Department Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

19. Juli 2010

Lösungen zur Probeklausur

Algebra
Sommersemester 2010

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Nachname: ____________________
Vorname: ____________________
Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und deren Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

von den Korrektoren auszufüllen:

________________________ Note nach Klausurpunkten

_____ Notenstufe(n) Bonus durch Übungen

________ Endnote

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$\sum$:

Aufgabe 1.
$G := S_n$ wirkt auf M_k durch $\sigma.A := \sigma(A)$. Die Wirkung ist transitiv, denn endliche Mengen gleicher Mächtigkeit stehen in Bijektion, also lässt sich jede Bijektion $A \to B$, $A, B \in M_k$ fortsetzen zu einer Bijektion von $\{1, \dots, n\}$ durch Wahl einer Bijektion auf den Komplementen. Der Stabilisator G_A von $A \in M$ sind die Permutationen S_k von A und die Permutationen S_{n-k} des Komplements $\{1, \dots, n\} \setminus A$, jeweils aufgefasst als Untergruppen von S_n vermöge der trivialen Fortsetzung. Also folgt $|M_k| = |G/G_A| = |S_n/S_k \times S_{n-k}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

1. $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/6 \ncong \mathbb{Z}/48$, denn es gibt kein Element der Ordnung 48 in $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/6$, aber in $\mathbb{Z}/48$.

2. $(\mathbb{Z}/15 \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da nicht abgeschlossen unter $\cdot$, aber selbst $\mathbb{Z}/15^\times = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ ist nicht zyklisch, da Produkt von $\mathbb{Z}/3^\times \times \mathbb{Z}/5^\times$.

3. $Z(O(2)) \neq SO(2)$.

4. Sei $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \lambda \in K \right\}$. $N_{GL(2,K)}(G)$ sind die oberen Dreiecksmatritzen, denn die Konjugation mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in GL(2, K)$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} = \begin{pmatrix} ad - cb - ac\lambda & a^2\lambda \\ c^2\lambda & ad - bc + ac\lambda \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc},$$

liegt also genau dann in G, wenn $c = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3. Es ist $|\mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/25| = 5^3$, also $\mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/25$ eine 5-Gruppe, also ist die Gruppe selbst schon die einzige 5-Sylow. (Allgemeiner gibt es in einer abelschen Gruppe höchstens eine p-Sylow, denn je zwei p-Sylowuntergruppen sind konjugiert.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Nach den Sylowsätzen gilt für die Anzahl s_7 der 7-Sylows: $s_7 \equiv 1 \mod 7$ und $s_7 | 24$. Da G einfach ist, ist $s_7 \neq 1$, also folgt $s_7 = 8$. Da unsere 7-Sylows isomorph zu $\mathbb{Z}/7$ sind, also von jedem ihrer Elemente außer der Einheit erzeugt werden, schneiden sich konjugierte 7-Sylows nur in der Einheit, also gibt es $s_7 \cdot (7 - 1) = 48$ Elemente der Ordnung 7.

(5 Punkte)

Aufgabe 5. $X^4 - 9X^2 - 6X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ ist irreduzibel nach Eisenstein für $p = 3$, erzeugt also ein Primideal im Hauptidealring $\mathbb{Q}[X]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6. $(\mathbb{Z}/4, +, \cdot)$ ist kein Körper ($[2]$ ist Nullteiler), aber $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel (weder 0 noch 1 ist Nullstelle), also ist $(\mathbb{Z}/2)[X]/(X^2+X+1)$ ein Körper und damit nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/4$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7. Das Urbild eines Ideals $I \subset S$ ist ein Ideal, denn $R\varphi^{-1}(I) = \varphi^{-1}(S)\varphi^{-1}(I) = \varphi^{-1}(I)$. Ebenso folgt, dass $\varphi^{-1}(I)$ prim ist, falls I prim ist. Das Urbild eines maximalen Ideals muss aber nicht maximal sein, ein Gegenbeispiel ist $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$: Hier ist $\{0\}$ einziges max. Ideal von $\mathbb{Q}$, aber z.B. $(2) \subset \mathbb{Z}$ ist maximales Ideal in $\mathbb{Z}$, das $\varphi^{-1}(\{0\})$ als echte Teilmenge enthält.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.

1. Ist R ein Integritätsbereich, so gilt $(R[X])^\times = R^\times$, denn $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.
2. $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/n] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$ (folgt direkt aus der Definition des Monoidrings).

(4 Punkte)

Aufgabe 9. Das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$ ist $f := (X^2-2)^2 - 2$ und hat Nullstellen $\pm\alpha$ und $\pm\beta := \sqrt{2-\sqrt{2}}$ über $\mathbb{R}$. Es ist $\alpha\beta = \sqrt{2} = \alpha^2 - 2$, also $\pm\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, also ist $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal.

(4 Punkte)

Aufgabe 10. Die Unterkörper sind die Fixkörper der Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{27}/\mathbb{F}_3) \cong \mathbb{Z}/3$, also ist nur $\mathbb{F}_3$ echter Unterkörper.

(4 Punkte)

Aufgabe 11. Sei $L := \mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(2\xi)$ mit $\xi := \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ primitive achte Einheitswurzel. Dann ist $L/\mathbb{Q}$ Galois mit $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/8)^\times$, genauer wird nach Aufgabe 3c, Blatt 12 $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ durch $G_8 \to G_8 : \eta \mapsto \eta^\ell$ mit $\ell \in (\mathbb{Z}/8)^\times$ erzeugt. Jedes der drei Elemente aus $(\mathbb{Z}/8)^\times \setminus \{1\} = \{3,5,7\}$ hat Ordnung 2, erzeugt also eine 2-elementige Untergruppe, deren Fixkörper ein Zwischenkörper entspricht. Also gibt es genau drei Zwischenkörper, und alle drei sind quadratische Erweiterungen:

1. $\xi - \xi^{-1} = \xi^3 - \xi^{-3} = \sqrt{-2}$ erzeugt $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \subset L$,
2. $\xi^2 = (\xi^2)^5 = i$ erzeugt $\mathbb{Q}(i) \subset L$,
3. $\xi + \xi^{-1} = \xi^7 + \xi^{-7} = \sqrt{2}$ erzeugt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset L$.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.

1. Ja, der Frobeniushomomorphismus ist nur für $\mathbb{F}_p$ trivial.

2. Ja, da f höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen hat und die Galoisgruppe G von f treu auf der Nullstellenmenge von f wirkt (vgl. Blatt 12, Aufgabe 1a), ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_{n-1}.

3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(M)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2)^{|M|}$ *Bemerkung:* Diese Frage liegt über dem Anspruch der Klausur. Wir skizzieren nur eine mögliche Herleitung: Sei $M_i := \{\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_i}\} \subset M$ und $|M_i| = i$. Wir behaupten, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(M_1) \subset \ldots \subset \mathbb{Q}(M)$ ein Turm quadratischer Körpererweiterungen mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(M_{i+1})/\mathbb{Q}(M)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(M_i)/\mathbb{Q}(M))$ ist, falls $\mathrm{ggT}(p_i, p_j) = 1$ für alle i, j mit $i \neq j$. Es reicht durch Induktion über $i = |M_i|$ zu zeigen, dass $\dim_{\mathbb{Q}} \langle M \rangle = 2^{|M|}$. Für $i = 1, 2$ folgt das direkt. Angenommen, $\dim_{\mathbb{Q}} \langle M_{i+1} \rangle = 2^{|M_{i+1}|}$, aber $\sqrt{p_{i+2}} = a + b\sqrt{p_{i+1}}$ für $a, b \in \mathbb{Q}(M_i)$. Dann gilt
$$p_{i+2} - a^2 - b^2 p_{i+1} = 2ab\sqrt{p_{i+1}}.$$
Man führt nun die drei Fälle (1) $a = 0$, (2) $b = 0$, (3) $\sqrt{p_{i+1}} \in \mathbb{Q}(M_i)$ mit Hilfe der Induktionsannahme zum Widerspruch. Z.B. folgt aus (1), dass $\sqrt{p_{i+1}p_{i+2}}$ in $\mathbb{Q}(M_i)$ liegt, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung an $M_i \cup \{\sqrt{p_{i+1}p_{i+2}}\}$.

(6 Punkte)