Algebra I
Sommer 2010

Prof. Dr. B. Siebert
Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1. Welche der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ sind irreduzibel? Begründe!

a) $X^3 - 2X^2 + X + 3$.

b) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X^1 + 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Zeige: $1+X+X^2+\ldots+X^{p-1}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$, falls p ein Primzahl ist. (*Hinweis:* Nutze die Summenformel der geometrischen Reihe, substituiere $X = Y + 1$ und reduziere modulo p.)

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\mathbf{k}$ ein Körper mit $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$. Zeige, dass $X^2 + Y^2 - 1$ irreduzibel in $\mathbf{k}(X)[Y]$ ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimme ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$, das das Inverse (bezüglich der Multiplikation) von $X^2 + X + 1$ im Ring $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2X - 2)$ repräsentiert.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $\mathbf{k}$ ein Körper. Zeige:

a) Ist $\mathbf{k}$ unendlich, so gilt für alle $f, g \in \mathbf{k}[X]$:

$$f = g \iff f(x) = g(x) \;\; \forall x \in \mathbf{k}$$

b)* Die Aussage in a) ist falsch für endliche Körper: Ist $\mathbf{k}$ endlich, so gibt es $f \in \mathbf{k}[X] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbf{k}$. (*Hinweis*: Man kann z.B. verwenden, dass $|\mathbf{k}|$ ein Potenz von $\operatorname{char}(\mathbf{k})$ ist, und Aufgabe 2 von Blatt 8 nutzen.)

(2+2 Punkte)