Algebra I
 Sommer 2010

Prof. Dr. B. Siebert
 Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. S_5 operiere auf $\mathbb{R}^5$ durch Permutation der Koordinaten. Welche Bahnlängen kommen vor? Begründe!

(3 Punkte)

Aufgabe 2. S_n operiere auf sich durch Konjugation

$$\kappa : S_n \to \mathrm{Hom}(S_n, S_n), \quad \kappa(\pi)(\sigma) := \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}.$$

Zeige: Der Bahnenraum $S_n/\sim$ von κ ist in natürlicher Bijektion zur Menge P der Partitionen von n in aufsteigende Folgen $n_1 \leq n_2 \leq ...$ mit $\sum_i n_i = n$ und $n_i > 0$.

Hinweis: Sei $\sigma \in \mathrm{Bij}(X)$ und $\langle\sigma\rangle := \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die von σ erzeugte Untergruppe. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Zerlegung von X in die Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ eine Zerlegung $\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|}$ von σ in Zykel aufsteigender Länge $\mathrm{ord}(\sigma_1) \leq \mathrm{ord}(\sigma_2) \leq ... \leq \mathrm{ord}(\sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|})$ definiert. Damit erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$f : S_n \to P, \quad \sigma \mapsto (\mathrm{ord}(\sigma_1), ..., \mathrm{ord}(\sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|})).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $h : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Muss H abelsch sein, wenn G abelsch ist? Muss umgekehrt G abelsch sein, wenn H abelsch ist? Begründe!

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $M := \{g \in GL(2,\mathbb{R}) \mid g.v = w\}$ die Menge der invertierbaren Matrizen, die v auf w abbilden. Zeige: Es gibt eine eindeutige Untergruppe $G \subset GL(2,\mathbb{R})$, so dass M eine Linksnebenklasse von G ist (d.h. $M = gG$ für ein $g \in GL(2,\mathbb{R})$).

(3 Punkte)