

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1. Drücke das Polynom $(X + Y)(Y + Z)(Z + X) \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ in elementarsymmetrischen Polynomen aus.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad drei mit Diskriminante $\Delta \neq 0$. Zeige: Ist $\Delta < 0$, so sind alle Nullstellen von p reell; ist $\Delta > 0$, so hat p genau eine reelle Nullstelle.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $p := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, $K := \mathbb{Q}[X]/(p)$ und $\alpha := X + (p) \in K$ das Bild von X . p definiert auch ein Polynom $\tilde{p} \in K[T]$ durch $\tilde{p}(T) := p(T)$.

Zeige: In K gilt $\alpha^5 = 1$, und die vier Einheitswurzeln $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ sind genau die Nullstellen von \tilde{p} in K .

(*Hinweis:* p ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach Blatt 9, Aufgabe 2, also ist K ein Körper.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)