Algebra I | Prof. Dr. B. Siebert
Sommer 2010 | Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1. Die Gruppe G wirke auf einer endlichen Menge X mit Fixpunktmenge X^G. Zeige: Ist $|G|$ eine Primzahl, so gilt

$$|X^G| \equiv |X| \mod |G|.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Gib einen Isomorphismus der Untergruppe

$$G := \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3 \text{ teilt } a + b + c\}$$

von $\mathbb{Z}^3$ zu einem Produkt zyklischer Gruppen an.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeige: Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht frei, d.h. für alle $n > 0$ gilt $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Z}^n$.

Hinweis: Betrachte das Bild der Standarderzeuger von $\mathbb{Z}^n$ unter einem Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (**Semidirektes Produkt II**) Sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, der einen rechtsinversen Gruppenhomomorphismus $\sigma : H \to G$, $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_H$ besitze. (Man sagt dann, *die kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \ker \varphi \to G \xrightarrow{\varphi} H \to 0$$

spaltet.) Zeige, dass G zu einem semidirekten Produkt $H \ltimes \ker \varphi$ isomorph ist.

(4 Punkte)