Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und P_n die Menge der Partitionen von n in aufsteigende Folgen $n_1 \leq n_2 \leq ...$ mit $\sum_i n_i = n$ und $n_i \geq 1$ wie in Blatt 2, Aufgabe 2. Die Zahl k sei in der Partition p genau $c_k(p)$ mal enthalten (also $c_k(n_1, n_2, ...) := |\{i \mid n_i = k\}|$.) Zeige mit Hilfe der Klassenformel:

$$1 = \sum_{p \in P_n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} c_k(p)! \cdot k^{c_k(p)}}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Die Diedergruppe D_n kann als semidirektes Produkt $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z}/n$ definiert werden, wobei die Wirkung $\mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n)$ durch die Relation $srs = r^{-1}$ auf den Standarderzeugern $s := (1, 0)$ und $r := (0, 1)$ festgelegt ist. (D_n ist gerade die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks, s enspricht einer Spiegelung und r einer Rotation um $2\pi/n$ in $O(2) \cong \mathbb{Z}/2 \ltimes SO(2)$.)
Bestimme die Menge der Konjugationsklassen der Diedergruppe D_n für gerade n.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Seien G eine endliche Gruppe, $A \subset B \subset G$ zwei Untergruppen, $N_G(A) := \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$ der *Normalisator* von A in G und $Z_G(A) := \{g \in G \mid gag^{-1} = a \; \forall a \in A\}$ der *Zentralisator* von A in G. Zeige oder finde Gegenbeispiele zu den folgenden Aussagen: (Hinweis: Nur eine der sechs Aussagen ist immer richtig, für die Gegenbeispiele betrachte z.B. $G = S_3$.)

(a) $N_G(A) \subset N_G(B)$ (c) $Z_G(A) \subset Z_G(B)$ (e) $Z(A) \subset Z(B)$
(b) $N_G(A) \supset N_G(B)$ (d) $Z_G(A) \supset Z_G(B)$ (f) $Z(A) \supset Z(B)$.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index $n > 1$. Betrachte die von der Konjugation induzierte Wirkung von G auf der Menge $M := \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ der zu H konjugierten Untergruppen.
Zeige: Die Wirkung definiert eine Einbettung (d.h. einen injektiven Gruppenhomomorphismus) $G \hookrightarrow S_n$, falls G *einfach* ist, d.h. $\{1\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind.

(3 Punkte)

***Aufgabe.** Sei $H \subset G$ vom Index $n > 1$ wie in Aufgabe 4. Zeige: H ist ein Normalteiler, falls n die kleinste $|G|$ teilende Primzahl ist.

(+3 Punkte)