1 Lösungen

1.1 Aufgabe 1

Es gilt $p = (X+Y)(Y+Z)(Z+X) = X^2Y + X^2Z + XY^2 + 2XYZ + XZ^2 + Y^2Z + YZ^2$. Setze $X > Y > Z$. Das Leitmonom ist dann $LM(p) = X^2Y = LM(s_1 s_2)$, und in nächster Ordnung erhält man $p - s_1 s_2 = -s_3$. Also folgt $p = s_1 \cdot s_2 - s_3$.

1.2 Aufgabe 2

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 3 und $\Delta(p) \neq 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt p in Linearfaktoren $p = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ und wegen $\Delta(p) \neq 0$ sind die λ_i paarweise verschieden.
Man rechnet leicht nach: Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines reellen Polynoms, so ist auch $\overline{\alpha}$ eine Nullstelle. Wir haben als die folgenden Fälle:

1. Alle Nullstellen sind reell
2. Es gibt eine nicht reelle Nullstelle. Dann ist auch ihr Konjugiertes eine Nullstelle. Die dritte Nullstelle muss dann reell sein (sonst gäbe es vier Nullstellen).

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass im Fall 1. die Diskriminante negativ ist und im Fall 2. positiv. Nun gilt für die Diskriminante

$$\Delta = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i<j} (-1)^3 (\lambda_i - \lambda_j)^2 = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2$$

Sind alle λ_i reell, so ist also $\Delta < 0$ und sind o.B.d.A. $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$ die (echt) komplexen Nullstellen so gilt wegen $(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) = \overline{(\lambda_1 - \lambda_2)}$:

$$\Delta = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \overline{\lambda_2})^2 (\lambda_2 - \overline{\lambda_2})^2 = -\left|\lambda_1 - \lambda_2\right|^4 (2i \cdot \Im \lambda_2)^2$$

Dabei ist $\Im \lambda_2$ der Imaginärteil von λ_2, also reell, womit die rechte Seite wegen $i^2 = -1$ offenbar positiv ist.

1.3 Aufgabe 3

Sei $p = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $K := \mathbb{Q}/(p)$. Wir zeigen $\alpha := X + (p)$ ist eine fünfte Einheitswurzel in K, also $\alpha^5 - 1 = 0$. Dies ist aber gleichbedeutend zu

$$X^5 - 1 \text{ ist durch } p \text{ teilbar}$$

Dies folgt sofort aus $X^5 - 1 = p \cdot (X-1)$. Wir zeigen nun, dass $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ alle Nullstellen von p in K sind, wenn man p als Polynom in $K[T]$ auffasst. Nun ist p irreduzibel über $\mathbb{Q}$ also $K = \mathbb{Q}[X]/(p)$ ein Körper. Das heißt p

hat höchstens vier Nullstellen.
Wir berechnen das Produkt $(T-\alpha)(T-\alpha^2)(T-\alpha^3)(T-\alpha^4)$ und erhalten das es gleich $T^4+T^3+T^2+T+1$ ist, wenn man $\alpha^5=1$ und $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ benutzt.

1.4 Aufgabe 4

Setze $\alpha := \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Dann ist $\alpha^2 = 5+2\sqrt{6}$, also $0 = (\alpha^2-5)^2-24 = \alpha^4-10\alpha+1$. Somit ist

$$p := X^4-10X^2+1$$

Minimalpolynom, falls es irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Die Nullstellen von p sind irrational, also zerfällt p nicht in Grad 1 und 3. Ebenso führt man die Zerlegung $p = (X2+aX+b)(X2+cX+d)$ zum Widerspruch.

Alternativ kann man die Irreduzibilität wie folgt einsehen: Wir stellen fest, dass $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ irrational ist. Denn wäre es rational, so gäbe es ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 1$. hieraus würde folgen $\lambda^2(2+2\sqrt{6}+3) = 1$ also $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Damit ist das Minimalpolynom von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nicht vom Grad 1.
Angenommen das Minimalpolynom wäre vom Grad 2, dann gäbe es $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ mit

$$5+2\sqrt{6}+\lambda(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\mu = 0$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{6}$ folgt dann aber $2 = 0$, ein Widerspruch.
Wäre das Minimalpolynom vom Grad 3, so gäbe es $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}$ mit

$$11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+\lambda(5+2\sqrt{6})+\mu(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\nu = 0$$

Hieraus folgt $\mu = -11$ und $\mu = -9$, ein Widerspruch.