Algebra I
Sommer 2010

Prof. Dr. B. Siebert
Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Welche der folgenden Teilmengen M des Polynomrings $\mathbb{Z}[x]$ sind Ideale, welche Unterringe von $\mathbb{Z}[x]$? Begründe und gib eine minimale Teilmenge $E \subset M$ an, die M erzeugt (d.h. M ist das kleinste Ideal bzw. der kleinste Unterring von $\mathbb{Z}[x]$, der E enthält).

a) $\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \;\middle|\; a_n \in k\mathbb{Z} \right\}$
b) $\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \;\middle|\; a_n = 0 \text{ falls } n \notin k\mathbb{Z} \right\}$
c) $\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \;\middle|\; a_n \in \mathbb{Z}, (2k)|a_0, k|a_1, k|a_2 \right\}$
d) $\{ p \in \mathbb{Z}[x] \mid p(y) = 0\}$ für ein $y \in \mathbb{Z}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Seien A, B zwei Ringe. Zeige: $A \times B$ mit der komponentenweise Multiplikation ist wieder ein Ring und jedes Ideal I von $A \times B$ hat die Form $J \times K$ für geeignete Ideale $J \subset A$ und $K \subset B$. (*Hinweis:* Betrachte $(1,0)I$ und $(0,1)I$.)

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$. Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterring von $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$. (*Hinweis:* Betrachte einen geeigneten Auswertungsmorphismus.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Betrachte das Monoid $M_\ell := \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 | m \geq 0, m + \ell n \geq 0\}$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für jeden Körper $\mathbf{k}$ gilt:

$$\mathbf{k}[M_\ell] \cong \mathbf{k}[x,y,z]/(xy - z^\ell).$$

(4 Punkte)