiv.

Surjektivität: Sei $g \in G$, dann ist $n := g(\sigma\phi)(g)^{-1} \in \ker\phi$, denn

$$\phi(n) = \phi(g)(\underbrace{\phi\sigma}_{=\mathrm{id}_H}\phi)(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = 1$$

und es gilt

$$\Phi(n, \phi(g)) = n \cdot (\sigma\phi(g)) = g \cdot (\sigma\phi(g)^{-1}) \cdot (\sigma\phi(g)) = g,$$

also ist Φ surjektiv.