Department Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

26. Juli 2010

Lösungen zur Klausur

Algebra
Sommersemester 2010

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und deren Lösungen verwendet werden. Auch ergänzende Literatur ist zugelassen. Untersagt ist jedoch die Benutzung elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

Von den Korrektoren auszufüllen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Gesamtpunktzahl: ________ Note: ________

Aufgabe 1. Angenommen, die Wirkung hat keinen Fixpunkt. Da G eine 2-Gruppe ist, hat dann jede Bahn $G.x$ gerade Länge: $|G.x| = |G|/|G_x| \in 2\mathbb{N}$. Also ist auch $|X| = \sum_{[x]\in X/G} |G|/|G_x| \in 2\mathbb{N}$ gerade, im Widerspruch zu $|X| = 15$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. $\mathbb{Z}/36$ ist eine endliche zyklische Gruppe und jeder Teiler von 36 erzeugt eine zyklische Untergruppe. Nach Satz 3.6 enstehen alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/36$ auf diese Weise, die Erzeuger sind also $1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. $L := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a+b \equiv 0 \mod 2\}$ ist frei mit Erzeugern $(1, 1)$ und $(1, -1)$ (oder ein $\mathrm{Aut}(L) \cong GL(2, \mathbb{Z})$-Bild davon), denn $a + b \equiv 0 \mod 2 \iff \frac{a\pm b}{2} \in \mathbb{Z}$ und $(a, b) = \frac{a+b}{2}(1, 1) + \frac{a-b}{2}(1, -1)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.

1. $O(2) \not\cong \mathbb{Z}/2 \times SO(2)$, denn $\mathbb{Z}/2 \times SO(2)$ ist abelsch, $O(2)$ nicht.
2. Die kleinste nicht-abelsche Gruppe S_3 ist ein Gegenbeispiel.
3. $\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ ist ein Gegenbeispiel.

(6 Punkte)

Aufgabe 5. Die Anzahl von 3-Sylowuntergruppen ist $s_3 = 1$, denn nach den Sylowsätzen gilt $s_3 \equiv 1 \mod 3$ und $s_3|2$. Die einzige 3-Sylowuntergruppe ist aber ein Normalteiler, denn sonst gäbe es nach den Sylowsätzen eine weitere konjugierte 3-Sylowuntergruppe.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.

Alternative 1: In $R \times R$ sind alle Elemente idempotent (d.h. für alle $r \in R \times R$ gilt $r^2 = r$), aber nicht in $R[X]$, denn $X^2 \neq X$. Also $R \times R \not\cong R[X]$.

Alternative 2: Ein Isomorphismus $R \times R \to R[X]$ erhält die Null und die Eins und ist bijektiv, ist also von der Form $(0, 0) \mapsto 0, (1, 1) \mapsto 1, (1, 0) \mapsto X + a, (0, 1) \mapsto X + 1 + a$. Das ist aber nicht mit der Multiplikation verträglich: O.E. ist $a = 0$, dann $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$, aber $X(X + 1) = X$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7. Sei $f := X^2 + Y^2 + Z^2 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$. Ordne die Monome lexikographisch, so dass $X > Y > Z$. Dann gilt für das Leitmonom $LM(f) = X^2 = LM(s_1^2)$, also $f - s_1^2 = 2s_2$. Es folgt $f = s_1^2 + 2s_2$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8. Der Auswertungshomomorphismus $ev_0 : A \to \mathbb{Z},\ a \mapsto a(0)$ ist surjektiv (denn $\mathbb{Z} \subset A$ und $ev_0|_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$) und hat I_m als Kern, induziert also einen Isomorphismus $A/I_m \to \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ Integritätsbereich ist, ist I_m prim. Aber das Urbild $I_m + (n)$ jedes Ideals $(n) \subset \mathbb{Z}$ erzeugt ein Zwischenideal $I_m \subset I_m + (n) \subset A$, und beide Inklusionen sind echt falls $n \notin \{0, 1\}$. Das Zwischenideal $I_m + (n)$ ist maximal genau dann, wenn n prim ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 9. Einheiten von $(\mathbb{Z}/4)[X]$ werden von $\pi : (\mathbb{Z}/4)[X] \to (\mathbb{Z}/2)[X]$ wegen $1 = \pi(rr^{-1}) = \pi(r)\pi(r^{-1})$ auf eine Einheit von $(\mathbb{Z}/2)[X]$ abgebildet. Da $\mathbb{Z}/2$ ein Körper ist, ist aber $(\mathbb{Z}/2)[X]^\times = \mathbb{Z}/2^\times = \{1\}$. Also $(\mathbb{Z}/4)[X]^\times \subset \pi^{-1}(\{1\}) = 1 + \ker \pi$ mit $\ker \pi = 2\mathbb{Z}[X]$. Jedes Element $1 + 2f \in 1 + 2\mathbb{Z}[X]$ ist aber sein eigenes Inverses, denn $(1 + 2f)^2 = 1 + 4(f + f^2) = 1$. Also folgt $(\mathbb{Z}/4)[X]^\times = 1 + 2\mathbb{Z}[X]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.

1. Reduktion modulo 2 liefert $X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}/2[X]$. Dieses Polynom ist nullstellenfrei und vom Grad 3, also irreduzibel, also war auch das Ausgangspolynom irreduzibel.

2. $\ker(A \to A, a \mapsto a(0, \ldots, 0)) = (X_1, \ldots, X_n)$ ist kein Hauptideal.

3. Die Zerlegung von $X^8 - X \in \mathbb{F}_2[X]$ in irreduzible Fakoren ist von der Form $X^8 - X = X(X + 1)fg$ mit f, g vom Grad 3, vgl. Beispiel 16.6 der Vorlesung. Nach dem Satz 16.7 über endliche Körper sind f und g die einzigen $\mathbb{F}_2$ irreduziblen Polynome vom Grad 3, und die Nullstellenmengen von f und g über dem Zerfällungskörper $\mathbb{F}_8$ von $X^8 - X$ sind gerade die Bahnen der Länge 3 des Frobeniushomomorphismus $x \mapsto x^2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.

Alternative 1: $\mathbb{Q}(\xi)$ ist Galois mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/6)^\times \cong \mathbb{Z}/2$, also ist $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ in der Tat quadratisch.

Alternative 2: Explizit ist $\xi^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \xi - 1$, $\xi^3 = -1$, $\xi^4 = \xi^{-2}$ und $\xi^5 = \xi^{-1}$, also existieren nur zwei über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige sechste Einheitwurzeln, d.h. $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 2$.

Alternative 3: Die Relationen in Alternative 2 am regelmäßigen Sechseck geometrisch ablesen.

(4 Punkte)

Aufgabe 12. Da f irreduzibel ist, wirkt die Galoisgruppe G transitiv auf der Nullstellenmenge Z_f von f, also ist $|Z_f| = |G|/|G_\alpha|$ für ein $\alpha \in Z_f$. Somit ist $|G|$ durch $n = |Z_f|$ teilbar. $|G|$ ist aber auch durch 2 teilbar, denn die komplexe Konjugation wirkt auf Z_f. Da n ungerade ist, folgt $2n \mid |G|$.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.

1. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht Galoissch, denn $X^3 - 2$ zerfällt nicht über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

2. Sei $\alpha = \sqrt{3}+i$. $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$, denn $\overline{\alpha} = 4\alpha^{-1}$, also auch $\{\sqrt{3}, i\} = \{\frac{1}{2}(\alpha \pm \overline{\alpha})\} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$. Die umgekehrte Inklusion $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ ist offensichtlich.

3. Jede Körpererweiterung L/K vom Grad zwei ist normal, denn das Minimalpolynom eines Erzeugers von L/K besteht aus nur zwei Linearfaktoren über einem Zerfällungskörper, zerfällt also schon über L.

(6 Punkte)