Algebra I Prof. Dr. B. Siebert
Sommer 2010 — Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$, L der Zerfällungskörper von f, und $Z_f := \{\alpha \in L |\, f(\alpha) = 0\}$ die Menge der Nullstellen von f über L. Zeige:

a) Die Einschränkung von $\varphi \in \operatorname{Aut}(L/K)$ auf Z_f definiert eine Einbettung der Galoisgruppe $\operatorname{Aut}(L/K)$ in die Permutationen $S_{|Z_f|}$ von Z_f:
$$\operatorname{Aut}(L/K) \hookrightarrow S_{|Z_f|}, \quad \varphi \mapsto \varphi|_{Z_f}.$$

b) Ist f irreduzibel über K, so wirkt $\operatorname{Aut}(L/K)$ transitiv auf Z_f.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei p prim und $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad p. Zeige: Hat f über $\mathbb{C}$ genau zwei nicht-reelle Nullstellen, so gilt $\operatorname{Aut}(L/K) \cong S_p$ für den Zerfällungskörper L von f.

(*Hinweis:* Da f irreduzibel ist, hat f keine mehrfache Nullstelle über $\mathbb{C}$. Verwende nun Aufgabe 1 und die komplexe Konjugation.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $f := X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und L der Zerfällungskörper von f. Bestimme $\operatorname{Aut}(L/\mathbb{Q})$. Zeige dazu:

a) Ist α Nullstelle von f über L, so gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$.

b) L enthält die Gruppe der 5-ten Einheitswurzeln $G_5 := \{\eta \in \mathbb{C} | \eta^5 = 1\}$.

c) Sei ξ ein Erzeuger von $G_5 \cong \mathbb{Z}/5$. Der Isomorphismus
$$\phi : (\mathbb{Z}/5)^\times \to \operatorname{Aut}(G_5), \quad \phi(\ell)(\eta) := \eta^\ell$$
induziert einen Isomorphismus $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5)^\times$.
(*Bemerkung*: Nach Blatt 10, Aufgabe 3 gilt $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 4$.)

d) $\operatorname{Aut}(L/\mathbb{Q})$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z}/5 \rtimes (\mathbb{Z}/5)^\times$ bezüglich der Wirkung ϕ.

(6 Punkte)

***-Aufgabe. (Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks)** Der *Körper der konstruierbaren Zahlen* ist definiert als der kleinste Unterkörper $K \subset \mathbb{C}$, der abgeschlossen ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln.

Zeige: Die Eckenmenge $G_n := \{\xi \in \mathbb{C} | \, \xi^n = 1\}$ des regelmäßigen n-Ecks liegt genau dann in K, wenn $\varphi(n)$ eine Potenz von zwei ist. Dabei ist die *Eulersche φ-Funktion* definiert als

$$\varphi(n) := |(\mathbb{Z}/n)^\times| = |\{m \in \{1, \ldots, n\} : \; \mathrm{ggT}(n, m) = 1\}|.$$

Anleitung: Zeige zunächst:

a) Ist G eine 2-Gruppe mit $|G| \geq 2$, so gibt es einen Normalteiler $G' \subset G$ vom Index zwei. (*Hinweis:* Verwende, dass es ein $g \in Z(G)$ der Ordnung 2 gibt.)

b) Ist in (a) insbesondere $G \subset \mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ für eine Galoiserweiterung $L/\mathbb{Q}$, so ensteht $L^{G'}$ aus L^G durch Erweitern mit einer Quadratwurzel.

Verwende nun (ohne Beweis) folgende Verallgemeinerung von Aufgabe 3c): Ist ξ ein Erzeuger von G_n, so ist $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung und

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n)^\times.$$

(+4 Punkte)