Department Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

3. September 2010

Lösungen zur Nachklausur

Algebra
Sommersemester 2010
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Nachname: ____________________
Vorname: ____________________
Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und deren Lösungen verwendet werden. Auch ergänzende Literatur ist zugelassen. Untersagt ist jedoch die Benutzung elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

Von den Korrektoren auszufüllen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Gesamtpunktzahl: ________

Note: ________

Aufgabe 1. G wirkt auf den 2×2-Matritzen M durch Basiswechsel im Definitions- und Zielraum. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass der Rang $\mathrm{rk} : M \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung $M/G \to \mathbb{N}$ induziert, also $|M/G| = |\{\mathrm{rk} M\}| = |\{0,1,2\}| = 3$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. $q^{-1}(\langle 6\rangle) = (6,14) = (\mathrm{ggT}(6,14)) = (2)$. In der Tat ist $\langle 2\rangle = \langle 6\rangle$ in $\mathbb{Z}/14$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

a) $\mathrm{rk}\Big(\mathbb{Z}^3/\big\langle(1,2,3),(1,0,1)\big\rangle\Big) = 1$, denn $(1,2,3),(1,0,1)$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ und $\mathrm{rk}\ M = \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ für jeden $\mathbb{Z}$-Modul M.

b) Wegen $(n,m) = (1) \iff (n)\cap(m) = (nm)$ ist $\ker(\mathbb{Z}/m \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z}/m) = \{0\}$ und somit die Multiplikation mit n einen Automorphismus von $(\mathbb{Z}/m,+)$ der Ordnung m.

c) $Z(SL(2,\mathbb{Z})) = \{\pm 1\}$, denn nach Präsenzaufgabe 1 ist $SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ isomorph zu einem freien Produkt zweier Gruppen der Ordnung 2 bzw. 3. Alternativ überpüft man die nicht triviale Inklusion $Z(SL(2,\mathbb{Z})) \subset \{\pm 1\}$ durch Nachrechnen: Betrachte zwei Elemente $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ aus $SL(2,\mathbb{Z})$ (A und B erzeugen $SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$). Setze $X := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $AX = XA$ genau dann, wenn $a = -d$ und $b = -c$, und aus $BX = XB$ folgt $c = 0$. Somit kommutiert X genau dann mit A und B, falls X Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Aus $\det X = 1$ folgt dann $X = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

d) Die Kompositionsreihe von $A_4 := \ker(\mathrm{sgn} : S_4 \to \{\pm 1\})$ liefert ein Gegenbeispiel: Sei V die einzige (also normale) 2-Sylowuntergruppe von A_4. Expliziter besteht $V \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ aus der Identität und den drei Doppeltranspositionen $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$. Damit erhalten wir folgende Kompositionsreihe:

$$\{1\} \triangleleft \langle(12)(34)\rangle \triangleleft V \triangleleft A_4$$

Aber $\langle(12)(34)\rangle$ ist nicht normal in A_4.

(8 Punkte)

Aufgabe 4.

Sei $G := GL(2,\mathbb{F}_p)$. Es ist $|G| = |\{(a,b) \in \mathbb{F}_p^2 \times F_p^2 | a \neq 0, b \notin \mathbb{F}_p \cdot a\}| = (p^2-1)(p^2-p)$. Die Isotropiegruppe G_x von $x := \binom{1}{0}$ ist $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right) | a,b \in \mathbb{F}_p,\ b \neq 0\}$, also $|G_x| = p^2 - 1$ und

$$|G.x| = |G|/|G_x| = p^2 - p.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.
Eine 2-Sylowuntergruppe in D_6 hat Ordnung 4, ist also abelsch. Da D_6 aber kein Element der Ordnung 4 besitzt, wird jede 2-Sylowuntergruppe H von zwei Elementen der Ordnung 2 erzeugt, etwa $H := \langle \sigma^3, \tau \rangle$. Nach den Sylowsätzen ist jede andere dazu konjugiert und die Anzahl der 2-Sylowuntergruppen ein Teiler von 3, also gibt es insgesamt genau folgende drei 2-Sylowuntergruppen:

$$\left\langle \sigma^3, \sigma^j \tau \sigma^{-j} \right\rangle, \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6. Sei R die Potenzmenge von M und $\chi_a : M \to \mathbb{Z}/2$ die Indikatorfunktion von $a \subset M$, also $\chi_a(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in a$. Dann ist

$$\phi : R \to \mathrm{Abb}(M, \mathbb{Z}/2), \quad a \mapsto \chi_a$$

ein Isomorphismus von Ringen. Weiter gilt

$$\phi(I_m) = \ker(\mathrm{Abb}(M, \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2,\, \xi \mapsto \xi(m)),$$

also ist I_m ein Ideal und $R/I_m \cong \mathbb{Z}/2$ ein Körper, also I_m sogar ein maximales Ideal. Alternativ überprüft man direkt, dass I_m die definierenden Eigenschaften eines Ideals erfüllt, und folgert aus $R/I_m = \{[\emptyset], [\{m\}]\}$, dass R/I_m ein Körper, also I_m maximal ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.
Angenommen, es existierte $a \in \ker(R \to R[X]/(f)) \setminus \{0\}$. Dann gilt $a \in (f)$, also $\deg(a) \geq \deg(f) = 1$, das ist ein Widerspruch.

(4 Punkte)

Aufgabe 8. $f := X^3 - 5X^2 + 25X + 10$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}$ nach dem Eisensteinkriterium für $p = 5$. Da f primitiv ist, ist also f auch irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach Korollar 12.1. f ist jedoch weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$ irreduzibel, da jedes reelle Polynom dritten Grades eine reelle Nullstelle hat.
(*Bemerkung*: Die letzte Aussage folgt aus dem Mittelwertsatz oder – algebraischer – aus der Stabiltät der komplexen Nullstellenmenge unter Konjugation: Eine $\mathbb{Z}/2$-Wirkung auf einer Menge mit ungerade vielen Elementen muss nach der Bahnenformel einen Fixpunkt besitzen.)

(4 Punkte)

Aufgabe 9. Seien $Z_f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ die Nullstellen von f in L. Dann folgt durch Induktion über $|Z_f|$:

$$K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) \cong K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)[X]/Irr(\alpha_{i+1}, K(\alpha_1, \dots, \alpha_i))$$

und

$$Irr(\alpha_{i+1}, K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)) \text{ teilt } \prod_{j=i+1}^{n} (X - \alpha_j) \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)[X].$$

Dies zeigt $[K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) : K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)] \leq n-i$. Damit folgt die Aussage per Induktion aus der Multiplikativität des Grades.
Bemerkung: L/K muss nicht Galoissch sein, sonst könnte man die Aussage direkt aus $[L : K] = |\operatorname{Aut}(L/K)| \leq |S_n|$ folgern.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.
L ist auch der Zerfällungskörper von $f := X^9 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{9}}$ eine primitive neunte Einheitswurzel. Betrachte den Körperturm

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi) \subset \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[9]{3}) = L.$$

Nach Satz 19 ist $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = |(\mathbb{Z}/9)^\times| = 6$, und aus dem Translationssatz der Galoistheorie folgt $[L : \mathbb{Q}(\xi)] = [\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}) : \mathbb{Q}] = 9$, also ist $[L : \mathbb{Q}] = 6 \cdot 9 = 54$.

(4 Punkte)

Aufgabe 11. Es existiert eine Einbettung $G \hookrightarrow S_n$ und eine Galoiserweiterung L/M mit $\operatorname{Aut}(L/M) = S_n$. Gemäß der Galoiskorrespondenz ist der Fixkörper $K := L^G$ ein Zwischenkörper von L/M mit $\operatorname{Aut}(L/L^G) \cong G$.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.

a) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$ ist Galoissch, denn $\xi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ ist eine primitive sechste Einheitswurzel, also ist $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \xi)/\mathbb{Q}$ Zerfällungskörper von $X^6 - 2$ (vgl. auch Beispiel 17.4 der Vorlesung).

b) Sei M der Zerfällungskörper von f. Dann ist ML/K Galoissch. Sei Z_f die Menge der Nullstellen von f in M. Betrachte den Turm von Galoiserweiterungen $K \subset L \subset ML$. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist $N := \operatorname{Aut}(ML/L)$ ein normale Untergruppe von $G := \operatorname{Aut}(ML/K)$ und die Nullstellenmengen $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_s} \subset M$ der L-irreduziblen Faktoren $f_1, \dots, f_s$ von f sind gerade die Bahnen der Wirkung von $N \subset G$ auf Z_f. G permutiert diese Bahnen, denn für alle $g \in G$, $x \in Z_f$ gilt $g.(N.x) = N.(g.x)$ wegen $N \triangleleft G$. Somit haben die L-irreduziblen Faktoren von f den gleichen Grad.

(4 Punkte)