1 Beweisführung

- Man kann Aufgabe 1 auch mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen lösen. Allerdings ist dann die Verwendung der entsprechenden Formel zu motivieren.

- Die Menge P der Summenpartitionen ist in keiner natürlichen Weise mit einer Gruppen-/Monoidstruktur versehen, folglich ist das in der Aufgabe definierte f auch nicht sinnvoll als Gruppenhomomorphismus interpretierbar. Somit ist $\ker(f)$ ein undefiniertes Objekt, denn was sollte das neutrale Element in P sein?

- In Aufgabe 3 war gefragt, ob folgendes gilt:
  Sei $h : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus und H abelsch. Ist dann auch G abelsch?
  Die Antwort ist Nein, wie die meisten richtig erkannt haben. Allerdings möchte man dann die folgende Aussage beweisen: Sei $h : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus, dann gilt:

  $$H \text{ abelsch} \not\Longrightarrow G \text{ abelsch}$$

  Viele haben dazu (sinngemäß) den folgenden Ansatz gemacht:
  Seien $a, b \in G$, dann gilt:

  $$h(ab) = h(ba)$$

  weil H abelsch ist. Da h aber nicht notwendigerweise injektiv ist, folgt nicht $ab = ba$.

  Diese Argumentation zeigt aber nicht die zu beweisende Aussage. Sie suggeriert zudem, dass G nicht abelsch ist, wenn h nicht injektiv ist. Dies ist allerdings falsch, wie man an der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sieht.

  Um die Aussage zu zeigen **muss** ein Gegenbeispiel angegeben werden. D.h ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von einer nicht abelschen gruppe G in eine abelsche Gruppe H.

2 Zur symmetrischen Gruppe

- Die folgende Aussage ist **nicht** richtig:
  Das Produkt von n Transpositionen hat Ordnung 3.
  In S_4 ist zum Beispiel $(1\,2)(3\,4)$ ein Element der Ordnung 2.

- Ebenso **falsch** ist die Aussage:
  Jedes Element in S_n hat höchstens Ordnung n.
  In S_5 zum Beispiel hat $(1\,2\,3)(4\,5)$ die Ordnung 6.

- Die Zerlegung einer Permutation $\sigma \in S_n$ in disjunkte Zykel liefert zwei Partionen:

  1. Eine (Mengen-)Partition der Menge $\{1, 2 \ldots, n\}$ in die Träger der Zykel.
  2. Eine (Summen-)Partition der Zahl n. Diese beiden Arten von Partitionen sollten sorgfältig unterschieden werden.

3 Lösungen

3.1 Aufgabe 1

Wir setzen $G = S_5$ und für $x = (x_1, \ldots, x_5)$ definieren wir

$$n_x = |\{x_i \mid i = 1, \ldots, 5\}|\,.$$

Mit $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ bezeichnen wir den Sabilisator von x. Wir wissen außerdem

$$|G.x| = |G/G_x| = [G : G_x] \qquad (*)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle

$n_x = 1$ In diesem Fall sind alle Koordinaten gleich und es gilt offensichtlich $G_x = G$, also nach (*) $|G.x| = 1$.

$n_x = 2$ Es gibt zwei Fälle zu unterschieden

1. Der Punkt x hat vier gleiche Koordinaten und eine von diesen verschiedene fünfte. Sei also oBdA $x_i = x_1$ für $i = 2, 3, 4$ und $x_5 \neq x_1$. Dann ist $G_x = \{g \in G \mid g(5) = 5\}$. Diese Gruppe ist offensichtlich isomorph zu S_4, also gilt $|G_x = 24|$ und nach(*) $|G.x| = 120/24 = 5$.
2. OBdA seien die ersten drei und die letzten zwei Koordinaten von x gleich. Damit enthält G_x die Untergruppen

$$G_1 = \{g \in G \mid g(i) = i \text{ für } i = 4, 5\}$$

und

$$G_2 = \{g \in G \mid g(i) = i \text{ für } i = 1, 2, 3\}\,.$$

Offensichtlich ist jedes Element von G_x ein Produnkt von Elementen aus G_1 und G_2 und der Schnitt der beiden Untergruppen ist trivial. Da die Elemente aus G_1 und G_2 disjunkte Träger haben, gilt $gh = hg$ für $g \in G_1$ und $h \in G_2$, womit beide Untergruppen normal in G_x sind (Bemerkung: Sie sind nicht normal in G). Es folgt also $G_x = G_1 \times G_2$. Da G_1 zu S_3 isomorph ist und G_2 zu S_2, gilt: $|G_x| = 6 \cdot 2 = 12$, also nach (*) $|G.x| = 120/12 = 10$.

$n_x = 3$ Wir unterscheiden zwei Fälle

1. OBdA seien die ersten drei Koordinaten von x gleich und die letzten beiden verschieden von einander und verschieden von den ersten. Dann ist $G_x = \{g \in G \mid g(i) = i \text{ für } i = 4, 5\}$. Diese Gruppe ist offenbar isomorph zu S_3 und somit gilt nach (*) $|G.x| = 120/6 = 20$.
2. OBdA seien die ersten beiden und die zweiten beiden Koordinaten von x jeweils gleich. In diesem Fall enthält G_x die beiden Untergruppen

$$G_3 = \{g \in G \mid g(i) = i \text{ für } i = 3, 4, 5\}$$

und

$$G_4 = \{g \in G \mid g(i) = i \text{ für } i = 1, 2, 5\}.$$

Wie oben sieht man, dass $G_x = G_3 \times G_4$ gilt, und da G_3 und G_4 offenbar zu S_2 isomorph sind, ist $|G_x| = 2 \cdot 2 = 4$ und somit erhalten wir mit (*) $|G.x| = 120/4 = 30$.

$n_x = 4$ Seien oBdA die ersten zwei Koordinaten gleich. Dann ist

$$G_x = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\},$$

also $|G.x| = 120/2 = 60$.

$n_x = 5$ In diesem Fall bleibt x nur unter $\mathrm{id} \in S_5$ fix, also ist $|G.x| = 120/1 = 120$.

Die möglichen Bahnlängen sind also $1, 5, 10, 20, 30, 60$ und 120.

3.2 Aufgabe 2

Sei P die Menge der Summen-Partionen von n. Ist $\sigma \in S_n$, so gibt es eine (bis auf Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Zerlegung von σ in disjunkte Zykel, d.h. es gibt $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ mit $\sum n_i = n$, $\mathrm{ord}(\sigma_i) = n_i$ und die σ_i haben paarweise disjunkte Träger, so dass $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_d$ gilt.
Wir definieren $f : S_n \to P$ durch $\sigma \mapsto (n_1, \ldots, n_d)$.
Diese Abbildung ist surjektiv, denn für gegebene n_i mit $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ ist

$$(1\ 2\ 3 \ldots n_1)(n_1 + 1\ n_1 + 2\ \ldots\ n_1 + n_2) \cdots (1 + \sum_{i=1}^{r-1} n_i\ \ldots\ n)$$

ein Urbild unter f.
Wir betrachten die folgende Operation

$$\begin{aligned}\kappa : S_n &\to \mathrm{Hom}(S_n, S_n)\\ \pi &\mapsto (\sigma \mapsto \pi\sigma\pi^{-1})\end{aligned}$$

Sei $[\sigma]$ die Bahn von σ. Wir definieren $g : S_n/_\sim \to P$ durch $g([\sigma]) = f(\sigma)$. Die Abbildung g ist surjektiv, weil f surjektiv ist. Wir zeigen nun noch, dass g injektiv und wohldefiniert ist.
Seien $\pi \in S_n$ und $\rho := (i_1\, i_2 \dots i_k) \in S_n$ ein k-Zykel, dann gilt:

$$\kappa(\pi)(\rho) = (\pi(i_1)\, \pi(i_2) \dots \pi(i_k)) \qquad (*)$$

(Um diese Identität einzusehen, muss man sich klar machen, dass $\kappa(\pi)(\rho)$ die Permutation ist, die $\pi(i_j)$ auf $\pi(i_{j+1})$ $(j = 1, \dots k-1)$ und $\pi(i_k)$ auf $\pi(i_1)$ abbildet. Dies sieht man sofort durch Hinschreiben: (hier sei nur der Fall $j = k$ hingeschrieben)

$$\begin{aligned}(\kappa(\pi)(\rho))(\pi(i_k)) &= (\pi \circ\ \rho \circ \pi^{-1})(\pi(i_k))\\ &= (\pi \circ\ \rho)(i_k) = \pi(i_1)\end{aligned}$$

Dies zeigt insbesondere, dass k-Zykel durch Konjugation auf k-Zykel abgebildet werden.
Ist $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_\ell$ die (bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmte) Zerlegung in disjunkte Zykel, so ist mit $\tau_i := \pi\sigma_i\pi^{-1}$ die Zerlegung von $\pi\sigma\pi^{-1}$ gegeben durch

$$\pi\sigma\pi^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_\ell$$

Das heißt: Sind zwei Permutationen in S_n konjugiert, so liefern sie die gleiche Summenpartion von n, also ist g wohldefiniert.
Seien nun σ und τ zwei Permutationen, so dass für ihre Zerlegungen

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_\ell$$

bzw.

$$\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_\ell$$

in disjunkte Zykel gilt: $\mathrm{ord}(\sigma_i) = \mathrm{ord}(\tau_i) := n_i$ für $i = 1, 2, \dots, \ell$.
Wir wollen zeigen, dass σ und τ zueinander konjugiert sind. Definiere dazu die Abbildung $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ wie folgt:
Sei $x \in \operatorname{supp}\sigma_i$. Es ist $\sigma_i = (x_1\, x_2\, \dots\, x_{n_i})$ und $\tau_i = (y_1\, y_2\, \dots\, y_{n_i})$. Wir definieren nun $\pi(x_j) := y_j$ für $j = 1, \dots, n_i$. Mit (*) sieht man, dass $\pi\sigma\pi^{-1} = \tau$ gilt. Das heißt: Definieren σ und τ die gleiche Partition von n, so sind sie konjugiert. Folglich ist g injektiv.

3.3 Aufgabe 3

Ist $\phi : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus und G abelsch, so ist auch H abelsch:
Seien $a, b \in H$, dann gibt es $g, h \in G$, so dass $a = \phi(g)$ und $b = \phi(h)$. Damit gilt

$$ab = \phi(g)\phi(h) = \phi(gh) = \phi(hg) = \phi(h)\phi(g) = ba$$

Ist H abelsch, so folgt nicht, dass G abelsch ist. Sei zum Beispiel G eine nicht abelsche Gruppe und $H = \{1\}$ die triviale Gruppe. Dann ist der triviale Homomorphismus, der alles auf 1 abbildet surjektiv.

3.4 Aufgabe 4

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $M := \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid g(v) = w\}$ und $G := GL(2, \mathbb{R}^2)_v := \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid g(v) = v\}$ die Standgrupppe von v. Wir behaupten, dass $M = gG$ mit $g \in M$ (dieses g wählen wir für den Rest der Aufgabe fest):

- G ist Standgruppe, also insbesondere $GL(2, \mathbb{R})$-Untergruppe (denn offensichtlich ist die Einheitsmatrix in G enthalten, also G nicht leer, und für $h, k \in G$ gilt $(hk)v = h(kv) = hv = v$ und $h^{-1}v = h^{-1}(hv) = (h^{-1}h)v = v$).
- Sei $h \in G$, dann gilt $(gh)v = g(hv) = gv = w$, also ist $gG \subset M$.
- Sei $g' \in M$, dann gilt für $h := g^{-1}g'$

  $$hv = g^{-1}g'v = g^{-1}w = v$$

  Also $h \in G$, womit $g' = gh \in gG$, also $M \subset gG$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $(gh)v = w$, dann gilt

$$hv = g^{-1}w = v$$

folglich ist $h \in G$.