Algebra I | Prof. Dr. B. Siebert
Sommer 2010 | Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1. Seien $I, J \subset R$ Ideale eines Rings R. Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

a) $I \cap J$ ist ein Ideal.
b) Sind I, J Primideale, so ist auch $I \cap J$ Primideal.
c) Sind I, J Primideale, so ist auch $I + J$ Primideal.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Zeige:

a) Es gilt $m^p = m$ für alle $m \in \mathbb{Z}/p$. (*Hinweis:* Betrachte $(\mathbb{Z}/p)^\times$.)
b) Ist R ein Ring der Charakteristik p, so ist $R \to R, a \mapsto a^p$ ein Ringhomomorphismus.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei R ein Hauptidealring und seien $a_1, \ldots, a_n \in R$. Zeige, dass das von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Ideal genau dann gleich R ist, wenn jeder gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ eine Einheit ist:

$$(a_1, \ldots, a_n) = R \iff \{t \in R \setminus \{0\} \mid t|a_1, \ldots, t|a_n\} \subset R^\times.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Welche der folgenden Ideale sind Primideale, welche maximale Ideale? Begründe!

a) $\{p \mid p(0) = p'(0) = 0\} \subset \mathbb{C}[x]$.
b) $(x + y) \subset \mathbb{C}[x, y]$. (*Hinweis:* Koordinatenwechsel)

(3 Punkte)