Algebra I
Sommer 2010

Prof. Dr. B. Siebert
Dr. Michael Carl

# Lösungen Blatt 12

**Aufgabe 1.**

a) Ist $\varphi \in \mathrm{Aut}(L/K)$, so ist $f(\alpha) = 0$ genau dann, wenn $f(\varphi(\alpha)) = \varphi(f(\alpha)) = 0$, also $\varphi(Z_f) = Z_f$, d.h. die Einschränkung definiert in der Tat einen Homomorphismus $\mathrm{Aut}(L/K) \to S_{|Z_f|}$. Dieser ist injektiv, denn $Z_f$ erzeugt $L$ über $K$, also ist $\varphi$ durch $\varphi|_{Z_f}$ eindeutig bestimmt, d.h. $\varphi \mapsto \varphi|_{Z_f}$ hat ein Rechtsinverses $\varphi|_{Z_f} \mapsto \{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto g(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n))\}$ für $g \in K[\mathbb{N}^n]$, $\alpha_i \in Z_f$.

b) Ist $f$ irreduzibel über $K$ und $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, so setzen sich die Isomorphismen $K(\alpha) \cong K(\beta)$ fort zu Elementen in $\mathrm{Aut}(L/K)$, da $L/K$ normal ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** Zunächst zeigen wir, dass ein irreduzibles $f \in \mathbb{Q}[X]$ keine mehrfache Nullstellen über $\mathbb{C}$ hat. Wäre $\alpha$ solch eine Nullstelle, so teilt $(X - \alpha)$ sowohl $f$ als auch $f'$ (Charakteristik 0!), also teilt $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ sowohl $f$ als auch $f'$, $f'$ hat aber kleineren Grad, im Widerspruch zu $f = c{\cdot}\mathrm{Irr}(\alpha, K)$, $c \in \mathbb{Q}^\times$.
Somit ist $L/K$ Galoissch, also folgt

$$|\,\mathrm{Aut}(L/K)| = [L : K] \in p\mathbb{Z},$$

denn $p$ ist wegen der Multiplizität des Grades ein Teiler von $[L : K]$ (vgl. Blatt 10, Aufgabe 1). Folglich entält $\mathrm{Aut}(L/K) \subset S_p$ eine $p$-Sylow, d.h. einen $p$-Zykel in $S_p$. $\mathrm{Aut}(L/K)$ enthält aber auch einen 2-Zykel, nämlich die komplexe Konjugation auf $Z_f$, und beide zusammen erzeugen $S_p$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.**

a) $X^5 - 2$ ist irreduzibel nach Eisenstein, also gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$.

b) Die Gruppe der 5-ten Einheitswurzeln $G_5 := \{\eta \in \mathbb{C} | \eta^5 = 1\}$ wirkt transitiv auf $Z_f$ durch $\eta.\alpha := \eta\alpha$. Z.B. ist $\sqrt[5]{2} \in Z_f$, also sind $\frac{1}{\sqrt[5]{2}} Z_f \subset L$ die Wurzeln von $X^5 - 1$.

c) Sei $\xi$ ein Erzeuger von $G_5 \cong \mathbb{Z}/5$. $\mathbb{Q}(\xi)$ ist der Zerfällungskörper von $X^5 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, und $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 4$ (denn $X^5 - 1/(X-1) = (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel, vgl. Blatt 10, Aufgabe 3. Mithin ist $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ Galois und die Wirkung $\phi$ von $\mathbb{Z}/5^\times$ auf $G_5 \subset L$ definiert gerade die zugehörige Galoisgruppe.

d) Zusammenfassend definiert $(\eta, \ell).\alpha := \eta^\ell \alpha$ eine treue Wirkung von $G := \mathbb{Z}/5 \rtimes \mathbb{Z}/5^\times$ auf $Z_f$. Da $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\xi)][\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 4 \cdot 5 = |G|$, folgt $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q}) \cong G$.

(6 Punkte)

***-Aufgabe.** Das wurde inzwischen in der Vorlesung gezeigt:
$G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\xi), \mathbb{Q})$ ist als 2-Gruppe auflösbar mit Subquotienten $G_i/G_{i+1} \cong \mathbb{Z}/2$, die nach der Galoiskorrepondenz einem Turm quadratischer (d.h. Grad 2) Körpererweiterungen $L^{G_{i+1}}/L^{G_i}$ entsprechen.

(+4 Punkte)