Algebra I | Prof. Dr. B. Siebert
Sommer 2010 | Dr. Michael Carl

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Klassifiziere alle fünf-elementigen Gruppen bis auf Isomorphie (über Gruppentafeln). Hinweis: Für ein Element a einer Gruppe betrachte die kleinste Zahl $n > 0$ mit $a^n = 1$ und prüfe, welche n auftreten können.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Zeige: Durch
$$\varphi : \mathbb{Z}/(mn) \to \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n, \quad a + mn\mathbb{Z} \mapsto (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$$
wird ein Gruppenhomomorphismus definiert.

b) Zeige, dass φ ein Isomorphismus ist, falls m und n teilerfremd sind. Hinweis: Wenn m und n teilerfremd sind, gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $mx + ny = 1$ (das darf als bekannt vorausgesetzt werden). Definiere damit ein Inverses von φ.

c) Zeige, dass φ kein Isomorphismus ist, wenn m und n nicht teilerfremd sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Liste alle möglichen Operationen von $\mathbb{Z}$ auf $\{\circ, \star\}$ auf.

b) Liste alle möglichen Operationen von $\mathbb{Z}/2$ auf $\{\circ, \star, ☾\}$ auf.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $E = [-1, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel. Zeige: Die Gruppe $\mathrm{Sym}(E) := \{g \in SO(3) \mid g.E = E\}$ der Drehungen, die E auf sich abbilden, ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4. Hinweise:

i) Zeige zuerst, dass die Eckenmenge $E^{[0]} := \{1, -1\}^3$ auf sich abgebildet wird.

ii) Zeige damit, dass $\mathrm{Sym}(E)$ die Menge der Raumdiagonalen $M := \{[-1, 1]v \mid v \in E^{[0]} \cap \{1\} \times \mathbb{R}^2\}$ permutiert und definiere so einen Gruppenhomomorphismus
$$h : \mathrm{Sym}(E) \to S_4.$$

iii) Zur Surjektivität von h: S_4 wird von Transpositionen erzeugt (das darf als bekannt vorausgesetzt werden). Man überlege sich, dass es demnach reicht zu zeigen, dass alle Transpositionen im Bild von h liegen.

iv) Zur Injektivität von h: Um noch $\ker h = \{\mathrm{id}\}$ zu zeigen, mag entweder die Bahnengleichung oder die Ecken-Gleichung $(1, 1, 1) = (-1, 1, 1) + (1, -1, 1) + (1, 1, -1)$ helfen.

(4 Punkte)