Algebra I — Prof. Dr. B. Siebert
Sommer 2010 — Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index zwei. Zeige: H ist ein Normalteiler von G.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Zeige: Ist N ein Normalteiler von S_5, der die Transposition (12) enthält, so ist $N = S_5$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ falls

a) $m|n$ b) $n|m$ c) m, n sind teilerfremd.

Hinweis: Betrachte das Bild von $[1] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ wie in der Präsenzaufgabe 4.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. (**Semidirektes Produkt**). Sei $\phi : G \to \mathrm{Aut}(N)$ eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Gruppe N, so dass $\phi(g)$ ein Gruppenautomorphismus ist für alle $g \in G$. Die Menge $G \times N$ mit der Verknüpfung $(g, n) \cdot (g', n') := (gg', n\phi(g)(n'))$ heißt *semidirektes Produkt* $G \ltimes N$. Zeige:

a) Diese Verknüpfung definiert eine Gruppenstruktur auf $G \ltimes N$.
b) Jedes Element von $G \ltimes N$ lässt sich eindeutig schreiben als ein Produkt[1] $g \cdot n$ von $n \in N$ und $g \in G$, wobei wir G und N als Untergruppen von $G \ltimes N$ auffassen vermöge der Inklusionen $n \mapsto (1, n)$ und $g \mapsto (g, 1)$.
c) N ist ein Normalteiler von $G \ltimes N$.
d) Die Gruppe der affinen Abbildungen $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ ist ein semidirektes Produkt $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardwirkung $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

(4 Punkte)

[1] Beachte, dass im Allgemeinen $g \cdot n := (g, 1) \cdot (1, n) \neq g.n := \phi(g)(n)$.