Algebra I
Sommer 2010 | Prof. Dr. B. Siebert
Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. Sei L/K eine Körpererweiterung, deren Grad prim ist. Zeige: Für alle $\alpha \in L \setminus K$ gilt $L = K(\alpha)$. (*Hinweis:* Betrachte $[K(\alpha) : K]$.)

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Seien $K \subset L \subset M$ Körper und sei $\alpha \in M$ algebraisch über K. Zeige: $\deg_L(\alpha) \leq \deg_K(\alpha)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Zeige: Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, so sind auch $\overline{\alpha}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$ und $|\alpha|$ algebraisch über $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\phi \in \mathrm{Aut}(L)$ ein Körperautomorphismus mit $\phi(k) = k$ für alle $k \in K$. Zeige: Ist $\alpha \in L$ algebraisch über K, so haben α und $\phi(\alpha)$ dasselbe Minimalpolynom.

(2 Punkte)

Aufgabe 5.

a) Zerlege $q := X^9 - X \in \mathbb{F}_3[X]$ in irreduzible Faktoren.

b) Wähle ein irreduzibles Polynom $p \in \mathbb{F}_3[X]$ vom Grad zwei in der Zerlegung von q und somit eine Darstellung $\mathbb{F}_9 \cong \mathbb{F}_3[X]/(p)$. Berechne die Bahnen des Frobeniusautomorphismus von $\mathbb{F}_9$ in dieser Darstellung und zerlege damit die $\mathbb{F}_3$-irreduziblen Faktoren von q in Linearfaktoren in $\mathbb{F}_9[X]$.

(4 Punkte)