

Zur Maslovbedingung in der semiklassischen Mechanik

DIPLOMARBEIT
vorgelegt von
Michael Carl

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Mai 2004

Wissenschaftliche Betreuung:

PD Dr. Stefan Waldmann
Prof. Hartmann Römer

Einleitung

Das Korrespondenzprinzip besagt, dass sich jedes quantenmechanische System klassisch verhält, wenn die Planck-Konstante \hbar klein ist gegenüber den charakteristischen Wirkungen des Systems. Gegenstand der semiklassischen Mechanik ist es, dieses Prinzip zu präzisieren. Genauer behandelt die Semiklassik zwei Aspekte:

1. Wie entsteht die klassische Bewegung von Partikeln aus der quantenmechanischen Dynamik? Allgemeiner Kontext ist hier die Asymptotik von Lösungen partieller Differentialgleichungen mit kleinem Parameter \hbar ; dieser umfasst unter anderem auch die geometrische Optik als Kurzwellenlimit $\lambda \rightarrow 0$ der Wellenoptik.
2. Das Quantisierungsproblem: Was sind überhaupt die möglichen quantenmechanischen Pendanten klassischer Systeme?

Wir betrachten zunächst den 2. Aspekt, speziell die Quantisierung von Observablen:

Die Planck-Konstante ist als Kommutator der „Bausteine“ Ort und Impuls der Observablenalgebra ein Maß für deren Nichtkommutativität, das klassisch zu verschwinden hat. Man kann so den algebraischen Teil des Quantisierungsproblems extrahieren in Form der *Deformationsquantisierung*, die das kommutative Produkt glatter Funktionen auf dem Orts-Impulsraum (Phasenraum T^*Q) in sog. *Sternprodukte* deformiert, deren Kommutator in erster \hbar -Ordnung die Poissonklammer auf T^*Q reproduziert. Die letzte Bedingung garantiert dabei neben der gewünschten Nichtkommutativität, dass auch die Zeitenwicklung eine Deformation der klassischen ist. Diese Definition stammt von [BFF⁺77], und hat insbesondere zu einer ersten Klassifikation möglicher „Präquantisierungen“ geführt (s. [WX98] und dortige Referenzen). Das Konzept erlaubt aber auch verfeinerte Klassifikationen bei zusätzlichen Forderungen, die durch das klassische System vorgegeben sind, z. B. Symmetrien ([MBN04], [BHW00]) oder Anpassung an invariante Untermannigfaltigkeiten (Kapitel 4.2).

Wir können nun an den 1. Aspekt anknüpfen: Sternprodukte auf dem Phasenraum lassen sich als asymptotische Entwicklung von *Pseudodifferentialoperatoren* (den quantenmechanischen Observablen) wiedergewinnen. Im einfachsten Fall ist die von ihnen erzeugte Zeitentwicklung eine Einparametergruppe sog. *Fourierintegraloperatoren*, deren Kern (in zu präzisierendem Sinne) asymptotisch auf den zugehörigen klassischen Fluss konzentriert ist. Heuristisches Modell ist dabei das Feynmanintegral, ersetzt durch den Begriff der *oszillatorischen Distribution*:

Die einfachste oszillatorische Distribution ist eine einzelne WKB-Welle, d.h. ein Produkt aus einer rasch oszillierenden Phase $e^{iS/\hbar}$ und einer Potenzreihe in \hbar . Diese liefert als Lösungsansatz für die Eigenwertgleichung

die Bedingung, dass die Paare Ort und Wellenvektor $(q, dS(q))$ in der klassischen Energieflächen liegen sollen (Hamilton-Jakobi-Gleichung). Liegen sie sogar in kleineren invarianten Mengen, z.B. den KAM-Tori gestörter integrierbarer Systeme oder den (in)stabilen Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Fixpunkte, wird dieser Ansatz semiklassisch relevant: dann nämlich lässt sich die Eigenwertgleichung lokal asymptotisch lösen durch Integration längs der klassischen Bahnen.

Typischerweise besitzen diese invarianten Mengen jedoch *Kaustiken*, d.h. Umkehrpunkte, an denen die Wellenvektoren nicht mehr definiert sind. Kaustiken äußern sich in Form von Phasensprüngen, die durch eine charakteristische Klasse, die sog. *Maslovklasse*, beschrieben werden und erstmals von Gouy 1890 in Interferenzexperimenten beobachtet wurden. Ihre Überwindung im Rahmen des WKB-Ansatzes liefert das *Huygens-Prinzip*, d.h. die Superpositionen von WKB-Wellen, so dass deren Einhüllende außerhalb von Kaustiken die ursprüngliche Welle reproduziert. Die Phasen lassen sich dabei geometrisch als Holonomie in einem flachen Prinzipalbündel interpretieren, was Auswahlregeln für die Existenz globaler asymptotischer Lösungen schafft. Diese entsprechen in unteren Ordnungen der sog. *Maslovbedingung*, welche die ad hoc Quantisierungsregeln von Bohr und Sommerfeld präzisiert ([VuN]).

Im Allgemeinen gibt es keine invarianten Mengen obigen Typs; in diesem Fall betrachtet man stattdessen die Asymptotik von Spurfunktionalen. Prototyp ist hier *Gutzwillers Spurformel* ([DG75],[CdV]) welche die Zustandsdichte asymptotisch als Summe über klassische periodische Orbits darstellt. Der beiden Fällen zugrundeliegende asymptotische Kalkül oszillatorischer Distributionen stammt von Hörmander [Hör83], Maslov und Duistermaat [Dui76].

Die semiklassische Analyse von Spektren bzw. Spektralfunktionen hat kein Pendant in der Deformationsquantisierung. Die Maslovbedingung selbst ist jedoch einfacherer, topologischer Natur. So ist es ein Ziel dieser Arbeit, diese Bedingung im Rahmen der Deformationsquantisierung wiederzufinden.

Aufbau der Arbeit. Wir unterteilen die Semiklassik in 4 Kapitel:

1. *Klassischer Teil.* Nach einer „Aufwärmung“ in klassischer Mechanik in der Sprache der symplektischen Geometrie ([Arn89],[AN90],[AM85]) kommen wir zum zentralen Begriff der *Lagrangeimmersion* und ihren lokalen *Generierenden* nach Hörmander (s. z.B. [BW95]). Diese sind fundamental für die Semiklassik im folgenden Kapitel, doch interessiert uns hier zunächst nur ihre Anwendung auf die Mechanik und geometrische Optik, nämlich Arnolds lokale Klassifikation der Kaustiken als Konzentrationsmenge von Lichtstrahlen ([AGZV85]) und die Geometrisierung der Variationsprinzipien. Letztere gibt Anlass zu einem größeren, aber skizzenhaften Exkurs in die Topologie, genauer

den morsetheoretischen Beweis der Bott-Periodizität in der K -Theorie nach Bott, Shapiro und Milnor ([Mil69]). In der Tat definiert jede Lagrangeimmersion in den Phasenraum eine K^1 -Klasse k , welche die relative Lage zum Vertikalbündel angibt. Aus ihr leitet sich insbesondere die *Maslovklasse* ab, die die orientierten Schnitte mit der Vertikalen (und damit die erwähnten Phasensprünge an den Kaustiken) zählt; im Hinblick auf die semiklassische Anwendung stellen wir hier bekannte äquivalente Definitionen zusammen. Schließlich zitieren wir Lees Satz ([Lee79]), dass k über die globale Existenz einer Generierenden entscheidet, und erweitern ihn auf nicht-triviale affine Bündel. Motivation war hier zum einen eine Vermutung von Bordemann, man könne die Bahnen des harmonischen Oszillators durch Generierende auf einem S^1 -Bündel gewinnen. Zum anderen garantiert die Existenz die Quantisierbarkeit der Lagrangeimmersion im Sinne des Feynmanintegrals.

2. *Allgemeiner Aufbau der Semiklassik.* Ausgehend von dem Huygensprinzip, verallgemeinert in Form der *stationären Phase*, entwickeln wir die Grundlagen der Semiklassik (s. [BW95],[Mei90],[Röm94]) zurückgehend auf Hörmander, Maslov und Duistermaat. Dies umfasst im Einzelnen den Symbolkalkül von oszillatorischen Distributionen und Pseudodifferentialoperatoren und seine Anwendung zur asymptotischen Lösung von Differentialgleichungen wie einleitend skizziert. Insbesondere stellen wir die verwendeten Definitionen den ursprünglichen von Hörmander [Hör83] gegenüber, die (zum Preis konischer Strukturen) ohne semiklassischen Parameter λ arbeitet.
3. *Asymptotik von Spektren.* Mit Hilfe der semiklassischen Methoden aus dem vorigen Kapitel rechtfertigen wir nun die angekündigte Gutzwiller-Spurformel für „generische“ bzw. die Bohr-Sommerfeld-Bedingung für integrable Systeme, wobei wir Colin de Verdière [CdV] bzw. Vũ Ngọc [VuN] folgen. Insbesondere zeigt sich, dass die Bohr-Sommerfeld-Bedingung in physikalisch relevanten Systemen in unteren Ordnungen mit der aus dem Symbolkalkül stammenden Maslovbedingung übereinstimmt, welche hier die Integralität der Wirkungsvariablen relativ zu \hbar abzüglich Maslovindizes fordert und damit den ursprünglichen Quantisierungsvorschlägen am nächsten kommt. Die zugehörigen asymptotischen Eigenvektoren stellen wir ([CdV] folgend) in den Kontext der von Arnold eingeführten *Quasimoden*, deren Existenz stets einhergeht mit der semiklassischen Wahrscheinlichkeitsmaße auf T^*Q , die sich asymptotisch auf invariante Maße über invarianten Mengen konzentrieren.
4. *Deformationsquantisierung.* Ausgehend von einer kurzen Übersetzung topologischer in algebraische Begriffe ([GBVF01]) resümieren wir Standardresultate über Sternprodukte und ihre Darstellungen, insbesonde-

re die Klassifikation der Äquivalenzklassen von \star -Deformationen symplektischer Mannigfaltigkeiten und Fedosovs Konstruktion von Repräsentanten ([Wal99],[Bor]). Letztere wird geometrisch motiviert über das deformierte Frame-Bündel (nach [NT95]) und anschließend nach Waldmann, Bordemann und Neumaier ([Wal99],[Neu01]) auf beliebige Ordnungen verallgemeinert.

Dies benutzen wir in einem 2. Abschnitt zur Behandlung der Frage, wie sich die Maslovbedingung in der Deformationsquantisierung widerspiegelt. Hier stellt sich das Problem der Kaustiken erneut: Während sich (dank der Arbeiten von Waldmann und Bordemann) außerhalb von Kaustiken leicht ein algebraisches Analogon der Maslovbedingung finden lässt, verhindert der formal algebraische Rahmen eine Imitation der Konzepte zum globalen Symbolkalkül oszillatorischer Distributionen. Stattdessen betrachten wir Fedosovprodukte, die an eine klassisch gegebene Lagrangemannigfaltigkeit L angepasst sind, d.h. eine kanonische Darstellung auf L durch Quotientenbildung erlauben. Wir zeigen, dass sich die Maslovklassen aus den Fedosovzusammenhängen angepasster Produkte berechnen lassen, und schließen mit einem kurzen Ausblick zur möglichen Weiterführung der Suche nach Maslovs Quantisierungsbedingung.

Schließlich geben wir in Anhang A.1 eine relativ weitgefaste Zusammenstellung zu Prinzipal- und assoziierten Bündeln nach [Hus94],[KN63] und [Spi75], mit Betonung auf dem anschaulichen Begriff der Holonomie. Diese werden in allen Kapiteln verwendet; Anhang A.2 hingegen bildet lediglich eine kurze Zusammenfassung von [Wer95] zum C^* -Spektralkalkül für die letzten beiden Kapitel.

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrangemannigfaltigkeiten	7
1.1	Reduktion	8
1.2	Erste Anwendungen	9
1.2.1	Integrable Systeme	9
1.2.2	Impulsabbildungen	11
1.2.3	Standardbeispiele integrierbarer Systeme mit kompakten Niveauflächen	13
1.2.4	Periodische Orbits	14
1.3	Lagrangeimmersionen	16
1.3.1	Normalform einer Lagrange-Umgebung	16
1.3.2	Generierende Funktionen	18
1.3.3	Lokale Klassifikation stabiler Kaustiken	20
1.4	Anwendungen in der klassischen Mechanik	22
1.4.1	Generierende Funktionen kanonischer Relationen	22
1.4.2	Interpretation der Variationsprinzipien	23
1.4.3	Topologische Anwendungen des Morsetheorems	25
1.5	Die Maslovklasse	28
1.5.1	Der Maslovindex als spektraler Fluss	28
1.5.2	Die universelle Maslovklasse	29
1.5.3	Maslovklasse zweier Lagrangebündel	31
1.5.4	Die Maslovklasse als sekundäre charakteristische Klasse	32
1.6	Existenz globaler Generierender	33
2	Kurzwellenasymptotik	36
2.1	Oszillatorische Distributionen und Symbole	36
2.1.1	Das Prinzip von Huygens	36
2.1.2	Die geometrische Interpretation der stationären Phase	38
2.1.3	Symbolklassen von Hörmander	41
2.1.4	Symbolkalkül	42
2.2	Pseudodifferentialoperatoren	42
2.2.1	Symbolkalkül von Ψ DO	44
2.2.2	Vergleich mit Hörmanders Symbolkalkül	45
2.2.3	Mikrolokale Normalform eines Ψ DO	46
2.3	Semiklassische Differentialgleichungen	47
2.3.1	Eikonol- und Transportgleichung	47
2.3.2	Semiklassisches Cauchy-Problem	48
3	Semiklassische Spektren	50
3.1	Spurformeln	50
3.1.1	Spurformeln von Ψ DO	50
3.1.2	Asymptotik der Zustandsdichte	51
3.2	Quasimoden	53

3.2.1	Husimimaße	55
3.2.2	Quasimoden	56
3.3	Spektrum semiklassisch integrierbarer Systeme	56
4	Deformationsquantisierung	59
4.1	Grundlagen	59
4.1.1	Übersetzung topologischer in algebraische Begriffe. . .	59
4.1.2	Definition von Sternprodukten	61
4.1.3	Zeitentwicklung	62
4.1.4	Klassifikation von Sternprodukten	64
4.1.5	Darstellung	67
4.2	Das Problem der Kaustiken im formalen Rahmen	69
4.2.1	Maslovbedingung in Abwesenheit von Kaustiken . . .	70
4.2.2	L -angepasste Sternprodukte	72
4.2.3	Ausblick zur Maslovbedingung in der Deformations- quantisierung	75
A	Prinzipalbündel	76
A.1	Topologie von Prinzipalbündeln	76
A.1.1	Assoziierte Bündel und Reduktion	77
A.1.2	Schnitte assoziierter Bündel	77
A.1.3	Homotopieklassifikation von Prinzipalbündeln	78
A.2	Geometrie von Prinzipalbündeln	80
A.2.1	Äquivalente Definitionen eines Zusammenhangs	80
A.2.2	Algebraische Definition der kovarianten Ableitung . .	81
A.2.3	Berechnung charakteristischer Klassen	82
A.2.4	Paralleltransport	83
A.2.5	Krümmung als infinitesimale Holonomie	84
A.2.6	Flache Bündel und Reduktion	85
B	C^*-Algebren und Spektralkalkül	87
B.1	Darstellung kommutativer C^* -Algebren	87
B.2	Spektralkalkül	89
B.3	Darstellung nicht-kommutativer C^* -Algebren	91
	Literaturverzeichnis	93

1 Lagrangemannigfaltigkeiten

Motivation und grundlegende Begriffe Die klassische Mechanik beruht auf dem Modell der *Punktteilchen* in einem *Konfigurationsraum* Q , d.h. einer C^∞ -Mannigfaltigkeit, welche die möglichen Lagen der Punktteilchen unter holonomen Zwangsbedingungen¹ beschreibt. Ihre Bewegung wird dann charakterisiert durch eine Lagrange-funktion $L \in C^\infty(TQ)$ in Form der Euler-Lagrange - Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) \quad (1)$$

assoziiert zum Variationsprinzip $\delta \int L dt = 0$ (vgl. Lemma 10). Dabei definiert $\dot{q} \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$ eine Abbildung $T_q Q \rightarrow T_q^* Q$ der Geschwindigkeiten auf die *kanonischen Impulse*. Ist diese Abbildung diffeomorph, können wir ihren Graphen in $T_q Q \times T_q^* Q$ auch darstellen als²

$$\left\{ \left(\dot{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q, p), p \right) \right\}. \quad (2)$$

H ist dadurch für jedes $q \in Q$ eindeutig bestimmt bis auf eine Konstante und heißt *Legendretransformierte* von L , falls sie die Normierungsbedingung $H(q, p) + L(q, \dot{q}) = p \cdot \dot{q}$ erfüllt³. In Termen der Legendretransformierten schreibt sich dann (1) äquivalent als die *Hamiltongleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Diese bilden ein dynamisches System $\dot{z} = \mathcal{X}_H \circ z$ auf dem *Phasenraum* $Z := T^*Q$ zum Vektorfeld $\mathcal{X}_H := \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$, das wir als Gradient bezüglich der *symplektischen Form* $\omega = dq^i \wedge dp_i$ schreiben können: $\mathcal{X}_H = \omega^{-1} dH$. Der zugehörige lokale Fluss $\phi_t^{\mathcal{X}_H} : z(0) \mapsto z(t)$ heißt *Hamiltonsch*, wegen

$$\frac{d}{dt} H \circ \phi_t^{\mathcal{X}_H} = dH \cdot \mathcal{X}_H \circ \phi_t^{\mathcal{X}_H} = \omega(\mathcal{X}_H, \mathcal{X}_H) \circ \phi_t^{\mathcal{X}_H} = 0$$

lässt er H invariant. (Hatte L *Standardform* $L(q, \dot{q}) = g(\dot{q}, \dot{q}) - V(q)$ bezüglich einer Riemannschen Metrik g auf Q , so ist dies gerade der *Energieerhaltungssatz*). Weit fundamentaler hingegen ist folgende

Notiz 1 *Hamiltonsche Flüsse sind symplektisch, d.h. erhalten die symplektische Form $\phi_t^{\mathcal{X}_H^*} \omega = \omega$. (Genauer liefert ω^{-1} einen Isomorphismus von $H_{dR}^1(T^*Q)$ auf die symplektischen modulo Hamiltonschen Vektorfelder.)*

¹Zwangsbedingungen an Punktteilchen im affinen \mathbb{R}^n sind Einschränkungen an ihre Orte und Geschwindigkeiten in Form einer Distribution $D \subset T\mathbb{R}^n$, die holonom heißt, falls sie integrierbar ist.

²Das ist das erste Beispiel einer projizierbaren Lagrangemannigfaltigkeit (Abschnitt 1.3.1), woraus dann auch die Existenz von H folgt.

³Ist L streng konvex in den Geschwindigkeiten, so stimmt diese Definition mit der üblichen $H(q, p) := \max_{\dot{q} \in T_q Q} \{p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q})\}$ überein.

In der Tat ist ω geschlossen, sogar exakt $\omega = -d\theta$, wobei sich die *kanonische Form* $\theta = p_i dq^i$ (und damit ω) vermöge der Projektion $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ koordinatenunabhängig als

$$\theta = T^*\pi : T^*Q \rightarrow TT^*Q$$

schreiben lässt. Ein Vektorfeld X ist damit symplektisch genau dann, wenn $0 = L_X\omega \equiv d(i(X)\omega)$, insbesondere $i(\mathcal{X}_H)\omega \equiv dH$ exakt ist. \square

Notiz 1 gilt offenbar für jede Mannigfaltigkeit Z , auf der eine nicht-ausgarettete geschlossene 2-Form ω ausgezeichnet ist, (Z, ω) heißt dann *symplektisch*. Aus ihr folgen bereits zahlreiche Aussagen über das *Phasenraumportrait* Hamiltonscher Systeme, d.h. die Zerlegung von Z in Flusstrajektorien. Zum Beispiel sind Hamiltonsche Flüsse offenbar volumenerhaltend bezüglich des Liouvilleform $\frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n$ (*Satz von Liouville*), es gibt also insbesondere keine Attraktoren oder Repulsoren; andere Aussagen dieser Art liefert Abschnitt 1.2.4. Im Vordergrund dieses Kapitels stehen jedoch die *Lagrangemannigfaltigkeiten* als zentraler Begriff der symplektischen Geometrie, der insbesondere die Dynamik Hamiltonscher System „geometrisiert“ und so Grundlage der Semiklassik in den folgenden Kapiteln wird.

1.1 Reduktion

Seien $f_1, \dots, f_s \in C^\infty(Z)$ Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (Z, ω) und $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ ein regulärer Wert, so dass die Niveauläche $C := \{z \in Z \mid f_i(z) = \alpha_i \forall i\}$ eine Mannigfaltigkeit ist. Die Hamiltonschen Vektorfelder \mathcal{X}_{f_i} spannen gerade die ω -orthogonale Distribution $TC^\perp \subset T_C Z$ von TC auf, denn für jeden Schnitt $X \in \Gamma(TC)$ gilt $0 = L_X f_i = df_i \cdot X = \omega(\mathcal{X}_{f_i}, X)$. Folglich ist C genau dann *koisotrop* $TC^\perp \subset TC$, wenn die lokalen Flüsse der \mathcal{X}_{f_i} nicht aus C herausführen, oder infinitesimal: die *Poissonklammern* $\{f_i, f_j\} := L_{\mathcal{X}_{f_j}} f_i$ verschwinden. Da jede Untermannigfaltigkeit lokal Nullstellenmenge unabhängiger⁴ Funktionen ist, folgt:

Lemma 1 *Eine Untermannigfaltigkeit $C \subset Z$ ist genau dann koisotrop, wenn ihr Verschwindungsideal $\mathcal{I}_C := \{f \in C^\infty(Z) \mid f|_C = 0\}$ eine Poisson-Unteralgebra ist.* \square

Nun ist der symplektische Gradient \mathcal{X} gerade ein Lie-Homomorphismus der Poissonalgebra $(C^\infty(Z), -\{\cdot, \cdot\})$ in die Liealgebra symplektischer Vektorfelder. Daraus folgt, dass die \mathcal{X}_{f_j} auf C kommutieren, also:

Lemma 2 *Die ω -orthogonale Distribution TC^\perp koisotroper Mannigfaltigkeiten C ist integrabel, wobei die kommutierenden Hamiltonflüsse in z unabhängiger $f_i \in \mathcal{I}_C$ lokale Parametrisierungen $(t^1, \dots, t^s) \mapsto \phi_{t^1}^{\mathcal{X}_{f_1}} \dots \phi_{t^s}^{\mathcal{X}_{f_s}} z$ der Integralmannigfaltigkeit durch z liefern.* \square

⁴Funktionen heißen unabhängig in einem Punkt z , wenn ihre Differentiale in z linear unabhängig sind

C heißt nach [BW95] **reduzierbar**, falls der Quotient C/\sim (der Raum der Integralmannigfaltigkeiten) versehen mit der Quotiententopologie selbst wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Dann ist C/\sim symplektisch mit

$$\pi^* \omega_{red} = i_C^* \omega,$$

wobei $i_C : C \rightarrow Z$ die Inklusion und $\pi : C \rightarrow C/\sim$ die Projektion sei.

Ist L maximal koisotrope Mannigfaltigkeit, d.h. $TL^\perp = TL$, heißt L *Lagrang*. Zusammenhangskomponenten solcher Mannigfaltigkeiten reduzieren stets auf einen Punkt, interessanter ist folgendes Wohl-Verhalten:

Lemma 3 [BW95, Th. 5.12]. *Ist C reduzierbare koisotrope Mannigfaltigkeit und L Lagrangemannigfaltigkeit, die C cleanly⁵ schneidet, dann ist ihr Bild unter Reduktion eine immersierte Lagrangemannigfaltigkeit (d.h. Bild einer Immersion $i : \Sigma \rightarrow Z$ mit im $T_p i$ Lagrange in $T_{i(p)} Z$ für alle $p \in \Sigma$).*

In der Tat: Sei $p : L \cap C \rightarrow C/\sim$ die kanonische Projektion, dann ist $\ker T_z p = T_z C^\perp \cap T_z L = (T_z C + T_z L)^\perp$, also hat p dank „clean intersection“ konstanten Rang (den sog. *Überschuss* $e := \dim L + 2 \dim(L \cap C) - \dim(C)$). Somit ist $\ker p$ eine integrable Distribution und jede Faser $p^{-1}(z)$ besteht aus einer disjunkten Vereinigungen von Integralmannigfaltigkeiten gleicher Dimension e . Der Quotient nach diesen Mannigfaltigkeiten ist dank Reduzierbarkeit von C ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, die via p in C/\sim immersiert. Diese Immersion ist Lagrange, was man sich anhand des linearen Falls (repräsentativ für alle Tangentialräume) klarmacht: $L^C := L \cap C + C^\perp = (L + C^\perp) \cap C = L^{C^\perp}$ ist Lagrange-Unterraum in C mit Lagrangeschem Bild $L_C = L^C / C^\perp = L^{C^\perp} / C^\perp = L_C^\perp$. \square

1.2 Erste Anwendungen

1.2.1 Integrable Systeme

Ein Hamiltonsches System $\dot{z} = \mathcal{X}H_1 \circ z$ auf (Z, ω) heißt *integrabel*, wenn es $n := \frac{1}{2} \dim Z$ kommutierende, überall unabhängige „Erhaltungsgrößen“ $H_1, \dots, H_n \in C^\infty(Z)$ besitzt.

Nach Lemma 1 zerfasert dann Z in Lagrangemannigfaltigkeiten $L_\alpha := \{z \in Z \mid H_i(z) = \alpha_i\}$ über der Basis $\{\alpha\} \subset \mathbb{R}^n$ aus Erhaltungsgrößen, deren Hamiltonsche Flussparameter $t = (t^1, \dots, t^n)$ nach Lemma 2 die Fasern lokal parametrisieren. Genauer definiert $t \cdot z := \phi_{t^1}^{\mathcal{X}f_1} \dots \phi_{t^n}^{\mathcal{X}f_n} z$ dank Unabhängigkeit der H_i sogar eine \mathbb{R}^n -Aktion transitiv in den Fasern L_α , letztere besitzen damit eine *affine Struktur*. Lokal lassen sich dabei die Faserursprünge $z \in L_\alpha$ so wählen, dass die (t_i, α_j) *Darboux-Koordinaten* der Faserung sind, d.h. ω Standardform $\omega = \sum_i dt^i \wedge d\alpha_i$ hat: Per Konstruktion gilt für irgendeine Eichung $\omega = dt^i \wedge d\alpha_i + c^{ij} d\alpha_i \wedge d\alpha_j$, wobei die c^{ij} nicht von den Fasern

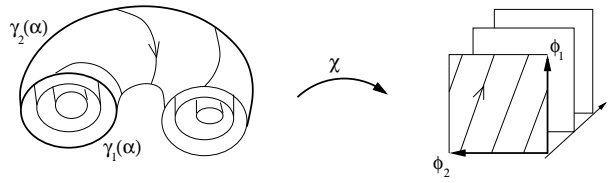
⁵d.h. in einer Mannigfaltigkeit, auf der $T_p L \cap T_p C = T_p(L \cap C)$ gilt.

abhängen. Aus $d\omega = 0$ folgt so lokal $c_{ij}d\alpha_i \wedge d\alpha_j = dF$ für eine (modulo Korand df eindeutige) 1-Form $F^i d\alpha_i$, also ist $t^i + F^i$ die gesuchte Eichung.

Sind die Fasern L_α kompakt, so muss die Isotropiegruppe $G(\alpha) := \{(t \in \mathbb{R}^n | t \cdot z = z, z \in L_\alpha)\}$ ein Gitter $G(\alpha) \cong \mathbb{Z}^n$ und damit die L_α zu Tori $T^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ diffeomorph sein [Arn89]. Ein in α differenzierbarer Basiswechsel von $dt_i|_{L_\alpha}$ auf eine Gitterbasis $d\phi_i \in G(\alpha)$ induziert dann eine symplektische Transformation der Fluss-angepassten auf Tori-angepasste Darbouxkoordinaten (ϕ^i, I_i) (*Winkel-Wirkungsvariable*). Ist Z der Phasenraum mit $\omega = -d\theta$, lassen sich die Wirkungsvariablen explizit über die kanonische Form θ ausdrücken: Ist $\chi(p, q) = (\phi, -I)$ die symplektische Transformation von Standard- auf (vertauschte) Winkel-Wirkungsvariablen, so ist $\chi_*\theta - \theta = \phi^i dI_i + p_i dq^i$ geschlossen, aber auch die Einschränkung $\theta|_{L_\alpha}$ wegen L_α Lagrange, und so folgt aus $2\pi = \int_0^{2\pi} d\phi = \partial_{I_j} \int_{\gamma_j} p_i dq^i$

$$I_j(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j(\alpha)} \theta \quad (4)$$

für geschlossene Kurven $\gamma_j(\alpha)$ in L_α , deren Homotopieklassen eine Basis von $\pi^1(L_\alpha) \cong \mathbb{Z}^n$ bilden.



Die Willkür bei der Wahl von Wirkungswinkelvariablen besteht in der Wahl dieser Basis und des Faserurprungs, offenbar ist aber in jedem Fall $\dot{\phi}_i = \partial_{I_i} H =: \omega_i(I)$, $\dot{I} = 0$, also die Bewegung linear mit von den Wahlen unabhängigen Umlauffrequenzen ω_i . Eine solche Bewegung heißt *quasiperiodisch*, typischerweise sind dabei die ω_i für fast alle Tori L_α rational unabhängig und damit jede Bahn dicht in L_α . Wir fassen zusammen:

Satz 1 *Ein integrables System $\{H_i\}$ mit kompakten Niveauflächen $\{H_i = \alpha_i\}$ ist symplektisch diffeomorph zu einem Bündel invarianter Tori, in denen die Bewegung quasiperiodisch ist. Die Basis der Erhaltungsgrößen $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}^n$ trägt dabei eine von \mathbb{R}^n unabhängige integral affine Struktur gegeben durch Wahlen möglicher Winkel-Wirkungs-Variablen. \square*

Bemerkung: Der Satz lässt sich leicht verallgemeinern auf Systeme mit $(2n - k) \geq n$ unabhängigen Erhaltungsgrößen, von denen aber einschließlich H nur k paarweise kommutieren. Letztere definieren dann wieder eine affine Struktur auf den invarianten k -dimensionalen Niveauflächen N_α . Kompakte Zusammenhangskomponenten von N_α sind also wieder Tori (mit niedrigerer Dimension k), in denen die Bewegung quasiperiodisch ist („Nicht-kommutative Integrabilität“, vgl. [AN90]).

Bevor wir Beispiele betrachten, definieren wir Impulsabbildungen.

1.2.2 Impulsabbildungen

Als Verallgemeinerung der \mathbb{R}^n -Aktion in integrablen Systemen betrachten wir irgendeine eigentliche lokale Aktion einer Liegruppe G mit infinitesimaler Aktion ${}_Z : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TZ)$, die bezüglich \mathcal{X} einen äquivarianten Lift $J \in C^\infty(Z) \otimes \mathfrak{g}^*$ besitzt, d.h. $\mathcal{X}J.\xi = \xi_Z$ und $J.Ad_g^*\xi = g \cdot J.\xi$ für alle $g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$ erfüllt.⁶ J heißt dann **Impulsabbildung**.

Beispiele Die wichtigsten Aktionen der Mechanik im Phasenraum $Z = T^*Q$ sind von speziellerer Natur, nämlich Kotangentiaallifts einer Aktion auf dem *Konfigurationsraum* Q . Dann ist $0 = L_{\xi_Z}\theta = di(\xi_Z) + i(\xi_Z)\omega$ und damit $J.\xi = \theta.\xi_Z$ kanonische Impulsabbildung, nämlich einfach das punktweise *Duale* $T_q^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ der infinitesimalen Aktion auf Q :

$$J(q, p).\xi = \theta.\xi_Z = p.\xi_Q(q) \quad (5)$$

Als ebenso einfaches wie fundamentales Beispiel betrachten wir $G = SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$, d.h. die Automorphismengruppe des affinen euklidischen \mathbb{R}^3 . Hier liefert der Hodge-Isomorphismus $\star : \wedge^2 \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{so}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$, die Impulsabbildung assoziiert zur Rotation $\exp(\xi)$ um die Achse $\star\xi$ ist gerade der Drehimpuls

$$(J.\xi)(q, p) = p.(\xi.q) = q \times p.(\star\xi),$$

und der Translation $q \rightarrow q + a$ entspricht der freie Impuls $J(q, p).a = p.a$.

Reduktion J ist invariant unter dem Hamiltonschen Fluss G -invarianter Funktionen $H \in C^\infty(Z)^G$, denn $0 = L_{\xi_Z}H = L_{\mathcal{X}J.\xi}H = -L_{\mathcal{X}H}J.\xi$, und die Fasern $J^{-1}(\mu)$ regulärer $\mu \in \mathfrak{g}^*$ sind ω -orthogonal zu den lokalen Orbits:

$$T_p(J^{-1}(\mu)) = \ker(dJ|_p : T_pZ \rightarrow \mathfrak{g}^*) = \text{im}(dJ|_p : \mathfrak{g} \rightarrow T_p^*Z)^0 = \mathfrak{g}_Z^\perp. \quad (6)$$

Lemma 4 [GS84, Th. 26.2] *Das Urbild koadjungierter Orbits $C_\mu := J^{-1}(G \cdot \mu)$ ist koisotrop mit den Orbits der koadjungierten Isotropiegruppe G_μ als Nullfaserung, falls J die koadjungierten Orbits cleanly schneidet.*

In der Tat, cleanly garantiert wieder, dass C_μ Mannigfaltigkeit ist mit $TC_\mu = dJ^{-1}.T(G \cdot \mu) = dJ^{-1}.(Ad_G^*\mu)$. Aus der Äquivarianz

$$dJ|_p.\xi_Z = \frac{d}{dt}\Big|_0 J(\exp t\xi \cdot p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp t\xi \cdot J|_p = ad_\xi^*J|_p \quad (7)$$

folgt weiter $TC_\mu = \mathfrak{g}_Z + \ker dJ$, wegen (6) ist damit C_μ koisotrop. Nun ist aber nach (7) $\ker dJ|_p$ gerade das Bild der Isotropiealgebra $\ker ad_{J(p)}^*$. \square

⁶Die Äquivarianzbedingung ist eine Obstruktion in $H^2(\mathfrak{g})$: Die durch $J.[\xi, \eta] - \{J.\xi, J.\eta\}$ definierte Klasse muss verschwinden, dann ist J eindeutig modulo 1-Korand $\mu : d\mu(\xi, \eta) = \mu.[\xi, \eta] = 0$ ist. Insbesondere ist für halbeinfache Liegruppen $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$, und das garantiert sogar auch die Existenz, vgl. [GS84].

Die koadjungierten Orbits $G \cdot \mu$ sind die symplektischen Blätter von \mathfrak{g}^* bezüglich der kanonischen *Poissonstrukturen*

$$\pm\{f, g\}(\mu) := \pm\mu \cdot [df, dg] = \mp d\mu(df, dg) \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

auf \mathfrak{g}^* (d.h. bilden die Integralmannigfaltigkeiten von $\mu \mapsto \text{im } d\mu$ mit induzierter symplektischer Form $(d\mu|_{G \cdot \mu})^{-1}$), denn $\ker d\mu = \ker ad_\mu^*$, folglich ist die Einbettung $i : G \cdot \mu \rightarrow \mathfrak{g}^*$ Impulsabbildung bezüglich der koadjungierten Aktion. Dann ist $J-i$ Impulsabbildung der diagonalen Aktion auf $Z \times G \cdot \mu^-$, und man kann die Reduktion bezüglich der 0-Niveaufäche

$$(J-i)^{-1}(0) = \{(p, \nu) \in Z \times G \cdot \mu \mid J(p) = i(\nu)\}$$

mit der *Marsden-Weinstein-Reduktion* $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ identifizieren (vgl. [GS84, S.192]).

Bemerkungen zu Verallgemeinerungen im Rahmen der Poissongeometrie⁷ J induziert ein *duales Paar*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ J_1=J \swarrow & & \searrow J_2=can \\ P_1 = \mathfrak{g}^* & & P_2 = Z/G \end{array}$$

d.h. beide Abbildungen J_i sind Poisson mit ω -orthogonalen Fasern nach (6). Die J_i lassen sich so symmetrisch als Impulsabbildungen einer infinitesimalen *Aktion von Liealgebroiden*⁷ T^*P_i auf Z auffassen: Die Poissonformen Π_i induzieren ja Ankerabbildungen $\sharp : T^*P_i \rightarrow TP_i$ und Lieklammern $[df, dg] := d\{f, g\}$ auf $\Gamma(T^*P)$ (dual zu $[\mathcal{X}f, \mathcal{X}g] = -\mathcal{X}\{f, g\}$). Die Aktionen $\Gamma\rho_i$ zu J_i sind dann definiert durch den Lift von \sharp bezüglich TJ_i :

$$\rho_i : J_i^*T^*P_i \rightarrow TZ : T_z J_i \rho(z) = \sharp_{J(z)}$$

Genau dann, wenn die J_i vollständig sind (d.h. mit $\mathcal{X}f$ auch $\mathcal{X}(J^*f)$ vollständig ist), lassen sich nach [CF] obige Aktionen zu Aktionen von Gruppoiden G_i

$$G_i \times_{J_i} Z := \{(g_i, z) \mid J_i(z) = s_i(g_i)\} \rightarrow Z$$

integrieren. Man nutzt dabei, dass $df \mapsto \mathcal{X}(J^*f)$ einen Isomorphismus $J^*T^*P \xrightarrow{\sim} J^{-1}(\mu)^\perp$ liefert und G_i , das man aus T^*P_i nach der Homotopiemethode von [DK00] gewinnt, ein Aktionsgruppoid isomorph zum Homotopiegruppoid von $J^{-1}(\mu)^\perp$ hat. Insbesondere ist $G_1 = T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ einfach das Aktions-Gruppoid der koadjungierten Aktion (d.h. $s(g, \mu) = \mu$, $t(g, \mu) = Ad_{g^{-1}}^* \mu$ und $(g, Ad_h^* \mu) \cdot (h\mu) = (gh, \mu)$). Mit Hilfe der Gruppoidaktionen lässt sich dann das Moritaprodukt $Z * Z' := \{(z, z') \mid J_2(z) = J_1'(z')\} / \{(z, z') \sim (zg, g^{-1}z')\}$ einführen, das die Isomorphieklassen vollständig dualer Paare zur Kategorie macht (s. [BW]). Während die physikalische Relevanz letzterer Konstruktion fraglich ist, erfasst doch dieser Begriff einer Impulsabbildung z.B. auch diskrete G -Aktionen. In diesem Sinne definieren etwa Ortega und Ratiu die *optimale Impulsabbildung* \mathcal{J} zu einer eigentlichen G -Aktion einfach als Quotientenbildung von Z nach der Faserung definiert durch die Hamiltonfelder G -invarianter Funktionen. Eine \mathcal{J} -Faser entspricht dann dem Schnitt einer J -Faser mit einer Untermannigfaltigkeit, deren Punkte identische Isotropiegruppe haben (*Homotopietyp*), und die Marsden-Weinstein-Reduktion bleibt gültig (siehe [OR]).

⁷s. [CdSW99] für die verwendeten Definitionen.

1.2.3 Standardbeispiele integrierbarer Systeme mit kompakten Niveauflächen

1. Das triviale Beispiel ist der (separierte) *harmonische Oszillator* $H = \sum_i H_i$, $H_i(q_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_i q_i^2$: Hier sind die Niveauflächen $H_i^{-1}(E_i)$ Ellipsen mit Flächeninhalt $2\pi I_i = 2\pi\omega_i E_i$, also sind die H_i bis auf die *Konstante* ω_i schon die Wirkungsvariablen $H_i = I_i\omega_i$. Die Bewegung ist also in allen Tori $L_E := \{z | H_i(z) = E_i\}$ (bis auf Homothetie) identisch und projiziert auf eine sog. *Lissajous-Figur* im Rechteck $\pi(L_E)$, die wieder genau im Fall rational unabhängiger ω_i dicht liegt.
2. *Punktteilchen* $Q = \mathbb{R}^3 \setminus 0$ im attraktiven Zentralpotential $V(|q|)$, $V' > 0$: Das System ist sogar nicht-kommutativ integrierbar dank Drehimpulserhaltung $\{H, J\} = 0$, wir können uns entsprechend auf den Phasenraum zu $J^\perp := \mathbb{R}^2$ (der Ebene senkrecht zu J) beschränken. Dort gilt $H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r)$ in Polarkoordinaten (r, ϕ) von J^\perp , und das System ist für $|J| > 0, H < V(\infty)$ integrierbar mit kompakten Niveauflächen. $J_3 := |J|, \phi$ sind dann bereits ein Winkel-Wirkungspaar; sei $\omega_1(J_3, E)$ die assoziierte Umlauffrequenz um das Zentrum. Die verbleibende Frequenz $\omega_2(J_3, E)$ muss dann Oszillationen des Radius um die Kreisbahn beschreiben, d.h. die auf J^\perp projizierte Bahn liegt in einem Kreisring $r_{\min}(E, J_3) \leq r \leq r_{\max}(E, J_3)$ (der Projektion des Torus) und füllt diesen im generischen Fall $\frac{\omega_1}{\omega_2}(J_3, E) \notin \mathbb{Q}$ dicht. Explizit berechnet man die r -Extrema aus der Bedingung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dr}{d\phi} = (\dot{r}\dot{\phi}^{-1})(r, J_3, E) = \frac{J_3}{mr^2} \sqrt{2m(E - V(r) - J_3^2/2mr^2)}$$

und damit die verbleibende Wirkungsvariable

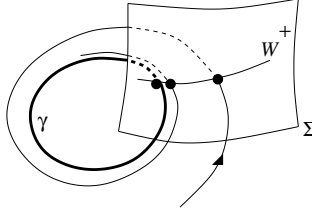
$$I_r(J_3, E) = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}(J_3, E)}^{r_{\max}(J_3, E)} p_r(J_3, E) dr.$$

Man kann zeigen, dass genau in den Fällen $V(r) \propto r^2$ und $V(r) \propto r^{-1}$ (harmonisches Zentralpotential und Keplerproblem) alle Bahnen geschlossen sind; hier ist sogar $\frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv 1$, d.h. die projizierten Bahnen sind Ellipsen. Das beruht auf der größeren Invarianzgruppe $SU(3)$ bzw. $SO(4)$, vgl. [Thi88].

3. *Symmetrischer Kreisel* $Q = SO(3)$ im homogenen Schwerfeld g : Hier sind H, J_3, J_a kommutierende Observablen, wobei J_3, J_a die Drehimpulse assoziiert zur Rotation um g bzw. die Kreiselachse bezeichnen. Letztere sind bereits wieder Wirkungsvariablen, und die assoziierten Frequenzen sind Präzessions- und Spinfrequenz. Die verbleibende Frequenz muss folglich Oszillationen der Winkels zwischen g und der Kreiselachse (Nutation) beschreiben.

1.2.4 Periodische Orbits

Wir betrachten ein Hamiltonsches System $\dot{z} = \mathcal{X}_H \circ z$ mit einer T -periodischen Lösung γ . Das qualitative Verhalten benachbarter Bahnen lässt sich dann beschreiben anhand ihrer sukzessiven Durchstoßpunkte mit einer zu γ transversalen Mannigfaltigkeit Σ (*Poincaréschnitt*), man erhält so ein diskretes dynamisches System $z_{n+1} = Pz_n$ mit $p := \gamma \cap \Sigma$ als Fixpunkt.



Bahnen, die sich für $t \rightarrow \pm\infty$ an γ anschmiegen, entsprechen im diskreten System den *(in)stabilen Mannigfaltigkeiten*

$$W^\pm := \{z \in \Sigma \mid \lim_{n \rightarrow \pm\infty} P^n z = p\}.$$

Deren Existenz wird nach dem stabilen Mannigfaltigkeitstheorem [Wig03] schon dadurch gesichert, dass die Linearisierung P' Eigenwerte vom Betrag $\neq 1$ hat: dann ist W^+ bzw. W^- tangential an den Eigenräumen zu Eigenwerten < 1 bzw. > 1 . Diese Situation ist sogar stabil gegenüber kleinen Störungen von P , d.h. Bifurkationen innerhalb des reduzierten Systems können nur bei Eigenwerten vom Betrag 1 auftreten. Diese Aussagen gelten für jedes dynamische System, das Spezifische Hamiltonscher Systeme beruht auf der Struktur symplektischer Matrizen:

In der Tat können wir uns hier stets auf die Energiefläche $H^{-1}(E)$ beschränken und so das Differential $P'_E := T_p(P|_{H^{-1}(E)})$ am P -Fixpunkt p mit dem Bild der *Monodromiematrix* $\Pi' := T_p\phi_T^{\mathcal{X}_H}(p)$ unter der symplektischen Reduktion von $T_p H^{-1}(E)$ identifizieren. Somit ist P'_E symplektisch und eindeutig bis auf Konjugation mit einem $T_p\phi_t^{\mathcal{X}_H}$. Nun gilt:

Lemma 5 *Eine symplektischen Matrix $\Phi \in Sp(V)$ induziert eine Zerlegung von V in ω -orthogonale 2- bzw. 4-dimensionale symplektische Unterräume assoziiert*

- zum Eigenwert $\mu \in \{\pm 1\}$,
- zum Eigenwertpaar μ, μ^{-1} falls entweder $|\mu| = 1$ oder $\mu \in \mathbb{R}$,
- zum Eigenwert-Quadrupel $\mu, \bar{\mu}, \mu^{-1}, \bar{\mu}^{-1}$ sonst.

Zwei Haupträume zu Eigenwerten μ, λ sind dabei ω -orthogonal, falls $\mu\lambda \neq 1$.

In der Tat: Es ist $\Phi^T W \Phi = W$ bezüglich der Matrixdarstellung von ω , also Φ dank Regularität von W konjugiert zu Φ^{-1T} und damit Φ^{-1} . Insbesondere folgt $\det^2 \Phi = 1$, also $\det \Phi = 1$, da Φ orientierungserhaltend $\Phi^* \omega^n = \omega^n$ ist. Weil schließlich $\dim V$ gerade ist, müssen ± 1 gerade Multiplizität haben. Die ω -Orthogonalität folgt schließlich (iterativ) aus $\omega(v, w) = \omega(\Phi v, \Phi w) = \mu \lambda \omega(v, w)$, falls $\Phi v = \mu v, \Phi w = \lambda w$. \square

Daraus folgt etwa, dass die (in)stabilen Mannigfaltigkeiten W^\pm in p isotrop von gleicher Dimension sind. Wichtiger ist, dass bei kleinen *symplektischen* Störungen von P_E Eigenwerte einfacher Multiplizität (also insbesondere $\neq \pm 1$) vom Betrag 1 den Einheitskreis nicht verlassen können, nur „Kollisionen“ erlauben ja die Bildung eines reellen Paares oder eines Quadrupels. In diesem Fall ist also das reduzierte System stabil gegenüber solchen Störungen. Wir betrachten nun diese Bedingungen in Bezug auf das linearisierte Gesamtsystem. Das System heißt *nicht-entartet* in der Nähe von γ , falls $\ker(\Pi' - 1) = \mathbb{R}\mathcal{X}_H$ bzw. *isoenergetisch nicht-entartet*, falls für alle E Eins nicht P'_E -Eigenvektor ist.

Lemma 6 [CdV] *Aus Nicht-Entartung und $\frac{dE}{dT} \neq 0$ folgt isoenergetische Nicht-Entartung. Aus letzterer und $\frac{dT}{dE} \neq 0$ folgt umgekehrt Nicht-Entartung, dann ist Π' von der Form*

$$\Pi' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{dT}{dE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P'_E \end{pmatrix}$$

Beweis des 2. Teils: Aus isoenergetischer Nicht-Entartung folgt, dass P'_E differenzierbar von E abhängt und so die P_E -Fixpunkte eine C^∞ -Kurve $z(E)$ bilden. Deren Orbit $W := \{\phi_t^{\mathcal{X}_H} z(E)\}$ ist symplektisch und invariant, also $\Pi'(z'(E)) = z'(E) + a\dot{\gamma} \in T_p W$, $a = -\frac{dT}{dE}$, und wir identifizieren $T_p W^\perp$ mit dem Tangentialraum eines Poincaréschnitts.

Beweis des 1. Teils: Aus Nicht-Entartung und der Form des Jordanblocks zum Eigenwert 1 folgt, dass es eine Hyperebene E transversal zu $\dot{\gamma}$ und ein $Y \in E$ gibt, so dass $\Pi'(Y) = \dot{\gamma} + Y$. $\frac{dE}{dT} \neq 0$ bedeutet nun, dass Y nicht tangential zur Energiefläche ist, man sich also in der Situation von Teil 1 befindet. \square

Der Fall integrierbarer Systeme In integrierbaren Systemen ist Π charakterisiert durch die Abbildung der Wirkungsvariablen I_i auf die Frequenzen $\omega_i(I)$ der von ihnen erzeugten Torusumläufe; analog ist P_E charakterisiert durch die Abbildung der I mit $H(I) = E$ auf die *Frequenzverhältnisse* $[\omega_1 : \dots : \omega_n](I) \in P\mathbb{R}^n$ der Bahnen im Torus zu I . Diese Abbildungen sind nicht an periodische Bahnen gebunden, und als Analogon der Nicht-Entartungsbedingungen erhält man die Forderung nach lokaler Diffeomorphie. Das sind in der Tat gerade die Bedingungen des *KAM-Theorems*, das

die Stabilität der hinreichend nicht-resonanten Tori

$$\{I \mid \exists k \in \mathbb{Z} - 0 : |\langle k, \omega(I) \rangle| > C/|k|^s\}, \quad s > n - 1$$

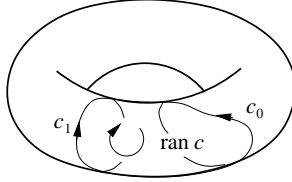
unter kleinen Hamiltonschen Störungen garantiert; vgl. [Arn89], App. 8. Im zweidimensionalen resonanten Fall hingegen führt die Störung auf transversale Schnitte der W^\pm in eine invariante Menge vom Cantortyp (Chaos), und die W^\pm bilden die berühmten selbstähnlichen *Smale Hufoisen*, deren Struktur man sich bildlich klar machen kann, vgl. [AS85], Kap. 5, und [Wig03].

1.3 Lagrangeimmersionen

1.3.1 Normalform einer Lagrange-Umgebung

Homotope Zykel $c_0, c_1 : S^n \rightarrow Z$ sind homolog, sie unterscheiden sich ja gerade um den koorientierten Rand der von der Homotopie $c : [0, 1] \times S^n \rightarrow Z$ überstrichenen Fläche $\text{ran } c$:

$$c_1 - c_0 = \partial \text{ran } c.$$



Dual sind zwei de-Rham-Kozykel $f_0^* \alpha, f_1^* \alpha$ zu einer C^∞ -Homotopie $f : [0, 1] \times Z \rightarrow Z$ kohomolog. Der Bildung der Fläche entspricht nun die Bildung des *Homotopieoperators* $P^f(\alpha) := \int_0^1 f_t^* i(\dot{f}) \alpha dt$, den die Kozykel koberanden:

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = dP^f(\alpha). \quad (8)$$

In der Tat,

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_t^* \alpha dt = \int_0^1 f_t^* (L_{\dot{f}} \alpha) dt = \int f_t^* di(\dot{f}) \alpha dt = dP^f(\alpha).$$

Diese Gleichung zeigt umgekehrt, dass wir zu zwei kohomologen Kozykeln $\alpha_1 - \alpha_0 = dP$ stets eine überführende Homotopie f finden (*Moser's Trick*): Setze $\alpha_t := t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$ und $f_t^* \alpha_t = \alpha_0$, dann ist f offenbar der Fluss des Vektorfeldes \dot{f} bestimmt durch $P = -i(\dot{f})\alpha_t$.

Insbesondere sind zwei de-Rham-Kozykel α_0, α_1 , die auf einer Untermannigfaltigkeit $N \subset Z$ übereinstimmen, kohomolog auf einer Tubenumgebung T von N (**relatives Poincaré-Lemma**): Die Kontraktion k von T auf N (gegeben durch die lineare Kontraktion des Normalenbündels $T_N Z / TN$ auf seinen Nullschnitt) liefert ja nach (8) eine Stammfunktion $P^k(\alpha_1 - \alpha_0)$ von

$(\alpha_1 - \alpha_0)|_T$, die sogar auf N verschwindet. Nach Mosers Trick sind damit die beiden Kozykel durch eine auf N konstante Homotopie verbunden. Insbesondere folgt:

Lemma 7 (Darboux-Weinstein) [BW95, C. 4.22] Sind ω_0, ω_1 zwei symplektische Strukturen auf Z , die auf $T_N Z$ einer Untermannigfaltigkeit N übereinstimmen, dann gibt es einen Diffeomorphismus ϕ einer N -Umgebung, der sie ineinander überführt $\phi^* \omega_1 = \omega_0$. \square

Kompatible fast komplexe Strukturen Sei (E, ω) ein symplektisches Vektorraumbündel. Eine *kompatible fast komplexe Struktur* auf E ist ein Schnitt seines Frame-Bündels $Gl(E)$ mit $J^2 = -id$, so dass $g_J(X, Y) := \omega(X, JY)$ eine Riemannmetrik ist.

Lemma 8 Sei E symplektisches Vektorraumbündel mit Lagrangeschem Unterbündel l . Dann liefert $J \mapsto Jl$ eine Bijektion zwischen dem Raum der kompatiblen fast komplexen Strukturen und der zu l transversalen Lagrangebündel.

In der Tat, J ist stets symplektisch, da $\omega(JX, JY) = g(JX, Y) = g(Y, JX) = \omega(X, Y)$, damit ist $l \oplus Jl$ eine g_J -orthogonale Zerlegung von E in Lagrangebündel $E = Jl \oplus l$. Zu jeder Lagrangezerlegung $l \oplus l'$ von E erhalten wir ein solches J' mit $J'l = l'$: Wähle einen symplektischen Bündelautomorphismus b , der l in sich und l' in Jl überführt und setze $J' = b^{-1}Jb$. \square

Jede Metrik g projiziert auf eine kompatible fast komplexe Struktur J über die Polarzerlegung $A = J\sqrt{A^t A}$ von $A : g(X, Y) = \omega(X, AY)$. Da der Raum der Riemannmetriken konvex ist, folgt:

Notiz 2 Der Raum der kompatiblen fast komplexen Strukturen bzw. Lagrangeschen Komplemente ist zusammenziehbar. \square

Aus Lemma 7 und 8 erhalten wir nun die gewünschte Normalform:

Satz 2 (Weinstein) [BW95, Th. 4.19] Sei $i : L \rightarrow Z$ Lagrangeimmersion und $l \subset i^*TZ$ ein zu $TL \subset i^*TZ$ transversales Lagrangebündel über L . Dann lässt sich i zu einer symplektischen Immersion einer L -Umgebung in T^*L auf eine $i(L)$ -Umgebung in Z erweitern, welche die Vertikale $V_L := \ker T_L(\pi_L : T^*L \rightarrow L)$ auf l abbildet. \square

Genügend kleine Umgebungen einer Lagrangemannigfaltigkeit L sehen also stets aus wie der Phasenraum T^*L zu L . Im Phasenraum gibt es folgende Prototypen von Lagrangemannigfaltigkeiten:

1. *Konormalbündel*, definiert als Annihilator des Tangentialraums einer Q -Untermannigfaltigkeit N in T_N^*Q , etwa die Fasern $\pi^{-1}(q)$ über $N = \{q\}$ (das sieht man anhand lokaler Darbouxkoordinaten).

2. *projizierbare Lagrangemannigfaltigkeiten*, gegeben durch die Bilder geschlossener 1-Formen η auf Q : In der Tat, im η projiziert unter π diffeomorph auf Q und ist wegen

$$\eta^*\theta = \eta^*T^*\pi = T^*\eta \circ T^*\pi \circ \eta = T^*(\pi \circ \eta) \circ \eta = T^*id \circ \eta = \eta \quad (9)$$

genau dann Lagrangesch $\eta^*\omega_Q = 0$, wenn η geschlossen ist; umgekehrt ist eine projizierbare Lagrangeimmersionen $i_L = \pi|_L^{-1} : Q \rightarrow L$ das Bild der geschlossenen 1-Form

$$\eta := i_L^*\theta. \quad (10)$$

Jede 1-Form $X^\sharp \in \Omega^1(L)$ liefert via ω^{-1} einen Schnitt des Normalenbündels $T_L Z/TL$, denn TL ist ja gerade der Dualisierungs-Kern $TL^\perp = \ker(\omega : TL \rightarrow T_L^*Z)$. Ein normaler Schnitt ist aber per Definition gerade eine infinitesimale Variation von L , d.h. Geschwindigkeit X eines Deformationskeims L_t von $L = L_0$. Sei expliziter $L_t = \{p_i^t = 0\}$ lokal als Nullstellenmenge kommutierender, unabhängiger Funktionen p_i^t gegeben. Erweitern wir die p_i^0 zu einer symplektischen Karte von Z , so bilden die $\mathcal{X}p_i^0$ eine Basis der tangentialen Schnitte $\Gamma(TL)$ und die $\frac{\partial}{\partial p_i^0}$ eine Basis der normalen Schnitte $\Gamma(T_L Z/TL)$; dann ist $X = \dot{p}_i|_0 \frac{\partial}{\partial p_i^0}$ und

$$X^\sharp \cdot \mathcal{X}p_i^0 = \omega(X, \mathcal{X}p_i^0) = dp_i^0 \cdot X = -\dot{p}_i|_0. \quad (11)$$

Nach 2. ist der Deformationskeim L_t genau dann Lagrange, wenn X^\sharp geschlossen ist, also:

Notiz 3 *Die geschlossenen 1-Formen auf L bilden den Tangentialraum der „Mannigfaltigkeit von Lagrangemannigfaltigkeiten in Z “ im Punkt L .* \square

1.3.2 Generierende Funktionen

Wir wollen nun nicht-projizierbare Lagrangemannigfaltigkeiten in T^*Q aus projizierbaren durch Reduktion gewinnen.

Sei dazu $B \xrightarrow{\rho} Q$ eine Submersion und $C := \ker(TB \rightarrow \rho^*TQ)^0$ Annilator der Vertikale. C ist koisotrop und wir identifizieren T^*Q mit der Reduktion bezüglich C . Ist nun $L := \text{im } \eta \subset T^*B$ eine projizierbare Lagrangemannigfaltigkeit transversal zu C , dann ist nach Lemma 3 die Komposition

$$i_\eta : \Sigma_\eta := \pi_B(L \cap C) \xrightarrow{\eta} L \cap C \subset \rho^*T^*Q \longrightarrow T^*Q \quad (12)$$

eine Lagrangeimmersion, und η heißt ihre *Generierende*. Das sieht man auch ohne Lemma 3, in der Tat ist hier ja einfach $T_p L \cap T_p C^\perp = (T_p L + T_p C)^\perp = 0$. Insbesondere ist also der Schnitt von L mit einer Nullfaser von C diskret, wobei Mehrfachschnitte gerade Doppelpunkten $i_\eta(p_j) = i_\eta(p_k), p_j \neq p_k$ der Immersion entsprechen (vgl. Beispiel).

Die Beziehung (9) projiziert nun in Verallgemeinerung von (10) auf

$$\eta|_{\Sigma} = \eta|_{\Sigma}^* \theta_B = i_{\eta}^* \theta_Q. \quad (13)$$

Ist insbesondere $\eta = d\phi$ exakt, so heißt ϕ **generierende Funktion** oder **Morsefamilie** von $i_{\phi} := i_{d\phi}$. In ρ -angepassten Koordinaten $\rho(q, \xi) = q$ ist $C = \{(q, \xi, dq, 0)\}$, $\Sigma_{\phi} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(q, \xi) = 0 \right\}$ und

$$L_{\phi} := \text{im } i_{\phi} = \left\{ \left(q, \frac{\partial \phi}{\partial q}(q, \xi) \right) \middle| \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(q, \xi) = 0 \right\} \quad (14)$$

Dabei ist $\text{im } d\phi$ genau dann transversal zu C , wenn $\nabla \partial_{\xi} \phi|_{\Sigma_{\phi}}$ nicht singularär ist. Bemerke, dass letzter Ausdruck ebenso wie die Faserableitung $\partial_{\xi} \phi$ koordinatenunabhängig (und insbesondere auch für nicht-exakte Generierende) definiert sind, nämlich $\partial_{\xi} \phi = i^* \circ d\phi$ bezüglich des Duals i^* der Inklusion $i : C^0 \rightarrow TB$ und $\nabla \partial_{\xi} \phi = \text{pr}_0 T \partial_{\xi} \phi|_{\Sigma}$ in der kanonischen Identifikation pr_0 von Nullschnitten mit der Basis. Anhand der exakten Sequenz von Vektorraumbündeln über Σ_{ϕ}

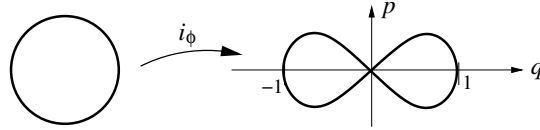
$$T\Sigma_{\phi} \hookrightarrow T_{\Sigma_{\phi}} B \xrightarrow{\nabla d_{\xi} \phi} C^{0*}$$

sehen wir außerdem, dass die Entartung $\ker \partial_{\xi}^2 \phi(s)$ der ϕ -Singularität bei $s \in \Sigma_{\phi}$ der Entartung k der Projektion $\pi_Q \circ i_{\phi}$ entspricht:

$$k := \dim \ker T_s(\pi_Q \circ i_{\phi}) = \dim \ker \partial_{\xi}^2 \phi(s) \quad \forall s \in \Sigma_{\phi}. \quad (15)$$

Das Bild der Menge, auf der $\pi_Q \circ i_{\phi}$ k -fach entartet ist, heißt k -fache **Kaustik**. Ist k gleich der Faserdimension $\dim \ker T\rho$, heißt ϕ **reduziert**.

Beispiel: $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (q, \xi) \mapsto q^2 \xi + \frac{1}{3} \xi^3 - \xi$ generiert die Lagrangeimmersion von $\{q^2 + \xi^2 - 1 = 0\} = S^1$ als $L_{\phi} = \{(q, 2q\xi) | q^2 + \xi^2 - 1 = 0\} = \{\cos \varphi, \sin(2\varphi)\}$ mit Kaustik $\{\pm 1\}$:



Existenz und lokale Äquivalenz Sei $i : L \rightarrow T^*Q$ Lagrange-Immersion und $l \subset i^* T^*Q$ Lagrangebündel über L transversal zu TL und der T^*Q -Vertikale $i^* \ker T\pi_Q$. Nach dem Satz von Weinstein 2 erweitere i zu einer symplektischen Immersion f zwischen einer Umgebung des Nullschnitts in T^*L und einer L -Umgebung in $i^* T^*Q$, welche die T^*L -Vertikale $\ker T\pi_L$ auf l abbildet. Dank dessen Projizierbarkeit ist dann $\eta := f^* \theta_Q - \theta_L$ Generierende von i bezüglich der Faserung $\rho = f \circ \pi_Q$.

In der Tat, wegen $T_{z,0}T^*L \xrightarrow{Tf} l_z \xrightarrow{T_z\pi} T_{\pi(z)}Q$ ist ρ in einer geeigneten Umgebung eine Submersion, und wegen $f^*\theta_Q|_{\rho^{-1}(q)} = \theta_Q|_{\pi^{-1}(q)} = 0$ ist $\Sigma = \{\theta_L = 0\} = L$ und damit $\eta|_L = f^*\theta_Q|_L = i$. Ist nun $\theta_Q|_L$ exakt, so hat wegen $\theta_L|_L = 0$ der Zykel nach dem relativen Poincaré-Lemma in einer L -Umgebung sogar eine Stammfunktion ϕ . Wir fassen zusammen:

Satz 3 [BW95, Th. 4.25]. *Gibt es ein Lagrangebündel transversal zu i^*T^*Q und der Vertikale $i^*\ker T\pi_Q$, dann gibt es eine Generierende von i . Verschwindet außerdem die Liouvilleklasse $[i^*\theta_Q] = 0$, dann gibt es eine generierende Funktion ϕ von L . Insbesondere ist jede Lagrangemannigfaltigkeit lokal durch eine generierende Funktion gegeben.* \square

Sei nun $B = Q \times \mathbb{R}^s$. L_ϕ ist offenbar invariant unter folgenden Operationen auf ihrer generierenden Funktion $\phi \in C^\infty(B)$:

1. Eichtransformationen in den B -Fasern $\phi'(q, \xi) := \phi(q, g(q, \xi))$ (Eich-äquivalenz), dann ist $\Sigma' = g(\Sigma)$ und $i'_\phi = (1_Q \times g)_*i_\phi$.
2. Addition von Konstanten $\phi'(q, \xi) := \phi(q, \xi) + c$ (+-Äquivalenz)
3. direkte Addition von regulären Quadratformen Q auf \mathbb{R}^d : $\phi'(q, \xi, \xi') := \phi(q, \xi) + Q(\xi')$ (stabile Äquivalenz), dann ist $\Sigma' = \Sigma \times \{0\} \subset Q \times \mathbb{R}^{s+d}$.

Satz 4 (Hörmander) *Obige Operationen liefern lokal alle generierenden Funktionen, d.h. zwei Funktionen, die lokal die gleiche Lagrangemannigfaltigkeit generieren, sind lokal stabil eich₊-äquivalent.*

Beweis. Zunächst zeigt folgendes Lemma, dass lokal jede generierende Funktion stabil eichäquivalent zu einer *reduzierten* ist:

Lemma 9 (Morse) *Eine Funktion $f \in C^\infty(Q \times \mathbb{R}^s)$, die im Nullschnitt $Q \times \{0\}$ nicht-entartet kritisch längs der Fasern ist, ist in einer Umgebung von $Q \times \{0\}$ eichäquivalent zur direkten Summe der Einschränkung von f auf $Q \times \{0\}$ und einer regulären Quadratform Q' auf \mathbb{R}^s .*

Beweis nach [BW95] S. 51, oder [AGZV85]: Sicher gibt es Faserkoordinaten derart, dass die Taylorentwicklung von f längs der Fasern *modulo* $a \in o(|\xi|^2)$ die gewünschte Form $f(q, \xi) = f(q, 0) + Q'(\xi) + a(q, \xi)$ hat. Eliminiere nun die Differenz a durch eine Homotopie von auf $Q \times 0$ trivialen Eichtransformationen h_t , so dass $h_{t*}f = f - (1-t)a =: f_t$: Aus $\frac{d}{dt}(f_t \circ h_t) = 0$ folgt die äquivalente Differentialgleichung $X_t f_t = -a$, $X_t := \frac{d}{dt}h_t$. Deren Lösung h_t besteht in der Tat aus solchen Eichtransformation, weil a im Ideal

$$\left\{ a_t^{ij} \frac{\partial f_t}{\partial \xi^i} \frac{\partial f_t}{\partial \xi^j} \mid a_t^{ij} \in \mathcal{I}_{Q \times \{0\}} \right\},$$

also X in $\left\{ -a_t^{ij} \frac{\partial f_t}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \mid a_t^{ij} \in \mathcal{I}_{Q \times \{0\}} \right\}$ liegt. \square

Es bleibt also zu zeigen, dass zwei reduzierte L -generierende Funktionen $\phi \in C^\infty(B_\phi)$ und $\psi \in C^\infty(B_\psi)$ $+$ -eichäquivalent sind. Sicher gibt es einen Diffeomorphismus $g : \Sigma_\phi \rightarrow \Sigma_\psi$, so dass $i_\phi = i_\psi \circ g$ und $\phi|_{\Sigma_\phi} = \psi \circ g$ modulo Konstante, die wir o. E. als 0 annehmen. Dann lässt sich die Differenz $\phi - \psi \circ \hat{g} \in \mathcal{I}_{\partial_\xi \phi}^2$ zu einer g -Fortsetzung \hat{g} auf Σ_ϕ, Σ_ψ -Umgebungen genau wie im Morselemma durch Deformation beseitigen (s. [BW95], S. 53 für Details). \square

1.3.3 Lokale Klassifikation stabiler Kaustiken

Kaustiken von Lichtstrahlen (Fermatgeodäten), emittiert von einer Fläche im \mathbb{R}^3 , erscheinen an Wänden als helle Bilder, die - u.U. nach beliebig kleinen Deformationen der Fläche - in *stabile* Standardtypen zerlegbar sind. Wir wollen kurz deren lokale Klassifikation gemäß[AGZV85] skizzieren.

Zwei Lagrange-Projektionen $\pi|_L, \pi|_{L'}$ seien *äquivalent*, wenn sie durch T^*Q -Automorphismen, d.h. Punkttransformationen $T^*\varphi$ und symplektische Fasertranslationen $(q, p) \mapsto (q, p + \alpha(q)), d\alpha = 0$, ineinander überführt werden können. Sei nun $\phi(q, \xi)$ ein lokal L generierender Funktionskeim bei $(0, 0)$ bezüglich einer trivialisierenden Bündelkarte. In Verallgemeinerung der Eichtransformationen bewirkt dann ein Bündelautomorphismus $b(q, \xi) = (\varphi(q), g(q, \xi))$ die Punkttransformation $T^*\varphi : L_\phi \rightarrow L_{\phi \circ b}$, ebenso verallgemeinert sich die Addition von Konstanten zur Fasertranslation durch Addition von Funktionen auf Q , und der Satz von Hörmander erweitert sich entsprechend: Zwei generierende Keime erzeugen genau dann äquivalente Lagrangeprojektionen, wenn sie äquivalent unter den erweiterten Operationen sind. Eine Lagrangemannigfaltigkeit heißt *stabil*, wenn ihre Projektion eine Umgebung aus äquivalenten Lagrange-Projektionen besitzt. Es folgt, dass L_ϕ genau dann stabil ist, wenn jeder Deformationskeim von ϕ erweitert äquivalent zu ϕ ist – oder in anderen Worten – $q \mapsto \phi(q, \cdot)$ *stabil R_+ -versale Deformation* von $\phi_0 : \xi \mapsto \phi(0, \xi)$ ist: q wird dabei interpretiert als Deformations-Parameter und ein Bündelautomorphismus $b(q, \xi) = (\varphi(q), g(q, \xi))$ als Übergang zu einer sogenannten induzierten R -äquivalenten Deformation, d.h. φ als Parametertransformation und g als q -parametrisierte Rechtsaktion („ R “).

Versale Deformationen sind insbesondere *infinitesimal versal*, d.h. ihre Anfangsgeschwindigkeiten liegen im Tangentialraum der Deformationskeime transversal zu dem der R -Aktion mit $q \equiv 0$ (ξ -Koordinatentransformationen) Das begründet die Bezeichnung „versal“ als Kunstwort aus „universal“ (jeder ander Deformationskeim ist induziert äquivalent) und „transversal“.

Der Tangentialraum der R -Aktion mit $q \equiv 0$ ist gerade das von den partiellen ξ -Ableitungen $\frac{\partial \phi_0}{\partial \xi^i}$ generierte Ideal $\mathcal{I}_{\partial_\xi \phi_0}$ in der Algebra \mathcal{A}_0 der C^∞ -Keime bei $\xi = 0$. Hat nun der Quotient $\mathcal{A}_0/\mathcal{I}_{\partial_\xi \phi_0}$ endliche Dimension μ , so ist infinitesimale Versalität auch hinreichend (s. [AGZV85], Theorem

8.3. ff) und gestattet eine Konstruktion einer ϕ stabil R_+ -äquivalenten Deformation wie folgt: Ist $e^0 = 1, \dots, e^{\mu-1}$ Basis von $\mathcal{A}_0/\mathcal{I}_{\partial_\xi \phi_0}$, dann gilt:

$$\phi \sim (q, \xi) \mapsto \phi_0(\xi) + \sum_{i=0}^{\mu-1} q_i e_i(\xi).$$

In dieser *miniversalen* Normalform sind insbesondere schon nicht-kaustische q -Parameter herausprojiziert.

Der nächste Schritt der Klassifikation besteht nun im Auffinden von Normalformen für ϕ_0 , dessen Entartung k der der Lagrangeprojektion entspricht. In Verallgemeinerung des Morselemmas gilt:

Satz 5 (Tougeron) [AGZV85, 6.3]: *Hat $f \in \mathcal{A}_0$ eine isolierte Singularität bei 0, so ist f lokal äquivalent zu seinem Taylorpolynom vom Grad $\mu + 1$, wobei $\mu := \dim(\mathcal{A}_0/\mathcal{I}_{\nabla f})$.*

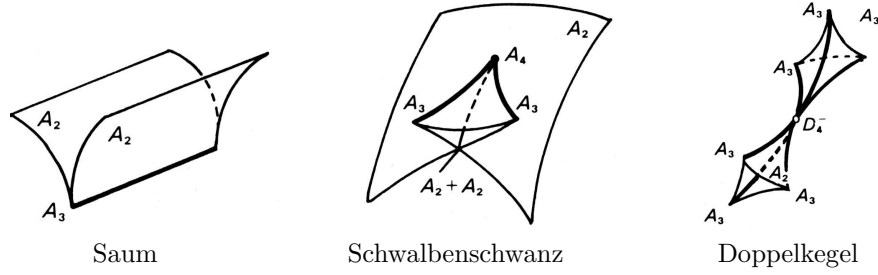
Zusammen mit dem Morsetheorem folgt etwa, dass ein singuläres, in einer Dimension entartetes ϕ_0 stabil R_+ -äquivalent zum Keim $\xi_1 \mapsto \xi_1^{\mu+1}$ ist, folglich $\mathcal{A}_0/\mathcal{I}_{\partial_\xi \phi_0} = \mathbb{R}[\xi_1]/\{\xi_1^\mu\}$ und

$$\phi \sim (q, \xi) \mapsto \xi_1^{\mu+1} + \sum_{i=2}^{\mu-1} q_i \xi_1^i \quad (16)$$

Man bezeichnet (16) mit der Weylgruppe A_μ (von $SU(\mu + 1)$) aus folgendem Grund: Ist W Weylgruppe⁸ auf \mathbb{R}^μ , so liefern die Werte q_i einer Basis W -invarianter Polynome auf der Komplexifizierung \mathbb{C}^μ einen Diffeomorphismus $\nu : \mathbb{C}^\mu/W \rightarrow \mathbb{C}^\mu$. Sind nun die q_i Koeffizienten eines auf dem W -Orbit verschwindenden Polynoms, so entsprechen deren entartete Nullstellen singulären Orbits $|Wz| < |W|$. Z. B. operiert $W = A_\mu$ einfach auf der Hyperbene $x_1 + \dots + x_{\mu+1} = 0$ durch Permutation der Koordinaten und entartete Orbits liefern die Polynome (16). Es zeigt sich, dass in kleinen Dimensionen die einfachen Wurzelsysteme zur Klassifikation der Kaustiken ausreichen (s. [AGZV85]), wobei von A_μ verschiedene Typen erst ab Dimension 3 auftreten:

k	W	ϕ_0 -Normalform	beschriebene Kaustik im \mathbb{R}^3
1	A_2	ξ_1^3	Fläche $\cong \mathbb{R}^2$
2	A_3	$\xi_1^4 + q_2 \xi_1^2$	Saum zweier A_2 -Flächen
3	A_4	$\xi_1^5 + q_2 \xi_1^3 + q_3 \xi_1^2$	Saum zweier A_3 (Schwalbenschwanz)
	D_4	$\xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2 + q_3 \xi_1^2$	Doppelkegel

⁸von Spiegelungen an Hyperebenen erzeugte endliche einfache $Gl(n)$ -Untergruppe, die ein Gitter $\cong \mathbb{Z}^\mu$ invariant lässt. Insbesondere erzeugt das Wurzelsystem einer Cartanalgebra \mathfrak{h} einer einfachen komplexen Liegruppe die Weylgruppe $W = N(T)/T$, $T = \exp \mathfrak{h}$, siehe etwa [DK00].



1.4 Anwendungen in der klassischen Mechanik

1.4.1 Generierende Funktionen kanonischer Relationen

Der Graph einer symplektischen Abbildung $\phi : Z \rightarrow Z'$, $\phi^*\omega' = \omega$ ist offenbar Lagrangesch in $(Z \times Z', \omega \oplus -\omega')$, man bezeichnet so verallgemeinernd Lagrangemannigfaltigkeiten in $Z \times \overline{Z}$, $(\overline{Z}, \omega) := (Z, -\omega)$ als *kanonische Relationen*. Ihr Produkt

$$L \circ L' = \{(z, z'') \in Z \times Z'' \mid \exists z' \in Z' \text{ so dass } (z, z') \in L \text{ und } (z', z'') \in L'\}$$

können wir dann mit dem Bild der Lagrangemannigfaltigkeit $L \times L' \subset Z \times \overline{Z'} \times Z' \times \overline{Z''}$ unter der Reduktion bezüglich der koisotropen Mannigfaltigkeit $C := Z \times \text{graph}(id_{Z'}) \times Z''$ identifizieren. Allerdings ist $L \circ L'$ (im Gegensatz zur Komposition symplektischer Abbildungen) im Allgemeinen keine kanonische Relation mehr; hinreichend ist nach Lemma 3, dass sich $L \times L'$ und C cleanly schneiden. In diesem Fall nennen wir L, L' *verknüpfbar*.

Im Fall von Phasenräumen $Z = T^*Q$ liefert nun die *Bewegungsumkehr* $(q, p) \mapsto (q, -p)$ einen kanonischen Symplektomorphismus $T^*Q \rightarrow \overline{T^*Q}$. Dieser erlaubt die Identifikation von Lagrangemannigfaltigkeiten L im Phasenraum $T^*(Q \times Q)$ mit kanonischen Relationen $s(L) \subset T^*Q \times \overline{T^*Q}$ via der (global definierten) *Schwartz-Transformation* $s(q, q', p, p') := (q, p, q', -p')$. Eine generierende Funktion von $s(L)$ ist dann definiert als generierende Funktion von L . Ist nun L lokal projizierbar mit lokaler Stammfunktion S (also im $dS \subset L$), so erfüllt sie nach (10) in Darbouxkoordinaten $\theta_Q = p_i dq^i$ von T^*Q die Identität

$$p_i dq^i - p'_i dq'^i = dS(q, q'). \quad (17)$$

Ist $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'}$ regulär, so determiniert diese Gleichung eine lokale symplektische Transformation $(q, p) \mapsto (q', p')$ assoziiert zu L . Dies ist die ursprüngliche Definition generierender Funktionen, vgl. etwa [Arn89].

Was passiert nun bei Komposition? Sind $S_1 \in C^\infty(Q \times Q')$, $S_2 \in C^\infty(Q' \times Q'')$ (der Übersichtlichkeit wegen parameterfrei) generierende Funktionen verknüpfbarer kanonischer Transformationen $s(L_{S_1}) \in T^*Q \times \overline{T^*Q'}$ und $s(L_{S_2}) \in T^*Q' \times \overline{T^*Q''}$, so erhält man durch Reduktion

$$s(L_{S_1}) \circ s(L_{S_2}) = \left\{ \left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}, q'', -\frac{\partial S_2}{\partial q''} \right) \middle| \frac{\partial S_1}{\partial q'} = -\frac{\partial S_2}{\partial q'} \right\} = s(L_{S_1+S_2}). \quad (18)$$

Der Komposition entspricht also in Termen generierender Funktionen die Summation $(S_1 + S_2)(q, q', q'') := S_1(q, q') + S_2(q', q'')$.

Z. B. erhält man aus der generierenden Funktion $(q, q') \mapsto qq'$ des Tausches $(q', p') = (p, -q)$ im \mathbb{R}^{2n} die der Identität (vgl. Abschnitt 2.2. für beliebige Phasenräume):

$$S_{id_{\mathbb{R}^{2n}}}(q, q'', q') = (q - q'')q'. \quad (19)$$

$s(\text{graph}(id_{T^*Q}))$ ist gerade das Konormalbündel der Diagonalen $\text{graph } id_Q$, also insbesondere nicht projizierbar.

1.4.2 Interpretation der Variationsprinzipien

Sei Q kompakt und $P(Q)$ die Mannigfaltigkeit von Wegen $q : [0, T] \rightarrow Q$ modelliert auf dem Sobolevraum $H^1 := H^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^N)$. Ein Tangentialvektor $\delta q \in T_q P(Q)$ an einen Weg q ist dann das H^1 -Variationsvektorfeld $\delta q := \frac{d}{ds}|_0 q_s$ einer C^∞ -Homotopie q_s von q .

Sei weiter $L \in C^\infty(TQ)$ eine Lagrangefunktion streng konvex in den Geschwindigkeiten und $H \in C^\infty(T^*Q)$ ihre Legendretransformierte.

Lemma 10 (Hamiltonsches Prinzip) *Das Funktional*

$$S : P(Q) \rightarrow \mathbb{R} : S(q) = \int_0^T L(q_t, \dot{q}_t) dt$$

ist generierende Funktion des Hamiltonschen Flusses zur Zeit T bezüglich der Randpunkts-Faserung

$$P(Q) \xrightarrow{\rho} Q \times Q : \quad \rho(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(T)),$$

in Formeln:

$$s(L_S) = \text{graph } \phi_T^{\mathcal{X}^H}.$$

Wir zeigen das für die Einschränkung von S auf die (dichte) Mannigfaltigkeit der $H^{1,2}$ -Wege, die insbesondere nach dem Einbettungssatz [Jos98](A.1.2) C^2 sind. Sei $(q, p) \in T_q^* P$, $p_t := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_t}(q_t, \dot{q}_t)$ ihr Kotangentiallift. $DS \cdot \delta q = p_T \delta q_T - p_0 \delta q_0 + \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q_t} - \frac{d}{dt} p_t \right) \delta q_t dt$. Also besteht die faserkritische Menge Σ_S aus den Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung (1), deren Kotangentiallifts Lösungen von (3) sind. Weiter ist $\frac{\partial S}{\partial q_0} = p_0$, $\frac{\partial S}{\partial q_T} = p_T$, also ist L_S in der Tat Schwartztransformierte des Hamiltonschen Flusses. \square

Die Verallgemeinerung auf nicht kompakte Q ist i.A. falsch, hier muss ja nicht einmal der Fluss existieren. Ist aber L kinetische Energie zu einer Riemannmetrik (z.B. Fermat- oder Maupertuis-Prinzip), so ist die geodätische Vollständigkeit schon hinreichend und äquivalent zur metrischen. Hier ist folgende Einschränkung von Interesse:

Lemma 11 Sei $L_{q_0,E} \subset T^*Q$ die Lagrangemannigfaltigkeit gebildet aus den Kotangentiaalliften (q,p) von in q_0 startenden Geodäten q der Energie E . Dann ist S generierende Funktion von $L_{q_0,E}$ bezüglich der Faserung

$$\{q \in P(Q) \mid H(q,p) \equiv E, q(0) = q_0\} \rightarrow Q : q \mapsto q(T).$$

□

Ist nun q_s eine C^∞ Homotopie von q bestehend aus Geodäten, so heißt das zugehörige Variationsvektorfeld $J \in T_q P(Q)$ *Jacobifeld*; und zwei Punkte q_0, q_T auf im q heißen *k-fach konjugiert*, wenn es k linear unabhängige Jacobifelder gibt, die in q_0, q_T verschwinden. Dies lässt sich als linearisierte Bedingung für den Schnitt zweier Geodäten in q_0, q_T interpretieren, ist im Allgemeinen aber nicht dazu äquivalent.

Sei nun Q_q die Faser-Hessematrix der Generierenden J^E an der faserkritischen Stelle q (Q_q ist wohldefinierte symmetrische Bilinearform auf $T_q P(Q)$). Die Jacobifelder sind offenbar gerade der Kern von Q_q , und nach (15) gilt:

Notiz 4 q_0 ist genau dann *k-fach konjugiert* zu q_T , wenn q_T *k-fache Kaustik* von $L_{q_0,E}$ ist.

Bemerke dabei, dass man sich auf den endlichdimensionalen Fall beschränken kann durch die Einschränkung von J^E auf den Raum der *stückweise kürzesten Geodäten*: Lokal sind ja alle Geodäten eindeutig, minimierend und frei von konjugierten Punkten (das sieht man anhand der Injektivität der geodätischen Exponentialabbildung für kleine Nullschnitt-Umgebungen, vgl. [BJ90]). Aus dem selben Grund muss der *Morseindex*⁹ von $t \mapsto Q_{q|[0,t]}$ anfangs verschwinden, somit springt er bei jedem Durchlauf durch einen *k-fach konjugierten* Punkt um $+k$:

Lemma 12 (Morse-Theorem) *Der Morseindex der Hessematrix des Energiefunktionals zu festen, nicht-konjugierten Randpunkten ist gleich die Anzahl konjugierter Punkte gezählt mit ihrer Multiplizität.* □

1.4.3 Topologische Anwendungen des Morsetheorems

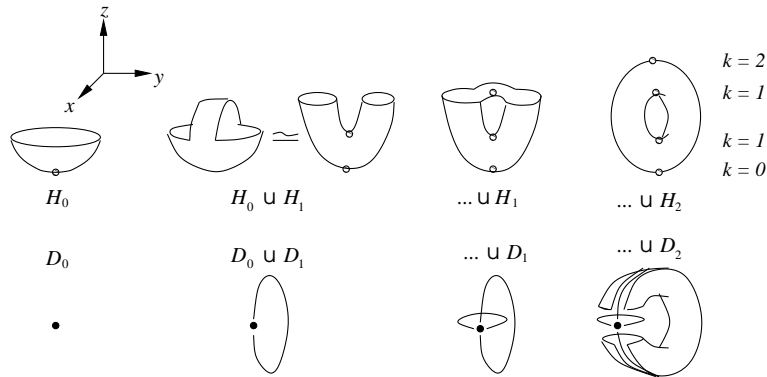
Das Morsetheorem hat folgende Konsequenzen, detaillierter beschrieben in der Standardreferenz [Mil69].

Homotopietyp von $\Omega(Q)$ Zunächst erkennen wir den Raum der stückweise kürzesten Geodäten als Deformationsretrakt von $P(Q)$, indem wir Wegsegmente zwischen nicht-konjugierten Punkten $\gamma(t_i), \gamma(t_i + \epsilon)$ ausgehend von $\epsilon = 0$ durch minimale Geodäten abkürzen. Die auf den Retrakt beschränkte äquivalente Generierende ist dann eingeschränkt auf eine Faser X

⁹Der **Morseindex** $\text{ind } Q$ einer Quadratform Q bezeichnet die maximale Dimension eines Teilraums, auf dem Q negativ definit ist.

zu festen, nicht konjugierten Randpunkten eine *Morsefunktion* $f \in C^\infty(X)$, d.h. alle stationären Punkte sind nicht-entartet und lassen sich damit lokal auf Normalform (Lemma 9) bringen. Eine solche Morsefunktion liefert eine **Henkelzerlegung** von X wie folgt: Enthält $[a, b]$ keinen kritischen Wert von f , so ist $X^a := f^{-1}[0, a]$ starker C^∞ -Deformationsretrakt von X^b via des Flusses zum Gradienten von f (bezüglich irgendeiner Riemannmetrik). Enthält hingegen o.E. $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ genau einen kritischen Punkt mit Wert c und Index k , so zeigt man anhand der Normalform, dass $X^{c+\epsilon} := f^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ diffeomorph ist zu $X^{c-\epsilon}$ mit einem via $\phi : D^{n-k} \times \partial D^k \hookrightarrow \partial X^{c-\epsilon}$ angehefteten k -Henkel $H_k := D^{n-k} \times D^k$:

$$X^{c+\epsilon} \cong X^{c-\epsilon} \cup_\phi D^{n-k} \times D^k.$$



Henkelzerlegung des Torus $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ anhand der Höhenfunktion $T^2 \ni (x, y, z) \mapsto z$ und assoziierter Zellenkomplex.

Die Kontraktion von $D^{n-k} \subset H_k$ entspricht dabei der Anheftung einer k -Zelle, und so erhält man:

Satz 6 [Mil69, Th. 16.3] *Der Raum der stückweise C^∞ -Wege endlicher Länge $\sqrt{J_E}$ zu festen, nicht konjugierten Randpunkten ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex bestehend aus je einer k -Zelle pro J_E -kritischem Punkt vom Index k .*

Bott-Periodizität Seien $O_n, U_n, U_n^{\mathbb{H}}$ die maximal kompakten Untergruppen (Deformationsretrakte bezüglich der Polarzerlegung) von $GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), GL_n(\mathbb{H})$ und $O, U, U_{\mathbb{H}}$ ihre direkten Limites bezüglich der Standard-Einbettungen $GL_n(R) \hookrightarrow GL_{n+1}(R) : g \mapsto g \oplus 1$.

Satz 7 ([Bot59]) *Die periodisch Folge homogener Räume (X_n) gegeben durch*

$$\dots, O, BO \times \mathbb{Z}, U/O, U_{\mathbb{H}}, U, U_{\mathbb{H}}/U, BU_{\mathbb{H}} \times \mathbb{Z}, U/U_{\mathbb{H}}, O/U, O, \dots$$

ist ein Ω -Spektrum, d.h. X_n ist homotopieäquivalent zum Schleifenraum $\Omega(X_{n+1})$. Gleiches gilt für die Folge $(X_n) := \dots, U, BU \times \mathbb{Z}, U, \dots$

Grobe Beweisskizze für den Fall der orthogonalen Gruppe: Anhand Satz 6 sieht man zunächst, dass die i -te Homotopiegruppe des Wegerraums zu festen Endpunkten $\pi_i(\Omega(Q))$ schon durch die kürzesten Geodäten zwischen ihnen berechnet wird, sofern deren Index $\geq i$ ist (s. [Mil69, Th. 22.1]).

Seien $J_1, \dots, J_k \in O_{16n}$ antikommutierende komplexe Strukturen auf \mathbb{R}^{16n} , d.h. $J_i J_j + J_j J_i = -2\delta_{ij} \mathbf{1}$, und $\Omega_{k+1} \subset \Omega_0 := O_{16n}$ der Raum der Fortsetzungen dieser Relationen von k auf $k+1$ (Die Relationen generieren eine \mathbb{R} -Algebra $C^{k,0}$, die \mathbb{R}^{16n} zum *Clifford- $C^{k,0}$ -Modul* macht, also ist Ω_{k+1} gerade der „orthogonale Anteil“ von $C^{k+1,0}$ -mod $C^{k,0}$ Strukturen auf \mathbb{R}^{16n}). Wegen $\exp(J_k^{-1} \xi J_k) = -J_k \exp(\xi) J_k$ besteht eine J_k -Umgebung von Ω_{k+1} genau aus jenen $J_k \exp \xi$, für die $[\xi, J_k]_+ = 0$ und $[\xi, J_i] = 0 \forall i < k$; die ξ liegen also in einem linearen \mathfrak{o}_{16n} -Unterraum. Folglich liegt Ω_{k+1} total geodätisch in Ω_k bezüglich einer invarianten Metrik von O_{16n} (induziert etwa durch die Killingform $\mathfrak{o}(16n)^2 \ni (\xi, \eta) \mapsto \text{tr}(\xi \eta^*)$), und

$$\Omega_{k+1} \ni \xi \mapsto \{[0, \pi] \ni t \mapsto \exp(t\xi)\}$$

definiert einen Homöomorphismus von Ω_{k+1} auf den Raum der kürzesten Geodäten zwischen J_k und $-J_k$ in Ω_k . Deren Index ist aber 1. Ordnung in n ([Mil69], Assert. S. 146), also $\pi_i(\Omega_{k+1}) = \pi_{i+1}(\Omega_k)$ im induktiven Limes $n \rightarrow \infty$. Nach den Whitehead-Theoremen [Whi78, V 3.1, 3.5] sind aber zwei CW-Komplexe schon homotopieäquivalent, wenn all ihre Fundamentalgruppen übereinstimmen, also

$$\Omega(\Omega_k) \simeq \Omega_{k+1}.$$

Man identifiziert nun schrittweise $\Omega_1 = O_{16n}/U_{8n}$ via der kanonischen Aktion von O auf den komplexen Strukturen $(g, J_1) \mapsto g^* J_1 g$, analog Ω_2 mit quaternionalen Strukturen auf \mathbb{C}^{8n} , Ω_3 mit dem Grassmannraum *aller* quaternionaler Unterräume via $\mathbb{H}^{4n} = V_+ \oplus V_-$, $V_\pm := \ker(J_1 J_2 J_3 \pm 1)$, $\Omega_4 \cong U_{\mathbb{H}}$ via $J_3 J_4 : V_1 \rightarrow V_2$ auf dem höchstdimensionalen Stratum $\dim V_+ = \dim V_-$, etc. (s. [Mil69, Lemma 24.6]).

K-Version der Bottperiodizität Seien X, Y, Z (lokal) kompakte Räume mit Basispunkten x_0, y_0, z_0 und $C(Y, Z)$ versehen mit der KO-Topologie (s. [tD00, S. 111]) und der konstanten Abbildung $Y \mapsto \{z_0\}$ als Grundpunkt. Dann ist eine Abbildung $f : X \rightarrow C(Y, Z)$ genau dann Basispunkt-erhaltend, wenn die *adjungierte* Abbildung $\bar{f} : X \times Y \rightarrow Z : \bar{f}(x, y) = f(x)(y)$ die Menge $X \vee Y := X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ auf den Basispunkt abbildet. Dem kanonischen Homöomorphismus

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y, Z))$$

(s. [tD00], Satz 5.3) entspricht somit die punktierte Version

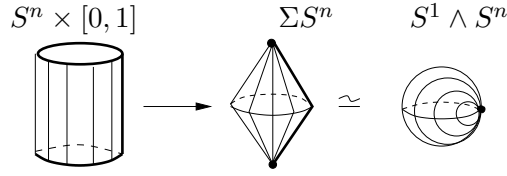
$$C(X \wedge Y, Z)' \cong C(X, C(Y, Z))',$$

wobei $X \vee Y := X \times Y / X \vee Y$ und $'$ die Erhaltung des Basispunkts bedeute.

Ist $Y = S^1$, also $S^1 \wedge X =: SX$ die *reduzierte Suspension*¹⁰ und $C(S^1, Z)' = \Omega(Z, z_0)$ der Schleifenraum, so macht die Zusammensetzung von Wegen den

¹⁰Diese entsteht aus der gewöhnlichen Suspension ΣX , definiert durch Zusammenschlagen der beiden Ränder des Zylinders $X \times [0, 1]$ auf je einen Punkt, durch zusätzliche Identifikation der kontrahierbaren Menge $\{x_0\} \times [0, 1]$; vgl. Bild.

Homöomorphismus $C(SX, Y)' \cong C^1(X, \Omega(Y, y_0))'$ sogar zu einem Homomorphismus von Gruppen. Da $SS^n \simeq S^{n+1}$



erhält man insbesondere kanonische Gruppenisomorphismen $\pi_i(\Omega(X)) = \pi_{i+1}(X)$. bzw. dual $H^{i-1}(X, \mathbb{Z}) = H^i(SX, \mathbb{Z})$.

Das motiviert die Erweiterung des \tilde{K} -Funktors (s. A.1.3) $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X) = [X, BO \times \mathbb{Z}]'$ für kompakte, aber nicht notwendigerweise zusammenhängende X , auf

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}^{-n}(X) := \tilde{K}(S^n X) = [X, \Omega^n(BO \times \mathbb{Z})]'. \quad (20)$$

Weiter definiert man die relativen Funktoren $K^{-n}(X, Y) := \tilde{K}^n(X/Y)$, die ungepunkteten $K^{-n}(X) := K(X + *, *)$ und schließlich für nur lokal-kompakte X die *kompakt getragenen* durch $K(X) := \text{coker}(K(*) \rightarrow K(X + *))$. Man erhält so in der Tat eine verallgemeinerte Kohomologietheorie¹¹, insbesondere verifiziert man leicht $K^{-n}(X) = K(X \times \mathbb{R}^n)$ (s. [Kar78, 4.12]).

Nach A.1.3 klassifizieren die $\tilde{K}^n(X)$ stabile Äquivalenzklassen von Vektorraumbündeln über Suspensionen, etwa entspricht $\tilde{K}_{\mathbb{R}}^{-1}(X) = [X, O]'$ gerade den Homotopieklassen von Übergangsfunktionen zwischen dem oberen und unteren Kegel von ΣX . Das von dem direkten Tensorprodukt von Vektorräumen induzierte Produkt von K^{-n} -Gruppen erfüllt nun $K^{-n}(X) \otimes K^{-m}(Y) = K^{m-n}(X \times Y)$, und so schreibt sich die Bottperiodizität als $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes K_{\mathbb{R}}(S^8) = K_{\mathbb{R}}(X)$ bzw. $K_{\mathbb{C}}(X) \otimes X_{\mathbb{C}}(S^2) = K_{\mathbb{C}}(X)$.

1.5 Die Maslovklasse

1.5.1 Der Maslovindex als spektraler Fluss

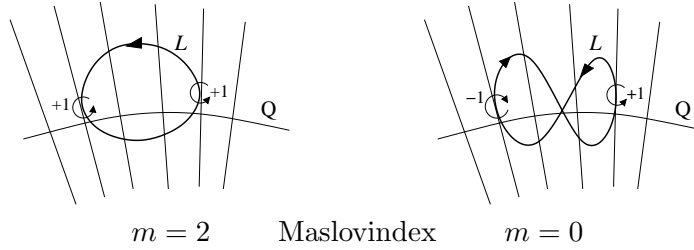
Betrachte einen geschlossenen Pfad γ in einer Lagrangmannigfaltigkeit L des Phasenraums T^*Q . Wähle nun lokale generierende Funktionen ϕ_i , so dass $i_\phi : \Sigma_{\phi_i} \hookrightarrow L$ Einbettung ist, dann springt nach Konstruktion der Morseindex ind $\partial_{\xi_i}^2 \phi_i \circ i_\phi^{-1}$ längs γ bei jedem transversalen Durchgang durch das Urbild einer k -fachen Kaustik je nach Orientierung um $\pm k$, woraus wir bereits das Morse-Theorem gefolgert haben. Nach dem Hörmander-Theorem ist dieser relative Morseindex unabhängig von der generierenden Funktion. Die Summe der relativen Morseindizes heißt *Maslovindex* $m(\gamma)$ des Weges und wird sich als Homotopieinvariante erweisen, er definiert so dual eine

¹¹vgl. [Hil71] oder [Kar78]), die Beziehung von Kohomologietheorien und Ω -Spektralen ist sogar für zusammenhängende X bijektiv.

Klasse $[\mu]$ in $H^1(L, \mathbb{Z})$, die *Maslovklasse* von L – in Formeln: Ist $t_0 < \dots < t_n$ eine Partition zu $\gamma : [t_0, t_n] \rightarrow L$, so dass L längs $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ durch generierende Funktionen ϕ_i gegeben ist, dann ist

$$\mu(L) \cdot \gamma := m(\gamma) := \sum_j \text{ind } \partial_{\xi_j}^2 \phi_j(i_{\phi_j}^{-1}(\gamma(t))) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}}. \quad (21)$$

Bemerkung: Im ∞ -dimensionalen Fall, so dass $\partial_{\xi}^2 \phi$ auf einem (q -unabhängigen) Hilbertraum definiert ist (Lemma 10, 11), ersetzt man $\dim \ker \partial_{\xi}^2 \phi$ durch den Rang des Projektors $\chi_{[-a, a]}(\partial_{\xi}^2 \phi)$, $a > 0$, so dass $Q : t \mapsto \chi_{[-a, a]}(\partial_{\xi}^2 \phi(i_{\phi}^{-1}(\gamma(t))))$ stetig ist; und bezeichnet den Maslovindex aus offensichtlichen Gründen als *spektralen Fluss* von Q . Der Maslovindex verallgemeinert dann offenbar den Morseindex von Geodäten, vgl. dazu auch [GPP].



Wir wollen nun Umformulierungen des Maslovindex unabhängig von Generierenden finden.

Der Maslovindex als relativer Kashiwara-Index. Wir betrachten zunächst Schnitte zweier Lagrangemannigfaltigkeiten in Termen lokaler Generierender:

Notiz 5 im $dS \subset T^*Q$ schneidet L_ϕ genau dann cleanly in $i_\phi(W)$, wenn W genau aus den kritischen Punkten z von $\phi - S := \phi - \rho_B^* S$ besteht und eine Mannigfaltigkeit mit $T_z W = \ker(\phi - S)''(z)$ bildet. (Dabei ist $(\phi - S)''$ wohldefinierte Quadratform auf $T_z B$ vermöge der kanonischen Identifikation $T_0 T^* B = TB \oplus T^* B$ am Nullschnitt.)

In der Tat, $\{q, S'(q)\} = \{(q, \partial_q \phi(q, \xi)) | \partial_\xi \phi(q, \xi) = 0\}$ genau dann, wenn $(\phi - S)'(q, \xi) = 0$ ist. Weiter ist $Y = (Y^q, Y^\xi) \in T_z \Sigma_\phi \iff \partial_\xi \phi'|_z \cdot Y = 0$. Das Bild $T_z i_\phi \cdot Y = (Y^q, \partial_q \phi'|_z Y^\xi) =: (Y^q, Y^p)$ liegt dann auch in T im dS genau dann, wenn $S'' Y^q = Y^p$, also zusammenfassend $Y \in \ker(\phi - S)''(z)$ ist. \square

In jedem Schnittpunkt $p \in L_\phi \cap L_S$ hat man ein Tripel $(L_1, L_2, L_3) = (\ker T_p \pi, T_p L_\phi, T_p \text{ im } dS)$ von Lagrange-Unterräumen in $T_z T^* Q$. Assoziiert

zu einem solchen Tripel ist der *Kashiwara-Index* $\text{sgn}(L_1, L_2, L_3)$, definiert als Signatur der Quadratform $Q(L_1, L_2, L_3)$:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1).$$

Man kann zeigen, dass der Kashiwara-Index neben den Dimensionen der vier Durchschnitte der L_i die einzige symplektische Invariante des Tripels ist (s. z.B. [Mei90]); wir benötigen aber nur den Fall, dass L_3 transversal zu L_1 und L_2 ist:

Lemma 13 *Sei $t_0 < \dots < t_n$ eine Partition zu $\gamma : [t_0, t_n] \rightarrow L \subset T^*Q$, so dass Lagrangesche Vektorbündel L_i über $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ transversal zu $T_\gamma L$ und $\ker T_\gamma \pi$ existieren, dann ist*

$$m(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_j \text{sgn}(\ker T_{\gamma(t)} \pi, T_{\gamma(t)} L; L_i(t)) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}}$$

Beweis: Sei L_i durch eine Formenfamilie $L_i(t) = T_{\gamma(t)}$ im dS_t gegeben. Dann induziert die Fasertranslation $p_q \mapsto p_q - dS_t(q)$ einen symplektischen Isomorphismus von $T_{\gamma(t)} T^*Q$ auf den Standardraum $L_0 \oplus L_0^* = T_0 TQ \oplus \ker T_0 \pi$ versehen mit der kanonischen Form $\omega(x \oplus p, x' \oplus p') = p'.x - p.x'$. $T_{\gamma(t)} L_\phi$ wird dabei der Graph genau einer symmetrischen Bilinearform $b_t : L_0^* \rightarrow L_0$, den wir als Reduktion des Graphen von $Q_t := (\phi - S_t)''(z)^{-1}$ identifizieren. $\text{sgn}(b)$ ist der Kashiwaraindex des Tripels, in der Tat ist ja $Q(L_0 \oplus 0, \text{graph}(b_t), 0 \oplus L_0^*)(x \oplus 0, x' \oplus b_t.x', 0 \oplus p) = b_t x'.x + p.x' - p.x$, also $\text{sgn } Q(\dots) = \text{sgn } b$.

Sei nun abkürzend $E = \ker T_z \rho$. Dann ist dank der Regularität von Q_t in der Tat $\text{konst} = \text{ind } Q_t = \text{ind } Q_t|_E + \text{ind } Q_t^{-1}|_E^0 = b_t + \partial_\xi^2 \phi(z)$. \square

1.5.2 Die universelle Maslovklasse

Offensichtlich können wir bei der Definition des Maslovindex die Basispunkte $\gamma(t_i)$ vergessen, indem wir eine punktweise symplektische „Gaußabbildung“ des Tangentialbündels in den symplektischen Vektorraum $L \oplus L^*$ betrachten, welche das Vertikalbündel $\ker T\rho$ auf $0 \oplus L^*$ und $T_\gamma L$ auf einen Pfad in der Grassmannmannigfaltigkeit Λ der Lagrangeräume von $L \oplus L^*$ abbildet. Das definiert die *universelle Maslovklasse* $\mu \in H^1(\Lambda, \mathbb{Z})$. Neben der Definition über Morseindizes haben wir dann folgende einfacheren Definitionen des Maslovindex:

Der Maslovindex als Schnittzahl (vgl. [CdV]). Λ wird generiert durch Quadratformen auf $L \times \mathbb{R}^k$, wobei die reduzierten generierenden Funktionen zu gleicher Faserdimension k Λ in Schichten¹²

$$\Lambda_k := \{l \in \Lambda \mid \dim l \cap 0 \oplus L^* = k\}$$

¹²Eine Stratifikation einer Mannigfaltigkeit M ist eine Zerlegung in Mannigfaltigkeiten (Schichten) M_i , so dass der Abschluss von M_j die Vereinigung von M_j mit den Strata niedrigerer Dimension ist.

zerlegen. Λ_0 wird parametrisiert durch generierende Quadratformen auf $L \oplus 0$, ist also zusammenziehbar. Das Komplement (der *Maslovzykel*) ist keine Untermannigfaltigkeit, doch ist der *homotopierelevante* Anteil schon durch Λ_1 gegeben: Da $\text{codim } \Lambda_k \geq 3$ für $k > 1$, ist $\pi_1(\Lambda) = \pi_1(\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$. Daraus folgt insbesondere, dass Schnitte einer Kurve γ mit den höheren Schichten $\Lambda_k, k > 1$ *instabil* sind: Durch beliebig kleine Deformationen zweigen sie auf in transversale Schnitte mit Λ_1 . Für solche generischen Kurven ist die Schnittzahl wohldefiniert:

Nach Lemma 3 können wir den Tangentialraum an Λ_1 in $\gamma(t) \in \Lambda_1$ mit Quadratformen auf $\gamma(t)$ identifizieren, die auf der Geraden $T := \gamma(t) \cap 0 \oplus L^*$ verschwinden. Die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t)$ im Schnittpunkt definiert dann dank Transversalität einen Normalenvektor $\neq 0$ an Λ_1 , identifizierbar mit einer regulären Quadratform auf T . Wir koorientieren Λ_1 durch die Festlegung, dass diese Quadratform positiv ist genau dann, wenn $\gamma(t)$ Λ_1 positiv schneidet, dann ist der Maslovindex offenbar die Schnittzahl $m(\gamma)$ von γ mit Λ_1 .

Eine formale Definition der Schnittzahl, die ihre Homotopieinvarianz einschließt, erhält man wie folgt: Wähle eine Λ_1 -Umgebung diffeomorph zu $U := [-\epsilon, \epsilon] \times \Lambda_1$, die den Rand des Weges nicht enthalte. Weiter definiere die geschlossene Form μ via $\mu = f'd\epsilon$ mit $f(\pm\epsilon) = \pm 1/2$ in U und $\text{supp } \mu \subset U$. Dann ist $m(\gamma) := \int_\gamma \mu$. Für beliebige Kurven γ kann man zeigen, dass die Schnittzahl nicht von der Deformation auf eine generische Kurve abhängt, und erhält so insbesondere eine Bijektion

$$m : \pi_1(\Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Die homogene Version des Maslovindex (vgl. [MS95, 2.3]). Sei wieder Λ der Grassmannraum von Lagrangeräumen in $(L \oplus L^*, \omega)$. Wähle eine kompatible komplexe Struktur J mit zugehöriger euklidischer Metrik g und hermitischer $h = g + i\omega$, wir identifizieren so $Sp(n) \cap O(2n) = U(n)$ als maximal kompakte $Sp(n)$ -Untergruppe. Nun ist der \mathbb{R} -Spann h -orthonormaler Basen Lagrange, und umgekehrt ist jede g -orthonormale Basis eines Lagrange-Unterraums auch h -orthonormal. Da $U(n)$ auf h -Orthormalbasen transitiv operiert mit L -Stabilisator $U(n)_L = O(n)$, identifizieren wir $\Lambda = U(n)/O(n)$.

Lemma 14 *Der Maslovindex einer Schleife $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda \cong U(n)/O(n)$ ist die Umlaufzahl der Komposition mit \det^2 :*

$$m(\gamma) = \text{deg}(\det^2 \circ \gamma : S^1 \rightarrow S^1).$$

In der Tat: m ist wohldefiniert wegen $\det O(n) = \{\pm 1\}$ und offensichtlich homotopieinvariant, und $S^1 \rightarrow \Lambda : e^{i\phi} \rightarrow \text{diag}(e^{i\phi/2}, 1, \dots, 1)(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ hat gerade Schnittzahl 1, generiert also $\pi_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$. \square

Ist $\gamma : S^1 \rightarrow U(n)$ eine Schleife in $U(n)$, so ist $m(g.\gamma) = m(\gamma) + 2 \deg \det g$, denn $2 \deg \det(g) = \deg \det^2(g) = \deg \det(g^2)$; man kann so $\pi_1(U(n)) \rightarrow \mathbb{Z} : [\gamma] \mapsto \deg(\det \circ \gamma)$ als gelifteten Maslovindex interpretieren.

Weiter redefinieren wir die Maslovklasse $\mu \in H^1(\Lambda, \mathbb{Z})$ als pullback des Generators $\frac{1}{2\pi} d\varphi$ von $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ mittels \det^2 . Nach Lemma 14 ist μ wieder dual zu $\pi_1(\Lambda)$, ordnet also jedem Zykel seine Schnittzahl zu.

1.5.3 Maslovklasse zweier Lagrangebündel

Existenz Lagrangescher Unterbündel (vgl. [Vai87]). Sei E ein symplektisches Vektorraumbündel. Die Wahl einer fast komplexen kompatiblen Struktur J (und damit einer hermiteschen und euklidischer Metrik) auf E entspricht 1:1 einer Reduktion der Strukturgruppe von $Sp(n)$ auf $U(n)$, ist aber nach A.1.1, Lemma 34 stets möglich, da $U(n)$ maximal kompakte Untergruppe (Abschnitt 1.5.2) bzw. der Raum der kompatiblen fast komplexen Strukturen nach Lemma 8 kontrahierbar ist. Ein Lagrangesches Unterbündel L entspricht seinerseits einem globalen Schnitt des assoziierten Bündels $\Lambda(E)$ und steht damit nach A.1.1, Lemma 2 in 1:1-Korrespondenz zur Reduktion der Strukturgruppe von $U(n)$ auf $O(n)$. Hier liefern nun die ungeraden Chernklassen (Anhang 1, (102)) eine Obstruktion: Ist θ eine *L-angepasste* Zusammenhangsform auf dem $U(n)$ -Framebündel $U(E)$ zu E , d.h. reduzierbar zu einer Zusammenhangsform auf dem $O(n)$ -Framebündel zu L , so ist insbesondere ihre Holonomiealgebra schiefssymmetrisch $\mathfrak{hol}(\theta) \subset \mathfrak{o}(n)$. Folglich verschwinden die Koeffizienten $c_k : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda - \eta/2\pi i) = \sum_k c_k(\eta) \lambda^{n-k} \quad (23)$$

für $\eta \in \mathfrak{hol}(\theta)$, falls k ungerade ist.

Zum Beispiel erlaubt damit $\mathbb{C}P^n$, der durch symplektische Reduktion des isotropen harmonischen Oszillators $H = |z|^2$ nach den Hamiltonschen S^1 -Orbits zu H (Hopf-Faserung) entsteht, keine Lagrangeschen Unterbündel.

Die Maslovklasse zweier Lagrangebündel. Seien nun $L_1, L_2 \in \Lambda(E)$ zwei Lagrangesche Unterbündel eines symplektischen Vektorraumbündels $E \rightarrow L$ mit kompatibler fast komplexer Struktur J , insbesondere betrachten wir natürlich den Fall, dass L Lagrangemannigfaltigkeit in T^*Q , $L_1 = TL$ und $L_2 = \ker T_L \pi$. Modulo Automorphismen der L_i gibt es dann punktweise eindeutige komplexe Rotationen, die L_1 in L_2 überführen, und da E nach vorigem Abschnitt Strukturgruppe $O(n)$ hat, fügen sich diese zu einer global definierten stetigen Abbildung $L_1/L_2 : L \rightarrow U(n)/O(n)$ zusammen. Nach Satz 7 und (20) repräsentiert die Homotopieklasse $[L_1/L_2]$ ein Element aus $K^1(L)$, falls L kompakt ist. Die Maslovklasse verallgemeinert sich

offensichtlich auf das Duale ihrer Komposition mit der Projektion $[\det^2]$:

$$\mu(L_1, L_2) := [\det^2 \circ L_1/L_2]^* \in H^1[L, \mathbb{Z}].$$

1.5.4 Die Maslovklasse als sekundäre charakteristische Klasse

(vgl. [Vai87]). Seien θ_i Zusammenhangsformen auf $U(E) \rightarrow L$. Ihre konvexen Kombinationen $\theta_t := \sum_i t_i \theta_i$, $\sum_i t_i = 1$, definieren eine Zusammenhangsform $\bar{\theta}$ auf $U(E) \times \Delta^r$, wobei $\Delta^r := \text{cov}(e_0, \dots, e_n)$ den Standardsimplex, also die konvexe Hülle der Standardbasis (e_0, \dots, e_r) des \mathbb{R}^{r+1} bezeichne. Sei weiter $\Omega_{\bar{\theta}} := d\bar{\theta}$ ihre Krümmung, dann definieren

$$B(\theta_0, \dots, \theta_r)c_k := \int_{\Delta^r} c_k(\Omega_{\bar{\theta}}^k)$$

in Verallgemeinerung des Botthomomorphismus (102) $U(n)$ -invariante horizontale $(2k - r)$ -Formen auf $U(E)$, die wir gemäß(97) mit Formen auf L identifizieren. Dank (97) und des Satzes von Stokes induziert die Randbildung $\partial\Delta^r = \sum_i (-1)^i \text{cov}(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k)$ die Korandbildung

$$dB(\theta_0, \dots, \theta_r)c_k = - \sum_i (-1)^i B(\theta_0, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_r)c_k, \quad (24)$$

denn $dB(\theta_0, \dots, \theta_r)c_k = \int_{\Delta^r} d|_L c_k(\Omega_{\bar{\theta}}^k) = - \int_{\Delta^r} d|_{\Delta^r} c_k(\Omega_{\bar{\theta}}^k) = - \int_{\partial\Delta^r} c_k(\Omega_{\bar{\theta}}^k)$. (24) lässt sich wie folgt umformulieren: Ist $\mathbb{Z}(\theta_i)/G$ der Kettenkomplex der freien Gruppen über den Zusammenhangsformen (θ_i) modulo diagonal operierender Eichtransformationen G , versehen mit dem vom Simplicialkomplex (Δ, ∂) induzierten Randoperator $\partial(\theta_0, \dots, \theta_r) := \sum_i (-1)^i (\theta_0, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_r)$, so induziert die Abbildung B nach (24) einen Homomorphismus von Kettenkomplexen

$$(\mathbb{Z}(\theta_i)/G, \partial) \rightarrow (\Omega(L), d).$$

Insbesondere liefert der Rand von $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ die Identität

$$[B(\theta_0, \theta_1)c_k + B(\theta_1, \theta_2)c_k + B(\theta_2, \theta_0)c_k] = 0 \in H_{dR}^2(L), \quad (25)$$

Seien nun L_i Lagrange-Unterbündel von E und die θ_i angepasst an L_i . Nach (23) sind dann die $B(\theta_0, \theta_1)c_k$ für ungerade k geschlossen und definieren so spezielle *sekundäre charakteristische Klassen* von L , nämlich die *höheren Maslovklassen* des Paares L_0, L_1 :

Lemma 15 [Vai87, 4.4.44] *Die Maslovklasse ist die sekundäre charakteristische Klasse*

$$\mu(L_0, L_1) := 2[B(\theta_0, \theta_1)c_1] \quad (c_1 = \text{tr}).$$

In der Tat, aus der Strukturgleichung (101) folgt $\Omega_{\bar{g}} = dt \wedge (\theta_1 - \theta_0) + \Omega_{\theta_t}$. In einer lokalen Trivialisierung von $U(E)$ ist nach (96) $\theta_1 = Ad(g)\theta_0 + g^{-1}dg$ bezüglich einer Eichtransformation $g = L_1/L_0$, und somit

$$\begin{aligned} B(\theta_0, \theta_1)c_1 &= \frac{i}{2\pi} tr(\theta_1 - \theta_0) = \frac{i}{2\pi} tr(g^{-1}dg) = \frac{i}{2\pi} d \ln \det g \\ &= \frac{1}{2} (\det^2 g)^* d(\ln : e^{i\phi} \mapsto \phi) \quad \square \end{aligned}$$

Notiz 6 Die Maslovklasse ist invariant unter Lagrange-Homotopien, d.h. Deformationen $f_i : [0, 1] \rightarrow \Gamma(\Lambda(E))$ von $L_i = f_i(0)$ auf $L'_i := f_i(1)$.

In der Tat, sind $\theta_i(t)$ $f_i(t)$ -angepasste Zusammenhangsformen, so gilt nach Stokes modulo Korand $[B(\theta_0, \theta_1)c_1 - B(\theta'_0, \theta'_1)c_1] = \left[\int_0^1 dB(\theta_0(t), \theta_1(t))c_1 dt \right]$, wobei aber der Integrand nach (24) und (23) verschwindet.

Sind nun L_0, L_1 überall transversal, so ist o.E. die Eichtransformation L_0/L_1 einfach die Multiplikation mit einer Konstanten und damit $\mu(L_0, L_1) = 0$, wir erhalten also:

Lemma 16 Die Maslovklasse $\mu(L_0, L_1)$ verschwindet, falls es Lagrangeisotopien von L_0, L_1 auf überall transversale Lagrangebündel gibt. \square

Aus der Kozykelidentität (25) folgt weiter, dass die Maslovklasse eine Obstruktion der Existenz eines zu L_0, L_1 transversalen dritten Lagrangebündels ist (dann verschwinden ja zwei der drei Summanden in (25)).

1.6 Existenz globaler Generierender

Die Definition (21) suggeriert, dass die Maslovklasse einer kompakten Lagrangemannigfaltigkeit $L \subset T^*Q$ Obstruktion für die Existenz einer Generierenden von L ist. Diese Obstruktion ist nicht hinreichend, sondern gerade die erste einer durch $k(L) := [TL/\ker T_L\pi : L \rightarrow U/O] \in K^1(L)$ definierten Reihe von Obstruktionszykeln in $H^{i+1}(L, \pi_i(U/O))$:

Satz 8 (Lees) Das Bild einer Lagrange-Immersion $i : L \rightarrow T^*Q$ ist genau dann das Bild der Reduktion einer projizierbaren Lagrangemannigfaltigkeit im $\eta \subset T^*(Q \times \mathbb{R}^s)$, wenn $k(L) = 0$ gilt.

Beweis nach [Lee79]:

1. Existenz bedingt $k(L) = 0$: Sei $\eta \in Z^1(Q \times \mathbb{R}^s)$ Generierende einer Lagrangeimmersion $i_\eta : L = \Sigma_\eta \rightarrow T^*Q$. Nach dem Satz von Weinstein 2 erweitern wir i_η zu einer symplektischen Einbettung \hat{i}_η einer Nullschnittumgebung von $L \subset T^*L$ in T^*Q und erhalten einen Isomorphismus symplektischer Vektorraumbündel

$$T_0\hat{i}_\eta : T_0T^*L \rightarrow i_\eta^*TT^*Q. \quad (26)$$

Identifizieren wir $T_0T^*L = T^*L \oplus TL = TL \otimes \mathbb{C}$ und via Fasertranslation analog $i_\eta^*TT^*Q \cong (\pi i_\eta)^*TQ \otimes \mathbb{C}$, schreibt sich dies als komplexer Isomorphismus

$$TL \otimes \mathbb{C} \cong (\pi i_\eta)^*TQ \otimes \mathbb{C},$$

wobei die Identifikationen nach Notiz 2 eindeutig bis auf Homotopie sind. Da weiter die Horizontale $TQ \oplus 0$ Lagrange-homotop zur Vertikalen $\ker T_0\pi_Q$ ist, ist offenbar $k(L) = 0$ genau dann, wenn dieser Isomorphismus eine Komplexifizierung von $TL \cong (\pi\hat{i}_\eta)^*TQ$ ist.

Betrachte nun die äquivalente (26)-Erweiterung

$$T_0\hat{i}_\eta \times id_{\mathbb{R}^{2s}} : T_{0 \times 0^{2s}}T^*(L \times \mathbb{R}^s) \rightarrow (i_\eta \times 1)^*TT^*(Q \times \mathbb{R}^s).$$

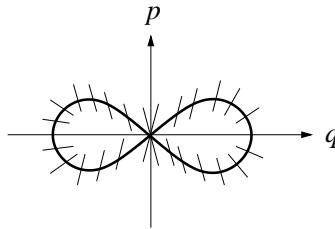
In der Tat ist dann per Definition $i_\eta = \rho\eta|_L$, d.h. obiger Isomorphismus ist homotop zur Komposition der Komplexifizierung $T_{\text{im } \eta}T^*(Q \times \mathbb{R}^s) \rightarrow T \text{ im } \eta \otimes \mathbb{C}$ des Isomorphismus $T\eta : T(Q \times \mathbb{R}^s) \rightarrow T \text{ im } \eta$ mit dem Lift von ρ zum Isomorphismus $TT^*(Q \times \mathbb{R}^s) \rightarrow TT^*Q \oplus Q \times TT^*\mathbb{R}^n$. \square

2. Beweisidee der Umkehrung Anhand der lokalen Existenz und des Satzes von Hörmander 4 beweist man zunächst folgende *Homotopie-Deckungs-Eigenschaft*: Gegeben eine Homotopie von Lagrange-Immersionen i_t , deren Anfang eine Generierende besitzt, existieren (stabilisierte) Generierende η_t mit $\text{im } i_t = \text{im } \eta_t$ ([Lee79, Th. 3]). Es folgt, dass sich Generierende $d\phi_i$ auf jedem Henkel $H_i^k \cong D^{n-k} \cup D^k$ einer Henkelzerlegung¹³ von L finden lassen, wobei wir die H_i (dank der Homotopie-Deckungseigenschaft) als projizierbar annehmen dürfen. Nach Hörmander sind die ϕ_i auf den Zusammenhangskomponenten der Verklebungsstellen ($D^{n-k} \times \partial D^k$ -Umgebungen δH_i^k) stabil eich₊-äquivalent, und es gilt, diese Äquivalenz auf die H_i^k fortzusetzen. Im nicht-zusammenhängenden Fall $k = 1$ liefern hier die lokal-konstanten Größen $i_{\phi_{i*}}$ und $\partial_p^2 \phi_i - i_{\phi_{j*}}$ und $\partial_p^2 \phi_j|_{\delta H_i^1}$ und $i_{\phi_{i*}}\phi_i - i_{\phi_{j*}}\phi_j|_{\delta H_i^1}$ einen hinreichenden Obstruktionskozykel (vgl. A.1.2), eben gerade die Maslov- und Liouvilleklasse; in den übrigen Fällen $k \neq 1$ suchen wir eine Fortsetzung der Äquivalenzeichtransformationen $\delta H_i^k \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^s)$ auf H_i^k . Nun ist $O(s)$ Deformationsretrakt von $\text{Diff}(\mathbb{R}^s)$ und die Komposition $id_Q \times \delta H_i^k \rightarrow O(n+s) \rightarrow U(n+s)$ nach Teil 1 nullhomotop, also definieren die $\delta H_i^k \rightarrow O(s)$ Elemente in $\pi_k(U/O)$ und damit in der Tat den verbleibenden Obstruktionskozykel in $H^{k+1}(L, \pi_k(U/O))$.

Zusammen mit Satz 3 folgt nun die Verschärfung:

Korollar 1 $k(L)$ ist Obstruktion für die Existenz eines zu TL und $i^* \ker T\pi_Q$ transversalen Lagrange-Bündels.

Diese Obstruktion ist hinreichend in \mathbb{R}^2 , z.B. findet man für die ∞ in 1.3.2:



¹³vgl. Abschnitt 1.4.2, §1.

Aus Satz 8 folgt insbesondere, dass $S^1 \subset T^*\mathbb{R}$ (der harmonische Oszillator) keine Generierende in $\Omega^1(\mathbb{R}^{n+s})$ besitzt. Dies ist kein Artefakt der topologischen Trivialität von Bündel oder Fasern:

Lemma 17 *Der Satz von Lees 8 bleibt gültig, wenn man als Definitionsbereich der Generierenden neben $Q \times \mathbb{R}^n$ auch affine Bündel ($\mathbb{R}^n \times (S^1)^m$ -Bündel) über Q erlaubt.*

Das Lemma folgt sofort aus den beiden Notizen:

Notiz 7 *Ist $c : F \rightarrow B$ lokal isomorpher Homomorphismus von Faserbündeln über Q (d.h. längs Q triviale Überlagerung), dann erzeugen $\eta \in Z^1(B)$ und $c^*\eta$ die gleiche Lagrangimmerion $i_\eta = i_{c^*\eta}$.*

In der Tat, es ist $c : c^*\Sigma_\eta = \Sigma_{c^*\eta} \rightarrow \Sigma_\eta$ Überlagerung und damit Lift von

$$\Sigma_{c^*\eta} \xrightarrow{\sim c^*\eta} \text{im } c^*\eta \cap c^*C \subset (\rho c)^*T^*Q \longrightarrow T^*Q$$

auf die deckende Komposition (14). □

Notiz 8 *Generierende auf einem Vektorraumbündel F über Q sind äquivalent zu solchen auf $Q \times \mathbb{R}^s$*

In der Tat, $\phi \in C^\infty(F)$ ist stabil äquivalent zu $\phi \boxplus g$ bezüglich einer Metrik g auf dem inversen Bündel $-F$, also $Z^1(F) \ni \eta \sim \eta \boxplus dg \in Z^1(Q \times \mathbb{R}^s)$. □

2 Kurzwellenasymptotik

2.1 Oszillatorische Distributionen und Symbole

2.1.1 Das Prinzip von Huygens

Grundbausteine der Kurzwellenasymptotik ([BW95],[Mei90],[Röm94]) sind die *WKB-Wellen*, d.h. Funktionsfamilien der Form $e^{-iS/\lambda}a$, wobei $S \in C^\infty(Q)$, $a \in C^\infty(Q)[[\lambda]]$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ der *semiklassische Parameter* der Familie ist, der die Wellenlänge relativ zu charakteristischen Distanzen des Systems beschreibt. Wir betrachten nun das Verhalten ihrer Superposition

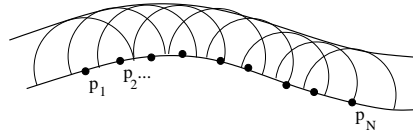
$$I(\phi, a)(q) := \int_{\xi \in \mathbb{R}^k}^* e^{i\phi(q, \xi)/\lambda} a(q, \xi) d^k \xi \quad (27)$$

im Kurzwellenlimes $\lambda \rightarrow 0$, wobei a kompakten Träger in ξ habe und „*“ am Integralzeichen den Vorfaktor $e^{-\frac{ik\pi}{4}}(2\pi\lambda)^{-\frac{k}{2}}$ bezeichne.

Wir nehmen zunächst an, ϕ besitze genau einen kritischen, nicht entarteten Punkt pro Faser $q = \text{konst}$, so dass die kanonische Projektion $\rho : Q \times \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ die faserkritische Mannigfaltigkeit $\Sigma_\phi = \{\partial_\xi \phi = 0\}$ diffeomorph auf Q abbildet. Dann ist

$$\text{env}_\phi := \phi \circ \rho|_{\Sigma_\phi}^{-1}$$

die *Einhüllende* der Schar, denn env_ϕ stimmt per Definition in jedem Punkt q mit genau einer der Scharfunktionen im 1-Jet längs Q (Phase und Wellenvektor) überein.



Einhüllende Wellenfront einer Schar von Elementarwellen (isotropen WKB-Wellen) mit Zentren p_i

Der folgende Satz verallgemeinert dann das **Prinzip von Huygens** („Wellenfronten sind Einhüllende ihrer Elementarwellen“):

Satz 9 (Stationäre Phase) *Ist Σ_ϕ projizierbar, so ist $I(\phi, a)$ asymptotisch äquivalent¹⁴ zu einer WKB-Welle mit Phase env_ϕ , genauer gilt:*

$$I(\phi, a) \sim e^{\frac{i}{\lambda}\phi} e^{-\frac{i\pi}{2}} \text{ind } \partial_\xi^2 \phi \left(\frac{a}{\sqrt{|\det \partial_\xi^2 \phi|}} + O(\lambda) \right) \circ \rho|_{\Sigma_\phi}^{-1}.$$

¹⁴Zwei durch $\lambda \in \mathbb{R}^+$ paramtrisierte Funktionen f_λ, g_λ heißen **asymptotisch äquivalent**, wenn $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-N}(f_\lambda - g_\lambda) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis nach [CdV], [Röm94]: O.E. sei $\Sigma_\phi = Q \times \{0\}$. Nach dem Morselemma 9 gibt es eine auf Σ_ϕ triviale Eichtransformation g , so dass $\phi(q, g(\xi, q))$ Normalform $\phi(q, 0) + \frac{1}{2}Q(\xi)$ hat für eine reguläre Quadratform Q . Durch Deformation $Q_\epsilon := Q + i\epsilon\mathbf{1}$ erhalten wir die Fouriertransformierte \mathcal{F} der zugehörigen Phasenfunktion in den Fasern $q = \text{konst}$

$$\mathcal{F}e^{-\frac{i}{2\lambda}Q_\epsilon} = \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det iQ_\epsilon}} e^{-\frac{i}{2}\lambda Q_\epsilon^{-1}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{i\pi}{2} \text{ind } Q} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}} e^{\frac{in\pi}{4}}}{\sqrt{|\det \partial_\xi^2 \phi(q, 0)|}} e^{-\frac{i}{2}\lambda Q^{-1}}$$

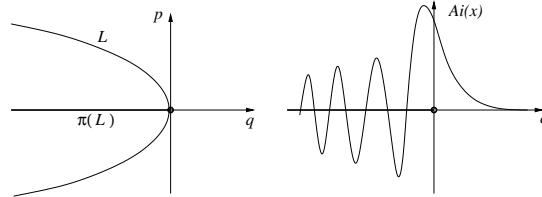
Damit folgt der Satz aus den Eigenschaften von \mathcal{F} , d.h. der „Unitarität“ von \mathcal{F} , $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} = \mathcal{F}\delta$ und $e^{Q^{-1}}\mathcal{F} = \mathcal{F}e^{Q^{-1}(\partial)}$. \square

In Termen der generierenden Funktionen aus Abschnitt 1.3.2 interpretieren wir env_ϕ als reduzierte Generierende der Lagrangeimmersion i_ϕ bezüglich der Faserung ρ . Ist nun ϕ eine generierende Funktion mit Kaustik, divergiert die Amplitude $\frac{a}{\sqrt{|\det \partial_\xi^2 \phi|}}$ in Satz 9 bei Annäherung an die Kaustik. In der Tat gibt es dann keine Asymptotik obiger Form, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: $\phi(q, \xi) = \frac{\xi^3}{3} + \xi q$ generiert $L = \{(-q^2, q)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit A_2 -Kaustik 0. Dann ist

$$Ai_\lambda(q) := \frac{1}{2\pi} \int e^{\frac{i}{\lambda}\phi(q, \xi)} d\xi = \lambda^{-\frac{1}{6}} Ai(\lambda^{-\frac{2}{3}}q)$$

eine Reskalierung der *Airyfunktion* $Ai := Ai_1 \in S'(\mathbb{R})$ mit rationalen λ -Potenzen ($Ai(q)$ konvergiert durch kleine komplexe Verformung des Integrationsweges \mathbb{R} bei ∞ in Richtung $+i$, vgl. [CdV]):



Schreiben wir $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ in der Form $b(q) + c(q)\xi + (\xi^2 + q)r(q, \xi)$ für $b, c, r \in C^\infty$, erhält man allgemeiner durch partielle Integration die asymptotische Entwicklung $I(\phi, a) \sim f.Ai_\lambda + \lambda g Ai'_\lambda$ mit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})[[\lambda]]$, die gemäß Abschnitt 1.3.3 universell ist für einfache Kaustiken.

Um die stationäre Phase auch auf Generierende mit Kaustiken anzuwenden, betrachtet man $I(\phi, a)$ im Sinne von Distributionen: Ist $e^{-\frac{i}{\lambda}S}b \in C_0^\infty(Q)$ WKB-Testfunktion, so dass sich L_S und L_ψ transversal in Punkten $i_\psi(x_j)$ schneiden, so sind die x_j nach Notiz 5 die kritischen (und nicht-entarteten)

Punkte von $\psi - S := \psi - \rho^*S$, also folgt aus Satz 9: $\langle I(\psi, a), e^{-\frac{i}{\lambda}S}b \rangle \sim$

$$\sum_{i_\phi(x_j) \in L_\phi \cap L_S} e^{\frac{i}{\lambda}(\psi-S)(x_j)} e^{-\frac{i\pi}{2} \text{ind}(\psi-S)''(x_j)} \left(\frac{ab(x_j)}{|\det(\psi-S)''(x_j)|^{\frac{1}{2}}} + O(\lambda) \right) \quad (28)$$

Das legt folgende Lokalisierung allgemeiner Distributionsfamilien $I_\lambda \in \mathcal{D}'(Q)$ im Phasenraum T^*Q nahe:

$z \in T^*Q$ liege genau dann nicht im *Mikroträger* $WF(I_\lambda) \subset T^*Q$ von I_λ , falls es eine z -Umgebung U gibt, so dass asymptotisch gilt:

$$\langle I_\lambda, e^{iS/\lambda}a \rangle \sim 0 \quad (29)$$

für alle *WKB*-Testfunktionen $e^{iS/\lambda}a$ mit $dS(\text{supp } a) \subset U$. Insbesondere ist also

$$WF(I(\psi, a)) = \text{supp}(a \circ i_\psi^{-1}) \subset \overline{L_\psi}.$$

Ist nun L beliebige Lagrangemannigfaltigkeit in T^*Q , so ist der Raum *oszillatorischer Distributionen* $O^m(L)$ konzentriert auf L definiert als Raum der Distributionsfamilien $I_\lambda \in \mathcal{D}'(Q)$, die *mikrolokal* auf T^*Q überdeckenden Gebieten U_i von der Form $I(\phi_i, a_i)$ mit $WF(I(\phi_i, a_i)) \subset \overline{L}$ und $a_i \in \lambda^m C^\infty(Q)[[\lambda]]$ sind, d.h.

$$WF(I_\lambda - I(\phi_i, a_i)) \cap U_i = \emptyset$$

erfüllen. Wir wollen nun die stationäre Phase für solche oszillatorische Distributionen geometrisch formulieren.

2.1.2 Die geometrische Interpretation der stationären Phase

Duistermaats Interpretation der Wurzeln. Der Raum der α -Dichten $|\wedge|^\alpha V$ auf einem n -dimensionalen Vektorraum V besteht aus komplexwertigen Funktionen a auf der Menge der V -Basen mit der Eigenschaft

$$a(\phi e_1, \dots, \phi e_n) = |\det \phi|^\alpha a(e_1, \dots, e_n) \quad \forall \phi \in \text{Aut } V. \quad (30)$$

Insbesondere ist also $\dim_{\mathbb{C}} |\wedge|^\alpha V = 1$ und wir haben kanonische Isomorphismen

1. $|\wedge|^\alpha V \otimes |\wedge|^\beta V \cong |\wedge|^{\alpha+\beta} V$ durch $(a, b) \mapsto ab$,
2. $|\wedge|^\alpha(V \oplus V') \cong |\wedge|^\alpha V \otimes |\wedge|^\alpha V'$ induziert durch das \wedge -Produkt,
3. $|\wedge|^\alpha(V^*) = |\wedge|^{-\alpha} V$ durch Übergang zur dualen Basis.

Bemerke, dass infolge des Betrags in (30) α -Dichten orientierungsunabhängig sind. In Verallgemeinerung von n -Formen sind somit 1-Dichten $\Gamma |\wedge|^{\frac{1}{2}} TQ$

auch auf nicht-orientierbaren n -Mannigfaltigkeiten Q integrierbar. Wir nehmen an, eine solche Dichte $|dq|$ sei durch eine Riemannsche Metrik (kinetische Energie) auf Q vorgegeben. Identifizieren wir nun die oszillatorischen Distributionen auf Q mit distributionellen Halbdichten via Multiplikation mit $|dq|^{\frac{1}{2}}$, so so haben die Wurzeln in ihrer asymptotischen Entwicklungen nach Satz 9 bzw. (28) natürliche Interpretationen im Rahmen von Halbdichten auf L_ϕ :

In der Tat induziert der Isomorphismus $\partial_\xi^2 \phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k*}$ in Satz 9 die Identität $|d\xi|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\det \partial_\xi^2 \phi} |d\xi^*|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\det \partial_\xi^2 \phi} |d\xi|^{-\frac{1}{2}}$, d.h.

$$i_\phi^* a^\phi := a |d\xi| |dq|^{\frac{1}{2}}|_{\Sigma_\phi} = \left(\frac{a}{\sqrt{\det \partial_\xi^2 \phi}} \circ \rho|_{\Sigma_\phi} \right) |dq|^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Damit definiert der auf Σ_ϕ beschränkte Integrand eine Halbdichte a^ϕ auf L_ϕ und die Wurzel der asymptotischen Entwicklung erscheint als Artefakt ihrer Projektion π auf Q . In Verallgemeinerung von (31) definiert aber *jede* Lagrangeimmersion zu einer generierenden Funktion ϕ über die exakte Sequenz

$$T\Sigma_\phi \hookrightarrow T_{\Sigma_\phi}(Q \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{T\partial_\xi \phi} \text{im } T\partial_\xi \phi \quad (32)$$

von Vektorraumbündeln über Σ_ϕ nach 1.,2.,3. einen kanonischen Isomorphismus

$$\left(|\bigwedge|^{\frac{1}{2}} TQ \otimes |\bigwedge|^1 \mathbb{R}^n \right)|_{\Sigma_\phi} \cong |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} T\Sigma_\phi. \quad (33)$$

Analog lässt sich der Faktor $\sqrt{\det(\psi - S)''}$ als Verhältnis von a^ψ zu jener Halbdichte auf L_ψ interpretieren, welche die Projektion von $T_{L_\psi} T^*Q$ längs TL_S auf die Vertikale induziert (d.h. den pullback von $|dp|^{\frac{1}{2}} = |dq|^{-\frac{1}{2}}$ mittels $\partial_q(\psi - S)$). Diese Interpretation lässt sich auf die Reduktion in Lemma 3 verallgemeinern: Ist zunächst (Z, ω) symplektischer Vektorraum mit Lagrangeschen und koisotropen Unterraum L und C , so induziert die Reduktion $L_C = L \cap C / L \cap C^\perp$ von L die exakte Sequenz

$$L \cap C \xhookrightarrow{l \mapsto (l, l)} L \oplus C \xrightarrow{(l_1, l_2) \mapsto l_2 - l_1} Z \twoheadrightarrow \frac{Z}{L+C} \cong L \cap C^\perp. \quad (34)$$

Die Isomorphismen 1.,2.,3. und die von ω induziert Halbdichte auf Z liefern dann einen kanonischen Isomorphismus (vgl. [BW95, 6.1])

$$|\bigwedge|^{\frac{1}{2}} C \otimes |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} L = |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} L_C \otimes |\bigwedge|^1(L \cap C^\perp). \quad (35)$$

Ist nun C reduzierbare koisotrope Mannigfaltigkeit in T^*Q , die eine Lagrangeimmersion L cleanly schneidet, und V das Vertikalbündel an die

Faserung $L \cap C \rightarrow C/\sim$ wie in Lemma 3, erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mu : \bigwedge |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} TC \otimes \bigwedge |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} TL \cong \bigwedge |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} T(L_C) \otimes \bigwedge |^1 V. \quad (36)$$

Die faserweise Integration liefert somit eine natürliche Abbildung von Halbdichten über L, C auf L_C .

Damit lässt sich (28) auf den Fall verallgemeinern, dass sich L_ϕ und L_ψ nur cleanly in zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten W_j schneiden. Nach Notiz 5 ist dann auf W_j die Phasendifferenz $\Phi(W_j) := (\phi \circ i_\phi^{-1} - \psi \circ i_\psi^{-1})|_{W_j}$ konstant, ebenso $\text{ind}(W_j) := (\phi - \psi)''|_{\Sigma_{\phi-\psi}^{(j)}}$. Die zu den Amplituden a, b assoziierten Halbdichten a^ϕ, a^ψ induzieren nach (36) 1-Dichten $\mu_j(a^\phi, b^\psi)$ auf W_j und (28) verallgemeinert sich auf

$$\int_Q^* I(\phi, a) \overline{I(\psi, b)} = \sum_j e^{\frac{i}{\lambda} \Phi(W_j)} e^{\frac{i\pi}{2} \text{ind}(W_j)} \left(\int_{W_j}^* \mu_j(a^\phi, b^\psi) + O(\lambda^{1 - \frac{\dim W_j}{2}}) \right) \quad (37)$$

Maslovs Interpretation der Phasen. Seien nun $I_i := I(\phi_i, a_i) \in O^0(L)$ mikrolokale Repräsentanten einer auf L konzentrierten oszillatorische Distribution. Wir können o. E. annehmen, dass die Schnitte ihrer Mikroträger $\overline{U_{ij}} := WF(I_i) \cap WF(I_j)$ projizierbar und kaustikenfrei sind. Nach Satz 9 und (31) ist dann $(I_i - I_j)|_{\pi(U_{ij})} \in O^1(U_{ij})$ genau dann, wenn auf U_{ij} gilt:

$$(a_i^{(0)})^{\phi_i} = (a_j^{(0)})^{\phi_j} c_{ij}, \quad c_{ij} := e^{\frac{i}{\lambda} (\phi_i \circ i_{\phi_i}^{-1} - \phi_j \circ i_{\phi_j}^{-1})} e^{-\frac{i\pi}{2} (\text{ind} \partial_{\xi_i}^2 \phi_i \circ i_{\phi_i}^{-1} - \text{ind} \partial_{\xi_j}^2 \phi_j \circ i_{\phi_j}^{-1})}, \quad (38)$$

wobei $a_i^{(0)} := (a_i \bmod O(\lambda))$. Wie interpretieren nun die Phasen c_{ij} als Verklebungsfunktionen eines S^1 -Prinzipalbündels über L , dem **Phasenbündel** $\Phi_\lambda(L)$. Nach dem Satz von Hörmander 4 sind die c_{ij} lokal konstant, folglich besitzt $\Phi_\lambda(L)$ einen flachen Zusammenhang, und ist als flaches Bündel nach Lemma 38 charakterisiert durch die Holonomieklassse $\text{hol}(\Phi_\lambda(L)) \in H^1(L, S^1)$. Explizit ist per Konstruktion das Phasenbündel das Produkt aus

1. dem durch den Kozykel $\left\{ \exp\left(\frac{i}{\lambda} (\phi_i \circ i_{\phi_i}^{-1} - \phi_j \circ i_{\phi_j}^{-1})\right) \right\}$ definierten flachen Bündel Φ_1 , dessen „Holonomiephase“ $\log \text{hol}(\Phi_1)$ nach (13) die Liouvilleklasse $[\theta|_L] \in H^1(L, \mathbb{R})$ relativ zu λ ist,
2. dem durch den Kozykel $\left\{ \exp\left(-\frac{i\pi}{2} (\text{ind} \partial_{\xi_i}^2 \phi_i \circ i_{\phi_i}^{-1} - \text{ind} \partial_{\xi_j}^2 \phi_j \circ i_{\phi_j}^{-1})\right) \right\}$ definierten flachen Bündel mit Strukturgruppe \mathbb{Z}_4 , dessen Holonomiephase die Phasensprünge an den Kaustiken zählt und nach nach Abschnitt 1.5.1 gerade durch die Maslovklasse $\mu := \mu(TL, \ker T_L \pi) \in H^1(L, \mathbb{Z})$ gegeben ist. Also folgt:

$$\text{hol}(\Phi_\lambda(L)) = \exp\left(\frac{1}{\lambda}[\theta] - \frac{\pi}{2}\mu\right). \quad (39)$$

Wir definieren nun den Vektorraum $\mathcal{S}(L)$ der (Prinzipal-)Symbole auf L als Produkt von (komplexen) Halbdichten mit *konstanten* Schnitten des zum Phasenbündel assoziierten Linienbündels $\Phi_\lambda(L) \times_{S^1} \mathbb{C}$:

$$\mathcal{S}(L) := \Gamma_{\text{konst}}(\Phi_\lambda(L) \times_{S^1} \mathbb{C}) \otimes_{C^\infty(L)} \Gamma \bigwedge^{\frac{1}{2}} L.$$

$\mathcal{S}(L)$ ist also nur dann nicht-trivial, wenn $\Phi_\lambda(L)$ trivial ist, in anderen Worten die **Maslov-Bedingung**

$$\text{hol}(\Phi_\lambda(L)) = 0 \quad (40)$$

erfüllt ist. Zusammenfassend formulieren wir nun (38) als:

Lemma 18 *Sei $\text{hol}(\Phi_\lambda(L)) = 0$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$s : O^m(L)/O^{m+1}(L) \cong \lambda^m \mathcal{S}(L) \quad \square$$

2.1.3 Symbolklassen von Hörmander

Eine Mannigfaltigkeit M mit einer freien eigentlichen (\mathbb{R}_+, \cdot) -Aktion (ein \mathbb{R}^+ -Prinzipalbündel) heißt *konisch*. $T^*Q - 0$, $Q \times \mathbb{R}^k - 0$ haben (wie jedes Vektorraumbündel ohne Nullschnitt) eine natürliche konische Struktur gegeben durch Homothetien der Fasern. Ist nun die generierende Funktion $\phi(q, \xi)$ positiv homogen vom Grad 1 in ξ , d.h. $\phi(q, r\xi) = r\phi(q, \xi)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$, so ist Σ_ϕ konisch und die Lagrangeimmersion $i_\phi \rightarrow L_\phi$ kommutiert mit den \mathbb{R}^+ -Aktionen. Insbesondere erzeugen die in ξ linearen Generierenden $\phi(q, \xi) = \sum_i g_i(q)\xi^i$ gerade die Konormalbündel über $\{g_i(q) = 0\}$; und andere Beispiele gibt es erst ab Dimension $\dim Q \geq 2$.

Eine Funktion s auf einer konischen Mannigfaltigkeit Z heißt nun von der Klasse S^l , falls für beliebige Folgen \mathbb{R}_+ -invarianter Vektorfelder V_i gilt:

$$V_1 \dots V_N s(rz) \leq C_z |1+r|^l \quad \text{für } z \in Z, \mathbb{R}^+ \ni r \rightarrow \infty. \quad (41)$$

In Bündelkarten entspricht das Abschätzungen

$$\sup_{x \in K, \xi \in \mathbb{R}^k} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x, \xi)| = C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{l - |\beta|}$$

für alle Kompakta K und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, welche den S^l eine Fréchet-Topologie verleihen.

Oszillatorische Distributionen und Symbole vom Typ (m, l) (vgl. [CdV]). Sei nun in (27) die generierende Funktion $\phi(q, \xi)$ positiv homogen vom Grad 1 in ξ , so dass L_ϕ eine natürliche konische Struktur hat; und a vom Typ $S^{m, l}$, d.h. $a_\lambda = \lambda^m \sum_{i=0}^\infty \lambda^i a_i$ mit $a_i \in S^{l-i}$. Dann ist $I(\phi, a)$

wohldefiniert als Distribution, und wir bezeichnen den Vektorraum von Distributionen, die bis auf einen konstanten Phasenfaktor $e^{ic/\lambda}$ von dieser Form sind, mit $O^{m,l}(L_\phi)$. (Der Phasenfaktor garantiert dabei nach dem Satz von Hörmander, dass $O^{m,l}(L_\phi) \sim O^{m,l}(L_\psi)$ für $L_\phi = L_\psi$.)

Für beliebige konische Lagrangemannigfaltigkeiten L definieren wir den Unterraum $O^{m,l}(L)$ von $O^m(L)$ wieder als Distributionsfamilien I_λ , die mikrolokal von der Form $I \in O^{l,m}(L_\phi)$ sind. Ist nun $\mathcal{S}(L)^l$ der Raum der Symbole der Klasse S^l , liefert s wieder kanonische Isomorphismen

$$O^{m,l}(L)/O^{m+1,l-1}(L) \cong \lambda^m \mathcal{S}^l(L), \quad (42)$$

falls $\text{hol}(\Phi_\lambda(L)) = 0$.

2.1.4 Symbolkalkül

Wir betrachten das Verhalten der Symbole bzw. separat das der Phasenbündel und Halbdichten unter Standardoperationen auf oszillatorischen Distributionen.

1. **Konjugation.** Die komplexe Konjugation entspricht der Bewegungsumkehr (symplektischen Konjugation $T^*Q \rightarrow \overline{T^*Q}$): Ist $I \in O^{m,l}(L)$, so ist $\bar{I} \in O^{m,l}(\bar{L})$ mit offensichtlicher Transformation der Symbole.
2. **Produkt.** Das (distributionelle) Tensorprodukt induziert das kartesische Produkt der Mikroträger

$$O^{m_1,l_1}(L_1) \otimes O^{m_2,l_2}(L_2) \cong O^{m_1+m_2,l_1+l_2}(L_1 \times L_2)$$

und kanonische Isomorphismen $\phi(L_1 \times L_2) \cong \phi(L_1) \boxtimes \phi(L_2)$ bzw. $\wedge : |\wedge|^{\frac{1}{2}}(L_1 \times L_2) \xrightarrow{\sim} |\wedge|^{\frac{1}{2}}L_1 \otimes |\wedge|^{\frac{1}{2}}L_2$.

3. **Komposition.** Seien I_1, I_2 zwei oszillatorische Distributionen konzentriert auf Lagrangemannigfaltigkeiten $L_1 \subset Q'' \times Q'$ bzw. $L_2 \subset Q' \times Q$, deren Schwartztransformierte $s(L_i)$ verknüpfbar (vgl. 1.4.1) und deren Projektionen auf Q' (zur Wohldefiniertheit des folgenden Integrals) eigentlich seien. Dann ist die *Komposition*

$$I_1 \circ I_2 := \int_{Q'}^* I_1 I_2 \quad (43)$$

oszillatorische Distribution konzentriert auf der Lagrangemannigfaltigkeit $s(s(L_1) \circ s(L_2))$: Deren Generierende sind ja nach (18) Summe der Generierenden von L_1, L_2 entsprechend der Phasenaddition in (43), und diese Summenbildung induziert eine kanonische (d.h. dank des Satzes von Hörmander 4 von der Wahl der Generierenden unabhängige) Abbildung $\phi(s(L_1) \times s(L_2)) \rightarrow \phi(s(L_1 \circ L_2))$.

Sei nun weiter $L := L_1 \times L_2$ und $C = T^*Q'' \times \text{graph}(id_{T^*Q'}) \times \overline{T^*Q}$. Die symplektische Form auf T^*Q induziert dann eine natürliche Halbdichte auf C , und die Faserintegration in (36) liefert so eine natürliche Abbildung

$$|\bigwedge|^{\frac{1}{2}} T(s(L_1) \times s(L_2)) \rightarrow |\bigwedge|^{\frac{1}{2}} T s(L_1 \circ L_2). \quad (44)$$

2.2 Pseudodifferentialoperatoren

Ein *Fourierintegraloperator* (FIO) vom Typ (m, l) assoziiert zur konischen kanonischen Relation $L \subset \overline{T^*Q} \times T^*Q'$ (vgl. 1.4.1) ist ein linearer Operator $K \circ : C_0^\infty(Q) \rightarrow \mathcal{D}'(Q')$, dessen Schwartzkern K auf $s(L)$ konzentrierte oszillatorische Distribution $K \in O^{m, l}(s(L))$ ist. Die Aktion auf oszillatorischen Distributionen und das Produkt von Fourierintegraloperatoren sind damit Beispiele der Komposition (43), in denen (44) dem pushforward mit χ entspricht, falls $L = \text{graph}(\chi : Q \rightarrow Q')$ ist.

Pseudodifferentialoperatoren (Ψ DO) vom Typ $\Psi^{m, l}$ sind Fourierintegraloperatoren der Ordnung (m, l) assoziiert zur Identität id_{T^*Q} , deren Prinzipalsymbol λ -unabhängig ist. Das unterstellt die Trivialität des Phasenbündels (Schnitt Eins), in der Tat lässt sich die Identität global erzeugen: Sei ∇ der Levi-Cevita-Zusammenhang bezüglich der Riemannmetrik auf Q und \mathcal{O} eine Umgebung des TQ -Nullschnitts, so dass $(\pi_Q, \exp) : \mathcal{O} \rightarrow Q \times Q$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung \mathcal{O}' der Diagonale ist. Die Generierende der Identität $S_{id}(q, q', p) = (q' - q) \cdot p$ im \mathbb{R}^n (19) verallgemeinert sich dann auf

$$S_{id} : (T_0^*Q \times T^*Q) \cap T^*\mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R} : (q, q', p_q) \mapsto p_q \cdot \exp_q^{-1}(q').$$

$L_{S_{id}}$ ist das Konormalenbündel der Diagonale von $Q \times Q$ und damit kanonisch isomorph zu T^*Q , folglich können wir den Symbolraum $\mathcal{S}^l(L_{S_{id}})$ mit Funktionen $S^l(T^*Q)$ auf dem Phasenraum identifizieren. Modulo Glättungsoperatoren $\bigcap_{m, l} \Psi^{m, l}(Q)$ hat also jeder Ψ DO $A \in \Psi^{l, m}$ einen Kern der Form

$$K_A(q, q') = (2\pi\lambda)^{-n} \int_{T_q^*Q} e^{-\frac{i}{\lambda} \exp_q^{-1}(q') \cdot p_q} a(q, p_q) \chi_{\mathcal{O}'}(q, q') |dp| \quad (45)$$

für ein eindeutiges¹⁵ $a \in S^{l, m}(T^*Q)$. Wir schreiben $A = Op(a)$ und identifizieren den führenden Term $\sigma_p(A)$ mit dem Prinzipalsymbol $s(A)$.

Lokale Betrachtung Nach dem Symbolkalkül sind Ψ DO *pseudolokal*, d.h. $WF(Au) \subset WF(u)$ für alle Ψ DO A und oszillatorische Testfunktionen u . Man kann daher Ψ DO auf Mannigfaltigkeiten durch Einschränkung

¹⁵vgl. Abschnitt 2.2.2

von ΨDO auf dem \mathbb{R}^n oder Verwendung lokaler Karten gewinnen. Auch deshalb lohnt es sich, zuerst den Fall $Q = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Gegenüber (45) kann man hier auf eine Abschneidefunktion verzichten, d.h.

$$K_A(q, q') = (2\pi\lambda)^{-n} \int e^{\frac{i}{\lambda}(q-q') \cdot p} a(q, p) d^n p \quad (46)$$

K_A ist offenbar faserweise λ -Fouriertransformierte von a , folglich ist a polynomial in p vom Grad $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ genau dann, wenn $Op(a)$ Differentialoperator der Ordnung l ist, was die Namensgebung rechtfertigt:

$$a(q, p) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{|\alpha|!}{|\alpha|!} \partial_p^\alpha a(q, 0) p^\alpha \iff Op(a) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{|\alpha|!}{|\alpha|!} \partial_p^\alpha a(q, 0) (i\lambda\partial)^\alpha. \quad (47)$$

Die suggestive Schreibweise $Op(a)u(q) = a(q, i\lambda\partial)u(q)$ unterstellt jedoch infolge der Nicht-Kommutativität $\sigma([q^j, i\lambda\partial_k]) = \{q^j, p_k\} = \delta_k^j$ die Vorgabe einer *Ordnungsvorschrift*, nämlich die Standardordnung, welche alle Impulsoperatoren nach rechts schreibt. Man definiert allgemeiner für $\tau \in [0, 1]$ die τ -geordnete Quantisierung eines Symbols $a \in S^{m,l}(T^*\mathbb{R}^n)$ durch den ΨDO

$$Op_\tau(a)u(q) = (2\pi\lambda)^{-n} \int e^{-\frac{i}{\lambda}v \cdot p} a(q + \tau v, p) u(q + v) d^n v d^n p. \quad (48)$$

Für $\tau = 1$ erhalten wir $Op(a)$ via der Transformation $(q, v) = (q, q' - q)$ zurück, $\tau = 0$ entspricht der Anti-Standardordnung und $\tau = \frac{1}{2}$ der symmetrisierten Ordnung (*Weylordnung* Op_W), vgl. 2.2.1.

τ -Ordnung auf beliebigen Mannigfaltigkeiten Q . In Verallgemeinerung von (48) definiert man nun $Op_\tau(a)u(q) :=$

$$\frac{1}{(2\pi\lambda)^n} \int_{T_q^*Q \times T_qQ} e^{-\frac{i}{\lambda}p_q \cdot v_q} a \left(T_{\exp_q(\tau v_q)}^* \exp_q^{-1} v_q \right) u(\exp_q v) \chi_{\mathcal{O}_q}(v_q) |dp_q| |dv_q| \quad (49)$$

für $a \in S^{m,l}(T^*Q)$ sowie das τ -geordnete Symbol durch $\sigma_\tau Op_\tau a = a$.

Durch die Transformation $\exp_q^{-1}(q') = -v_q$ erhält man wieder (45) bis auf die Jacobideterminante, welche gegenüber dem \mathbb{R}^n zusätzlich auftritt (und im Symbol absorbiert werden kann), vgl. [Pff98].

2.2.1 Symbolkalkül von ΨDO

1. (*Prinzipalsymbol*) Im Gegensatz zum vollständigen Symbol ist das Prinzipalsymbol $\sigma_p(A)$ τ -unabhängig und natürlich unter Diffeomorphismen von Q :

$$\sigma_p(Op(a) \circ \phi) = \sigma_p(Op(T^*\phi^{-1}a))$$

2. (*Standardsymbol*) Sei $u \in C_0^\infty(Q)(\lambda)$, $D^k u$ die symmetrisierte k -fache kovariante Ableitung und $J_p^\infty f := \sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha} dp^\alpha$ der faserweise ∞ -Jet von $f \in C^\infty(T^*Q)$. Dann hat $Op_S(f)u$ in Verallgemeinerung von (47) die asymptotische Entwicklung

$$Op_S(f)u \sim J_p^\infty f|_0 \cdot e^{-i\lambda D} u. \quad (50)$$

(vgl. [Wid80]). Definieren wir das τ -geordnete Sternprodukt durch $f \star_\tau g := \sigma_\tau(Op_\tau(f)Op_\tau(g))$ schreibt sich dies als ([BNPW03]):

$$Op_S(f)u \sim \iota^*(f \star_S \pi^* u), \quad (51)$$

wobei ι die kanonische Einbettung von Q als Nullschnitt in T^*Q bezeichnet.

3. (*Adjunktion*) $\sigma_\tau(A^*) = \sigma_{1-\tau}(A)$, insbesondere gilt $\sigma_W(A^*) = \sigma_W^*(A)$ für das *Weylsymbol* $\sigma_W(A) = \sigma_{\frac{1}{2}}(A)$. Sein Term zweithöchster Ordnung, das **Subprinzipalsymbol** σ_{sub} , ist sogar natürlich bezüglich volumen-erhaltender Diffeomorphismen (s. [Mei90], [CdV]) und erfüllt die Identität

$$\sigma_{sub}\left(\frac{i}{\lambda}[A, B]\right) = \{\sigma_p(A), \sigma_{sub}(B)\} + \{\sigma_{sub}(A), \sigma_p(B)\}. \quad (52)$$

4. (*Übergang zwischen verschiedenen τ -Ordnungen*) Sei $\Delta := \partial_{p_i} \cdot \partial_{q^i}^h$ der kanonische Laplaceoperator, wobei $^h : TQ \rightarrow TT^*Q$ den horizontalen Lift (vgl. [Wal99] B.3.1) bezüglich des Levi-Cevita-Zusammenhangs bezeichne, dann hängen die τ -Symbole nach [Neu98] zusammen durch

$$\sigma_\tau(A) = \exp(i\lambda(\tau - \kappa)\Delta)\sigma_\kappa(A).$$

5. (*formale Invertierbarkeit*) f ist als *formale* Potenzreihe in λ genau dann \star -invertierbar in $z \in T^*Q$, falls $f_0(z) \neq 0$ ([Ros96]); $Op(f)$ heißt dann *elliptisch* in $z \in T^*Q$.

2.2.2 Vergleich mit Hörmanders Symbolkalkül

Die homogenen Ψ DO und assoziierten Symbole von Hörmander [Hör83] erhält man aus unseren durch Fixierung $\lambda = 1$, umgekehrt lassen sich die meisten asymptotischen Resultate aus den homogenen durch die Ersetzung $p \mapsto \frac{1}{\lambda}p$ in den Exponenten gewinnen. Dem semiklassischen Limes $\lambda \rightarrow 0$ entspricht somit bei Hörmander der Limes $p \rightarrow \infty$. Definiert man B_q^*Q als die Kompaktifizierung von T_q^*Q durch die Hinzunahme der Sphäre bei ∞ und fasst gemäß(70) Symbole als Deformation von T^*Q auf, entsprechen die homogenen Symbole also einer Deformation der Sphären $B^*Q - T^*Q$. Infolge der Abschneidefunktion erhält man statt der Sequenz (42) im Allgemeinen auch nur noch eine Bijektion $\Psi^l/\Psi^{-\infty} \cong S^l/S^{-\infty}$. Insbesondere hat man folgende Korrespondenzen:

Mikroträger. Ausgehend von der Tatsache, dass die Fouriertransformation C^∞ - in schnell fallende¹⁶ Funktionen überführt, definiert Hörmander die *Wellenfrontenmenge* $WF_{\text{Hör}}$ einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ als Komplement der Punkte $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^n - 0$, für die es eine Testfunktion χ mit $\chi(q) \neq 0$ gibt, so dass $\mathcal{F}(\chi u)$ in einer konischen Umgebung von p schnell fällt. Dies erlaubt also die Lokalisierung des singulären Trägers von u in $T^*\mathbb{R}^n - 0$, d.h. $\pi(WF_{\text{Hör}}(u)) = \text{supp sing}u$; weiter überträgt sich die Definition dank der Natürlichkeit unter Diffeomorphismen $WF_{\text{Hör}}(\phi^*u) = T^*\phi(WF_{\text{Hör}}(u))$ auf beliebige Phasenräume $T^*Q - 0$.

Möchte man den Mikroträger oszillatorischer Distributionen analog definieren, muss man die C^∞ -Differenzierbarkeit von u verschärfen zur *Regularität* der Familie u_λ , d.h. es sollen dann außerdem alle $C^k(K)$ -Normen für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und Kompakta K schnell in λ fallen. Genau dann ist die in Karten definierte λ -Fouriertransformierte sogar in allen Punkten schnell in λ fallend, d.h. man hat

$$(q, p) \notin WF(u_\lambda) \iff \mathcal{F}_\lambda \chi u_\lambda(p) = O(\lambda^\infty)$$

für ein $\chi \in C_0^\infty$ mit $\chi(p) \neq 0$. Natürlicher im Sinne der Quantenmechanik ist die alternative Definition über Ψ DO (potenzielle Observablen): $z \notin WF(u_\lambda)$ genau dann, wenn ein in z elliptischer Ψ DO A existiert, so dass Au_λ regulär ist.

Glättungsoperatoren. Mit diesen Definition übertragen sich die Äquivalenzen

$$A \in \Psi^{-\infty} \iff K_A \in C^\infty \iff WF_{\text{Hör}}A = \emptyset,$$

welche die Bezeichnung der $A \in \Psi^{-\infty}$ als Glättungsoperatoren begründen, auf die λ -Versionen

$$A \in \bigcap_{m,l} \Psi^{m,l} \iff K_A \text{ regulär} \iff WF(K_A) = \emptyset.$$

Elliptizität Als Deformation der Sphären bei ∞ hängt die Invertierbarkeit homogener $A \in \Psi^l$ modulo Glättungsoperatoren nur noch vom homogenisierten Symbol

$$\sigma_{\text{hom}}(A)(p_q) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_p(A)(\lambda p_q)}{\lambda^l}$$

ab. Entsprechend heißt ein solches A elliptisch, wenn $\sigma_{\text{hom}}(A)$ auf $T^*Q - 0$ invertierbar ist, oder äquivalent: es einen Operator $B \in \Psi^{-l}$ gibt, so dass modulo Glättungsoperator $AB - 1 \sim BA - 1 \sim 0$ gilt.

¹⁶d.h. $f(p) \leq C|1 + p|^N \forall p \in \mathbb{R}^n, N \in \mathbb{N}$

2.2.3 Mikrolokale Normalform eines Ψ DO

Lemma 19 (Egorov) *Ist U elliptischer Fourierintegraloperator assoziiert zur kanonischen Transformation χ und A Ψ DO mit Prinzipalsymbol $\sigma_p(A)$, so ist $A(U) := U^{-1} \circ A \circ U$ Ψ DO mit Prinzipalsymbol $\sigma_p(A) \circ \chi$.*

In der Tat, aus dem Symbolkalkül 2.1.4 folgt, dass $A(U)$ Ψ DO und $\phi : \sigma_p(A) \mapsto \sigma_p(A(U))$ ein Algebrenhomomorphismus ist, anhand (69) und der stationären Phase ist dann klar, dass $\phi = \chi^*$. \square

Lemma 20 *Ist $A \in \Psi^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)$ Ψ DO, dessen Prinzipalsymbol reell ist und bei z eine nicht-entartete Nullstelle $d\sigma_p(A)(z) \neq 0$ hat, so ist A um z mikrolokal äquivalent zum Differentialoperator $P_k := Op(p_k) = -i\lambda\partial_k$, d.h. es gibt einen in Fourierintegraloperator U , so dass $\sigma(U^{-1}AU) = p_k$ ist.*

In der Tat, lokal gibt es eine linearisierende kanonische Transformation $\chi : (\sigma_p(A) \circ \chi)(q, p) = p_k$. Nach dem Lemma von Egorov ist also A auf Prinzipalniveau lokal konjugiert zu P_k : $A \sim P_k + A_1$ mit $A_1 \in \Psi^{1,\infty}$. Wir können nun iterativ die Ordnung i von A_i durch Konjugation von $(P_k + A_i)$ mit einem Ψ DO $C_i \in \Psi^{i,\infty}$ erniedrigen, indem wir Differentialgleichungen $\partial_k \sigma_p(C_i) = d$ der zugehörigen Symbole mod $O(\lambda^{i+1})$ lösen. \square

2.3 Semiklassische Differentialgleichungen

2.3.1 Eikonol- und Transportgleichung

Sei $H \in \Psi^{0,l}(Q)$. Wir betrachten die semiklassische Eigenwertgleichung

$$(H - E)u \sim 0 \quad (53)$$

in der Klasse oszillatorischer Distributionen $u \in O(L)$ modulo regulärer Lösungen $u : WF(u) = \emptyset$; und nehmen an, dass E regulärer Wert von $\sigma_p(H)$ ist, $\sigma_p^{-1}(H)(E)$ heißt dann *charakteristische Mannigfaltigkeit von $H - E$* . Lemma 20 garantiert dort die Existenz lokaler mikrolokaler Lösungen; wir wollen nun jedoch iterativ globale Lösungen finden.

Sei $\text{hol}\Phi_\lambda(L) = 0$ und entsprechend s nicht-triviales Prinzipalsymbol von $u|_{dq}^{\frac{1}{2}}$, dann ist nach dem Symbolkalkül auch $(H - E)u$ auf L konzentrierte oszillatorische Distribution mit Symbol $(\sigma_p(H) - E)|_L \cdot s$. Soll Letzteres verschwinden, muss also L in der charakteristischen Mannigfaltigkeit liegen:

$$\sigma_p(H)|_L = E \quad (54)$$

Für exakte projizierbare $L = \text{im } dS$ ist das gerade die **Eikonol** - bzw. **Hamilton-Jakobi-Gleichung** $\sigma_p(H) \circ dS = E$ assoziiert zum WKB-Ansatz $u = e^{\frac{i}{\lambda}S}b$. In diesem Fall erhält man durch partielle Integration, indem man

das Symbol in der Taylor-Form $\sigma(H-E)(q,p) = a(q,p) \cdot (p-dS(q))$ schreibt, die Entwicklung $(H-E)(e^{iS\lambda}b) =$

$$\left((iL_{\mathcal{X}_{\sigma_p(H)}} - \sigma_{sub}(H) + \frac{i}{2} \operatorname{div} \mathcal{X}_{\sigma_p(H)} \pi^* b) \circ dS + O(\lambda) \right) \lambda e^{iS\lambda}. \quad (55)$$

Dabei ist die Divergenz definiert bezüglich der von $|dq|$ auf (im dS) induzierten Dichte $dS_*|dq|$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{X}_{\sigma_p} \cdot (dS_*|dq|) &:= L_{\mathcal{X}_{\sigma_p}}(dS_*|dq|) \\ &= dS_*|d(i(\mathcal{X}_{\sigma_p})dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n)| \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial q_i \partial p^i} + dS_* \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial p_i \partial p_j} \right) dS_*|dq|. \end{aligned}$$

Via partieller λ -Fouriertransformation (partieller Legendretransformation der generierenden Phasen) kann man lokal jede Lagrangemannigfaltigkeit L als projizierbar annehmen. Besteht nun L aus klassischen Orbits zur Energie E und erfüllt weiterhin (40), dann liefert (53) nach (55) eine Bedingung für die Amplituden $\Gamma(|\wedge|^{\frac{1}{2}}L)$ längs der klassischen Bahnen, die sog. **homogene Transportgleichung**

$$(L_{\mathcal{X}_{\sigma_p(H)}} - i\sigma_{sub}(H))s = 0. \quad (56)$$

Dieses Verfahren lässt sich in der Tat bis zu beliebigen Ordnungen fortsetzen, vgl. [CdV],[Mei90].

2.3.2 Semiklassisches Cauchy-Problem

Wir betrachten nun die semiklassische Lösung $u(t, \cdot) := e^{-\frac{i}{\lambda}tH}u_0$ der Cauchy-Gleichung

$$i\lambda \frac{\partial}{\partial t} u \sim Hu, \quad u(t=0, \cdot) = u_0 \in O_0^0(L_0) \quad (57)$$

modulo regulärer Lösungen $u : WF(u) = \emptyset$. Dabei nehmen wir an, dass der zugehörige klassische Fluss $\phi^H := \phi^{\mathcal{X}_{\sigma_p(H)}}$ vollständig sei, die Lagrangemannigfaltigkeit L_0 transversal zu den ϕ^H -Orbits liege und die Maslovbedingung (40) erfülle. Dann ist auch ihre Bahn

$$L := \operatorname{im} \{ \Phi : L_0 \times \mathbb{R} \rightarrow T^*(Q \times \mathbb{R}) : (l, t) \mapsto (\phi_t(l), t, -\sigma_p(H)(l)) \}$$

Lagrangemannigfaltigkeit (im erweiterten Phasenraum) und erfüllt die Maslovbedingung (L_0 ist ja starker Deformationsretrakt); zudem liegt L in der charakteristischen Mannigfaltigkeit $\{H-E=0\} \subset T^*(Q \times \mathbb{R})$. Aus (56) und 2.1.2,2 folgt so:

Lemma 21 *Die Lösung u des Cauchyproblems ist auf die Bahn L konzentrierte oszillatorische Distribution, deren Symbol gegeben ist durch*

$$\Phi^* s(u)(l, t) = s(u_0)(l) \exp \left(-i \int_0^t \sigma_{sub}(H)(\phi_s(l)) ds \right) \otimes |dt|^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

□

Asymptotik des Propagators Nach Lemma 21 ist $e^{\frac{i}{\lambda}Ht}$ *FIO* assoziiert zum Hamiltonschen Fluss ϕ_t^H zur Zeit t . Letzterer wird für kompakte Konfigurationsräume Q nach Lemma 10 erzeugt durch das Wirkungsfunktional S_t ; die zugehörige heuristische Integraldarstellung des Kerns $K(q, q', t) = (e^{\frac{i}{\lambda}Ht}\delta_{q'})(q)$, der sog. *Propagator*, ist gerade das *Feynman-Integral*.

Im Allgemeinen gibt es nun wieder beliebig viele S_t -Extrema zwischen q, q' . Um damit verbundene Kaustiken auszuschließen, nehmen wir wieder an, dass H Standardform habe und beschränken die Energien, d.h. betrachten Distributionen der Form $u_{q'}(q) = (2\pi\lambda)^{-n} \int e^{\frac{i}{\lambda} \exp_q^{-1}(q') \cdot p_q} \chi(p_q) |dp_q|$ mit $\text{supp } \chi$ kompakt anstelle von $\delta_{q'}$. Ist nun q nicht konjugiert zu q' bei Beschränkung auf Anfangsimpulse in $\text{supp } \chi$, d.h. besitzen alle Punkte $p_q^\alpha \in \text{supp } \chi$ mit $\text{Exp}_q(p_q^\alpha) := \pi\phi_t^H(q, p_q^\alpha) = q'$ eine Umgebung, in der Exp_q injektiv ist, so ist nach Notiz 4 die stationäre Phase anwendbar und (58) schreibt sich als $e^{\frac{i}{\lambda}Ht}u_{q'}(q) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi i \lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{p^\alpha} e^{\frac{i}{\lambda}S_t(\gamma^\alpha) - i \int_0^t \sigma_{\text{sub}}(H)(\phi_s(q, p_q^\alpha)) ds - \frac{i}{2} \pi \text{ind}(\gamma^\alpha) \frac{\chi(p_q^\alpha) + O(\lambda)}{\sqrt{J^\alpha}}}, \quad (59)$$

wobei J^α Jacobideterminante von Exp_q bei p_α , $\gamma^\alpha : s \mapsto \text{Exp}_q(sp_q^\alpha)$ und $\text{ind}(\gamma^\alpha)$ der Morseindex von γ^α ist.

3 Semiklassische Spektren

Axiome der Quantenmechanik. Die quantenmechanischen Observablen sind selbstadjungierte Operatoren $\{a : \text{dom } a \rightarrow H\}$ auf einem (separablen) Hilbertraum H , Messwerte liegen in ihrem Spektrum $\text{spec}(a)$, und ihre Verteilung in einem C^* -Zustand $\langle \cdot \rangle \in H'$ liefert das assoziierte Wahrscheinlichkeitsmaß P , gegeben durch die Komposition des Zustands mit dem Spektralmaß (s. Satz 21) $\chi_A(a)$ zu a :

$$P(A \subset \text{spec}(a)) := \langle \chi_A(a) \rangle.$$

Ψ DO als C^* -Observable. Betrachtet man nur beschränkte Observablen, so kann man quantenmechanisch wie klassisch ganz im Rahmen von C^* -Algebren (s. Anhang) bleiben. Dabei misst \hbar die Nicht-Kommutativität quantenmechanischer Observablen, die klassisch zu verschwinden hat. Allein reicht dieser Rahmen zur Beschreibung des „klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ “ nicht aus; zusätzlich fixiert man Ψ DO auf $H = L^2(Q, |dq|)$ als quantenmechanisches Pendant zu den Prinzipalsymbolen auf dem Phasenraum T^*Q und betrachtet die Asymptotik von (Pseudo)Differentialgleichungen und Funktionalen, wenn \hbar klein ist gegenüber den charakteristischen Wirkungen des Systems. Um Ψ DO als C^* -Observable zu interpretieren, fragen wir zunächst nach ihrer Beschränktheit. Differentialoperatoren sind unbeschränkt, und so bleibt nur Ordnung ≤ 0 :

Lemma 22 *Ist $A \in \Psi^{0,0}(Q)$ mit Symbol $\sigma(A) \in S^{0,0}$, dann ist A beschränkt mit Normlimes $\|A\|_{L^2} \rightarrow \|\sigma_p(A)\|_\infty$ für $\hbar \rightarrow 0$.*

Die Beweisidee nach Hörmander ist dabei, A durch Addition eines Glättungsoperators einen Kern zu verleihen, dessen Träger eigentlich auf die Konfigurationsräume projiziert, und dann ein $B \in \Psi^{0,0}$ zu konstruieren, so dass $A^*A = \|\sigma_p(A)\|_\infty - B^*B$ modulo Glättungsoperator gilt (s. [Hör83, Th. 18.1.11 und .21] bzw. [Saf97]).

3.1 Spurformeln

3.1.1 Spurformeln von Ψ DO

Das *Punktspektrum* eines Operators besteht aus isolierten Eigenwerten endlicher Multiplizität, den Rest bezeichnet man als *wesentliches Spektrum*. Punktspektren sind typisch für Operatoren endlichen Ranges (Matrizen), und ihr Normabschluss in $B(H)$ bildet das (einzige abgeschlossene) C^* -Ideal der *kompakten Operatoren* $K(H)$. Das Spektrum eines kompakten Operators $A \in K(H)$ ist eine Nullfolge, genauer erhält man mittels des Funktionalkalküls (Satz 21) und der Polarzerlegung $A = U\sqrt{A^*A}$ von K aus der Spektraldarstellung von $A^*A = \sum_k |\mu_k|^2 |e_k\rangle \langle e_k|$ die explizite Darstellung

$$A|\psi\rangle = \sum |\mu_k| \langle e_k, \psi \rangle U|e_k\rangle, \quad (60)$$

wobei U die triviale Fortsetzung der unitären Abbildung $\ker A^\perp \rightarrow \text{im } A : \|A\|x \mapsto Ax$ bezeichnet.

Ein kompakter Operator $H \in B(L^2(Q, |dq|))$ heißt von *Spurklasse*, wenn die Nullfolge seiner Eigenwerte eine absolut konvergente Reihe definiert. Dann ist die Spur wie im endlichdimensionalen Fall als $\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle i | A | i \rangle$ definierbar bezüglich irgendeiner Hilbertbasis $|i\rangle$ von $L^2(Q, |dq|)$. Nach (60) hat A den Integralkern $K_A(q, q') = \sum_k |\mu_k| \overline{e_k(q)} (Ue_k)(q')$, also ist

$$\text{tr } A = \int_Q K_A(q, q) |dq|.$$

Ist nun $Op(a)$ ein kompakter Ψ DO zum Symbol a , so folgt anhand der Integraldarstellung seines Kerns (49):

Lemma 23 (s. z.B. [Pfl98]). *Ist $a \in S^{-\dim Q}$ Symbol mit kompaktem Träger, dann ist $Op_\tau(a) \in \Psi^{0, -\dim(Q)}$ von Spurklasse mit*

$$\text{tr } Op_\tau(a) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{T^*Q} a d\Omega.$$

Dabei bezeichnet Ω das von der symplektischen Form ω induzierte Liouvillemaß. \square

Satz 10 (Funktionalkalkül eines Ψ DO) [CdV] *Ist $H \in \Psi^{0, l}(Q)$, $l \geq 1$ selbstadjungiert, dann ist $f(H) \in \Psi^{0, -\infty}(Q)$ für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Prinzipalsymbol $f(\sigma_p(H))$ und Subprinzipalsymbol $f'(\sigma_p(H))\sigma_{sub}(H)$.*

Aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich sofort die Asymptotik der *Spektralfunktionen* mit kompaktem Träger:

$$\text{tr}(f(A)) = (2\pi\hbar)^{-n} \int (f \circ \sigma_p(H)) + \hbar(f' \circ \sigma_p(H))\sigma_{sub}(H) + O(\hbar^2) d\Omega$$

insbesondere die *Weylformel*

$$|\{\text{spec}(H) \cap [E_0, E_1]\}| \sim (2\pi\hbar)^{-n} \text{vol}(\sigma_p(H)^{-1}([E_0, E_1])).$$

3.1.2 Asymptotik der Zustandsdichte

Die (distributionelle) *Zustandsdichte* eines Operators H ist definiert als

$$D(E) := \frac{d}{dE} \text{tr}(\theta(H - E)),$$

wobei θ die Heaviside-Funktion bezeichne. Aus Spektralkalkül und \hbar -Fouriertransformation erhält man die äquivalente Darstellung

$$D(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar}Et} \text{tr}(e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}) dt,$$

Nach Abschnitt 2.3.2 ist der zum Zeitentwicklungsoperator $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ gehörige Schwartzkern (der Propagator K) eine oszillatorische Distribution assoziiert zur kanonischen Relation

$$L := \{s(z, \phi_t^H(z)), t, -H(z)\}$$

im erweiterten Phasenraum $T^*Q \times \overline{T^*Q} \times T^*\mathbb{R}$. Schreiben wir nun die Zustandssumme als Komposition (s. 2.2.1) von K mit der δ -Distribution assoziiert zu

$$L_\delta = s(\text{graph}(id_{T^*Q})) = \{s(z, z)\},$$

so folgt sofort anhand der Kompositionsregel für die Mikrotäger:

Notiz 9 Zur „Zustandssumme“ $Z(t) := \text{tr}(e^{-\frac{i}{\hbar}Ht})$ tragen mikrolokal nur periodische Orbits bei:

$$WF(Z_t) \subset L \circ L_\delta = \{(T, E) \mid \exists z \text{ mit } \phi_T^H(z) = z, H(z) = E\}.$$

Mikrolokale Form von $Z(t)$ Sei nun $\mathcal{O} \subset T^*\mathbb{R}$ offen derart, dass sich L und $C := L_\delta \times \mathcal{O}$ cleanly in $L_C \subset WF(Z_t)$ schneiden. Nach Lemma 3 ist dann L_C eine Vereinigung disjunkter Kurven, und wir nehmen an, dass diese frei von Kaustiken sind, also Graphen von Funktionen $E_i(T)$. Die Fasern von $C \cap L \rightarrow L_C$ sind dann gerade die Mannigfaltigkeiten periodischer Punkte zur Energie E_i und Zeit T

$$W_i(T) := \{z \in T^*Q \mid \phi_T^H(z) = z, H(z) = E_i(T)\}$$

Nehmen wir weiter an, dass H Standardform hat, so folgt aus (37) und 1.4.2, dass $Z(t)$ mikrolokal in \mathcal{O} oszillatorische Distribution der Form $Z(T)|dT|^{\frac{1}{2}} =$

$$\sum_i e^{\frac{i}{\hbar}S_T(\gamma_j) - \frac{i}{2}\pi \text{ind}(\gamma_j)} \left(\int_{W_j(T)} e^{i \int_0^t \sigma_{\text{sub}}(H)(\phi_s(z)) ds} \mu_j + O(\hbar^{1 - \frac{\dim W_j(T)}{2}}) \right) \quad (61)$$

ist. Dabei ist γ_j eine auf Q projizierte periodische Trajektorie in $W_j(T)$, $\text{ind}(\gamma)$ ihr Maslovindex (vgl. [Mei92]), welcher nach Notiz 4 und Lemma 12 im Riemannschen Fall $E > V$ mit ihrem Morseindex übereinstimmt, und μ_j die gemäß (36) induzierte Dichte-wertige Halbdichte.

Mikrolokale Form der Zustandsdichte Wir betrachten nun den *generischen Fall*, dass der Schnitt von L und $C = L_\delta \times \mathcal{O}$ cleanly zweidimensional und frei von E - als auch T -Kaustiken ist. Dann gilt:

Satz 11 (Gutzwiller) (vgl. [CdV]). Zur Zustandsdichte $D(E)$ tragen mikrolokal nur periodische Orbits der Energie E bei, und der Beitrag eines solchen Orbits γ ist im generischen Fall (s.o.) gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}W_E(\gamma) - \frac{\pi}{2} \text{ind}(\pi\gamma)} \left(\frac{e^{i \int_\gamma \sigma_{\text{sub}}(H)}}{|\det(1 - P'_E)|^{\frac{1}{2}}} + O(\hbar^1) \right),$$

wobei P'_E die linearisierte Poincaréabbildung (Abschnitt 1.2.4) zu γ und $W_E(\gamma)$ dessen Wirkung $W_E(\gamma) = \int_\gamma \theta$ ist.

Das folgt daraus, dass $D(E)$ \hbar -Fouriertransformierte (semiklassisches Pendant zur Legendre-Transformierten) von (61) ist und folgenden Beobachtungen:

Notiz 10 *Im Kaustiken-freien Fall ist die Nichtentartung bzw. isoenergetische Nichtentartung (Abschnitt 1.2.4) äquivalent zur Bedingung, dass sich L und C cleanly zweidimensional schneiden, und S_t ist bis auf Vorzeichen Legendretransformierte der Wirkungsfunktion $W(E) = \int_{W(E,T(E))} \theta$.*

Der erste Teil folgt sofort aus (dem Beweis zu) Lemma 6, der zweite aus dem Satz von Stokes: $W(E_1) - W(E_0) = \int_{[E_0, E_1] \times [0, T]} f^* \theta$, falls $f(E, T) := \phi_T^{\mathcal{X}^H}(z(E))$ und $z(E) = \phi_T^{\mathcal{X}^H}(E)z(E)$, also in der Tat $\frac{dW}{dE} = T(E)$. \square

Die Amplitude erhält man aus der Beobachtung, dass sich im generischen Fall die Sequenz (34) auf einen Isomorphismus $\text{graph } id_{T_p \Sigma} \oplus \text{graph } P'_E \rightarrow T_p \Sigma^2$ zum Fixpunkt p des Poincarésystems P_E (Abschnitt 1.2.4) reduziert, gegeben durch $(z_1, z_2) \mapsto (z_2 - z_1, z_2 - P'_E z_1)$. Also ist in der Tat

$$\mu_j / |dT|^{\frac{1}{2}} = |\det(1 - P'_{E_j})|^{-\frac{1}{2}} \delta_p.$$

\square

3.2 Quasimoden

Die reinen Zustände sind definiert als Extrema der konvexen Menge von C^* -Zuständen (s. Anhang B.3). Im klassischen=kommutativen Fall entsprechen sie Punktwahrscheinlichkeitsmaßen, im quantenmechanischen Fall hingegen Vektorzuständen $\langle \cdot \rangle = \langle \phi | \cdot | \phi \rangle$, deren assoziierte Wahrscheinlichkeitsmaße stets der berühmten Unschärferelation

$$\langle \Delta a \rangle \langle \Delta b \rangle \geq \frac{1}{2i} |\langle [a, b] \rangle|$$

mit $\Delta a := a - \langle a \rangle$ genügen, was sofort aus (114) folgt:

$$\|\Delta a\| \|\Delta b\| \geq |\langle \Delta a \Delta b^* \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle [\Delta a, \Delta b] \rangle| = \frac{1}{2i} \langle [a, b] \rangle.$$

Gleichheit, d.h. minimale Unschärfe oder *Kohärenz* wird offenbar erreicht für $a|\phi\rangle, b|\phi\rangle$ linear abhängig und $\Re(\Delta a \Delta b) = 0$, also:

$$|\phi\rangle \in H \text{ kohärent bezüglich } a, b \iff |\phi\rangle \in \ker(a - irb - z), \quad r \in \mathbb{R} - 0, z \in \mathbb{C} \quad (62)$$

Die Weylalgebra Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ und

$$(W(x_0 + ip_0)\varphi)(x) := e^{\frac{i}{2\hbar}x_0 \cdot p_0} e^{\frac{i}{\hbar}p_0 \cdot x} \varphi(x - x_0).$$

Dann ist $\mathbb{C}^n \rightarrow B(L_2) : z \mapsto W(z)$ eine projektive Darstellung der Translationsgruppe $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, nämlich die *Weylalgebra*

$$W(z)W(z') = W(z + z')e^{-\Im(\bar{z}z')}. \quad (63)$$

$W(z)$ sind unitäre FIO assoziiert zur Translationsgruppe \mathbb{C}^n im Phasenraum $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$: Das sieht man anhand einer expliziten Darstellung des Kerns via Fouriertransformation bzw. anhand Lemma 21: Die Generatoren von $W(x_0), W(ip_0)$, $x_0, p_0 \in \mathbb{R}^n$ sind ja die unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren $Op(x_0.p) : \{\phi \in L^2 | \partial_i \phi \in L_2\} \rightarrow L_2$ bzw. $Op(p_0.x)$, und die Hamiltonschen Flüsse ihrer Symbole sind wieder die Phasenraumtranslationen. $Op(p), Op(q)$ sind auf dem Schwartzraum \mathcal{S} unitär äquivalent via der \hbar -Fouriertransformation und dort wesentlich selbstadjungiert. Weiter erfüllen sie dort die wohlbekannten *Heisenbergschen Vertauschungsrelationen*

$$[Op(q_i), Op(p_j)] = i\hbar Op(\{q_i, p_j\}) = i\hbar Op(\delta_{ij}) = \delta_{ij} i\hbar id_{\mathcal{S}}$$

als infinitesimales Pendant von (63).

Kohärente Zustände Seien $|z\rangle$ normierte Eigenzustände der kommutierenden Operatoren $a_k := Op(q_k) + iOp(p_k)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu Gewichten $z := (\langle z | a_1 | z \rangle, \dots, \langle z | a_n | z \rangle) \in \mathbb{C}^n$. Die Lösung von $a |z\rangle = z$ ist in z lokalisierte Gaußfunktion, d.h. $|z\rangle \propto W(z) |0\rangle$ und $|0\rangle$ ist der \hbar -Fourier-Eigenvektor

$$x \mapsto \pi^{-n/4} e^{\frac{i}{2}|x|^2/\hbar}$$

Nach (62) sind die $|z\rangle$ kohärent bezüglich der (Wirkungs-konjugierten) Observablen Ort und Impuls, erreichen also minimale Unschärfe $\frac{\hbar}{2}$.

Wickquantisierung Wir definieren nun die *Wick-Quantisierung* als Superposition kohärenter Projektoren

$$Op_+(f) := (2\pi\hbar)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) |z\rangle \langle z| dz$$

für alle messbaren Funktionen f auf $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$. Op_+ besitzt folgende Eigenschaften:

1. Op_+ ist *positiv*, d.h. $\langle Op(f) \rangle \geq 0$ für alle $f > 0$ und alle Zustände $\langle \cdot |$.
2. Die kohärenten Projektoren $Op_+(\delta_z)$ liefern eine Zerlegung der Eins $Op_+(1) = 1$ in $B(L^2(\mathbb{R}^n, \frac{d^n x}{2\pi\hbar}))$, welche Spezialfall der *Orthogonalitätsrelationen*

$$1 = (2\pi\hbar)^{-n} \int W(z) |\phi\rangle \langle \phi| W(z)^* dz, \quad |\phi\rangle \in L^1 \cap L^\infty \quad (64)$$

der \mathbb{C}^n -Darstellung $W(z)$ in L^2 (63) ist.

3. Die Projektoren $|z_0\rangle\langle z_0|$ haben Gaußsches Weylsymbol

$$g(z - z_0) := \sigma_W(|z_0\rangle\langle z_0|)(z) = 2^n e^{-|z - z_0|^2/\hbar},$$

also erhält man Op_+ für $f \in C^\infty$ aus Op_W durch Faltung

$$Op_+(f) = Op_W(f * g). \quad (65)$$

4. Das zur Wickquantisierung gehörige Sternprodukt ist nach [Wal99] das in den „Erzeugern“ $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$ und „Vernichtern“ z normalgeordnete Produkt

$$\sigma_+(Op_+(f)Op_+(g)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (2\hbar)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial \bar{z}^\alpha}.$$

3.2.1 Husimimaße

Für eine beliebige Mannigfaltigkeit Q wählen wir eine Zerlegung der Eins (χ_i) subordiniert zu einem Atlas (ϕ_i) und definieren

$$Op_{+,Q}(f) = \sum_i \chi_i Op_{+,\mathbb{R}^n}(\phi_{i*} f).$$

Dank Positivität von Op_+ und (64) definieren die *Husimimaße* (vgl. [CdV])

$$\mu_+^\varphi(f) := \langle \varphi | Op_+(f) | \varphi \rangle \cdot \langle \varphi, \varphi \rangle^{-1}$$

bezüglich charakteristischer Funktionen $f = \chi_A = \chi_A^2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf T^*Q , die folgendes asymptotisches Verhalten haben:

1. $\pi_Q(\mu_+^\varphi) \rightarrow |\varphi|^2 |dq|$, was aus (65) und $\lim_{\hbar \rightarrow 0} |z\rangle = \delta_{\pi(z)}$ folgt.
2. Ist $K \cap WF(\varphi) = \emptyset$, dann $\mu_+^\varphi(K) \rightarrow 0$
3. Die schwachen Limiten der $\mu_+^{(j)}$ zu H -Eigenzuständen $|j\rangle$ sind invariant unter dem Hamiltonschen Fluss ϕ^H von $\sigma_p(H)$.

Das folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle j | e^{\frac{i}{\hbar} H t} Op_+(f) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | j \rangle = \langle j | Op_+(\{\sigma_p(H), f\}) | j \rangle + O(\hbar) \\ &= \frac{d}{dt} \mu_+^{(j)}(f \circ \phi^H) + O(\hbar). \end{aligned}$$

4. Ist $(|i\rangle)$ eine Orthonormalbasis, dann ist $\sum \mu_+^{(i)} = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^n}$, wobei $\Omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}$ das Liouvillemaß und $n = \dim Q$ ist. Das folgt aus dem Fall $Q = \mathbb{R}^n$, wo $\sum \mu_+^{(i)}(f) = (2\pi\hbar)^{-n} \int f(z) \underbrace{\text{tr}(|z\rangle\langle z|)}_1 dz$.

3.2.2 Quasimoden

Eine Familie $u_{\hbar} \in \text{dom}(H) - 0$ heißt Quasimode der Ordnung m von H , falls

$$\|(H - E(\hbar))u_{\hbar}\| \leq C_{\hbar}\|u_{\hbar}\|, \quad C_{\hbar} \in O(\hbar^m).$$

Aus ihrer Existenz folgt $\text{spec}(H) \cap [E - C_{\hbar}, E + C_{\hbar}] \neq \emptyset$, denn aus dem stetigen Funktionalkalkül ergibt sich

$$\frac{1}{C_{\hbar}} \leq \|(H - E)^{-1}\| = \|(id_{\text{spec } H} - E)^{-1}\|_{\infty} = d(E, \text{spec } H)^{-1}.$$

Quasimoden u unendlicher Ordnung besitzen nach [CdV] folgende Eigenschaften:

1. Ihr Mikroträger $WF(u)$ ist eine invariante Untermenge von $\{\sigma_p(H) = E(0)\}$, denn mit $(H - E)u \sim 0$ ist auch $(e^{\frac{i}{\hbar}Ht} - e^{\frac{i}{\hbar}Et})u \sim 0$.
2. Sind zwei ∞ -Quasimoden orthogonal, so sind ihre Mikroträger disjunkt.
3. Ist u_i ein System N_{\hbar} orthogonaler Quasimoden und W der Abschluss der Vereinigung ihrer Mikroträger ($\text{lin}\{u_i\}$ heißt dann *vektorielle Quasimode* mit Mikroträger W), so erfüllen sie die *Weyl-Abschätzung*

$$N_{\hbar} \leq \frac{\text{vol}(W)}{(2\pi\hbar)^n} + o(\hbar^{-n}),$$

wobei $\text{vol} = \frac{1}{n!}\omega^n$ das Liouvillemaß und $n = \dim Q$ ist. Beweis: Aus $\mu_+^{u_i}(T^*Q - WF(u_i)) = o(\hbar^0)$ folgt

$$N_{\hbar} = \sum_i \mu_+^{u_i}(T^*Q) = (1 + o(\hbar^0)) \sum \mu_+^{u_i}(W),$$

aus 3.2.1,4 erhält man aber durch Vervollständigung der u_i zu einer Orthonormalbasis die Abschätzung $\sum \mu_+^{u_i}(W) \leq (2\pi\hbar)^{-n} \text{vol}(W)$.

Um eine Quasimode zu konstruieren, bedarf es also einer invarianten Menge $L : \Phi_t^H(L) \subset L \forall t$ (dem Mikroträger der Quasimode) und eines invarianten Maßes (dem schwachen Limes des zugehörigen Husimimaßes) auf L . Solche Mengen bilden typischerweise Lagrangemannigfaltigkeiten, etwa die (in)stabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Fixpunktes oder die *KAM-Tori* (gestörter) integrierbarer Systeme, die wir im Folgenden betrachten.

3.3 Spektrum semiklassisch integrierbarer Systeme

Kommutierende formal selbstadjungierte Ψ DO H_1, \dots, H_n bilden ein *semiklassisch integrierbares System*, wenn ihre Prinzipalsymbole ein integrierbares System im klassischen Sinne 1.2.1 bilden. Dann lassen sich simultane Quasimoden wie folgt konstruieren:

Methode von Weinstein: Wir nehmen an, dass die Niveauflächen $L_\alpha = \cap_i \{\sigma_p(H_i - \alpha_i) = 0\}$ kompakt, also Tori nach 1.2.1 sind, und die Subprinzipalsymbole der H_i verschwinden. Man kann dann analog zu Lemma 20 einen mikrolokal unitären (s.u.) FIO U assoziiert zur Transformation auf Winkel-Wirkungsvariablen (ϕ, I) konstruieren, so dass die $K_i := U^{-1}H_iU$ auf Funktionen der Form

$$\psi(\phi + k) = e^{\frac{i}{4}\mu \cdot k} \psi(\phi), \quad k \in 2\pi\mathbb{Z}$$

operieren, s. [Wei74] oder [CdV]. Dabei sind die μ_i die Maslovindizes der durch $\{\phi_i\}$ beschriebenen Basiszykel von $\pi_1(L_\alpha)$, also die ψ Schnitte des Maslovbündels über L_α . Somit ist

$$\text{lin}_{k \in \Gamma} \{x \mapsto U e^{ikx}\}, \quad \Gamma := 2\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{4}\mu) \cap \{I/\hbar\}$$

vektorielle Quasimode zum Spektrum $K(\Gamma)$.

Methode von Vu Gnoc: Alternativ kann man versuchen, mikrolokale Eigenvektoren aus der lokalen Normalform zu konstruieren ([VuN]): In direkter Verallgemeinerung von Lemma 20 gibt es elliptische FIO T_i , die das System mikrolokal auf Gebieten U_i einer L_α -Umgebung auf Normalform $P_k u_{\hbar} \sim 0$, $k = 1, \dots, n$, bringen. Dessen mikrolokale Lösungen sind aber einfach der Ring \mathbb{C}_{osz} der konstanten oszillatorischen Lösungen (isomorph zu $\mathbb{C}(\hbar)$) modulo mikrolokal verschwindender Lösungen $\{v_{\hbar} : WF(v_{\hbar}) \cap U_i = 0\}$. Die lokalen mikrolokalen Eigenräume $T_i \mathbb{C}_{osz} / \sim$ definieren so eine Garbe \mathcal{L} von $\mathbb{C}(\hbar)$ -Moduln vom Rang 1 generiert durch eine oszillatorische Lösung. Nicht-triviale \mathcal{L} -Schnitte über Durchschnitten $U_i \cap U_j$, so dass o.E. $L \cap U_i \cap U_j$ projizierbar und frei von Kaustiken ist, unterscheiden sich dann um nicht triviale oszillatorische Konstanten $\tilde{c}_{ij} \in \mathbb{C}_{osz}^*$, die wir in der Form $[e^{i \sum_{l=-1}^{\infty} \hbar^l b_{ij}^{(l)}}]$, $b_{ij}^{(l)} \in \mathbb{C}$ schreiben können. \mathbb{C}_{osz}^* bildet eine Untergruppe der Einheiten in \mathbb{C}_{osz} , die \tilde{c}_{ij} definieren so ein flaches \mathbb{C}_{osz}^* -Prinzipalbündel $B(L)$ über L . Dessen Holonomieklassse $hol(B) \in H^1(L, \mathbb{C}_{osz}^*)$ ist somit Obstruktion für die Existenz nicht trivialer oszillatorischer Lösungen.

Expliziter können wir die $b_{ij}^{(l)}$ und damit die Holonomieklassse wie folgt bestimmen: Da die H_i formal selbstadjungiert sind, können die FIO T_i mikrolokal unitär gewählt werden, d.h. $\sigma(T_i T_i^* - id)|_{U_i} = 0$. Folglich ist $|\tilde{c}_{ij}| = 1$, also die $b_{ij}^{(l)}$ reell, und B reduzierbar auf ein S^1 -Bündel. Schreiben wir auch die \mathcal{L} -Schnitte über Gebieten abseits von Kaustiken in der Form $e^{i \sum_{l=-1}^{\infty} \hbar^l S^{(l)}}$, so sind gemäß der Hamilton-Jakobi-Gleichungen (54) die $S^{(-1)}$ lokal generierende Funktionen von L_α , und wir erhalten nach (38),(39):

$$\log hol(B) = [\frac{1}{\hbar}\theta] + \frac{\pi}{2}\mu + [\kappa] + O(\hbar^1) \quad (66)$$

Die Korrektur 0. Ordnung $[\kappa] = \{S_i^{(0)} - S_j^{(0)}\}$ von $\log hol(\Phi_L)$ bestimmt man dabei anhand der Transportgleichung als die *Subprinzipalform* des integralen Systems, definiert durch

$$\kappa \cdot \mathcal{X}_{\sigma_p(H_i)} = -\sigma_{sub}(H_i).$$

Die Subprinzipalform hat folgende Eigenschaften:

1. Nach (11) ist κ als *Variationsform* einer Lagrange-Deformation von L zu interpretieren. κ ist in der Tat geschlossen, denn nach (52) ist $\{\sigma_{sub}(H_i), \sigma_p(H_j)\} = \{\sigma_{sub}(H_j), \sigma_p(H_i)\}$, also $\frac{\partial \sigma_{sub}(H_i)}{\partial q_j} = \frac{\partial \sigma_{sub}(H_j)}{\partial q_i}$ in Darbouxkoordinaten (H_i, q_j) und damit $d\kappa = -d\sigma_{sub}(H_i)dq^i = 0$.
2. Die Kohomologieklassse $[\kappa] \in H^1(L_\alpha, \mathbb{R})$ muss invariant unter unitären Äquivalenztransformationen $H'_i = U^*H_iU$ sein (s. [VuN]).

Es folgt:

Satz 12 ([VuN]) *Ein semiklassisch integrables System besitzt genau dann mikrolokal eine nicht-triviale oszillatorische Lösung konzentriert auf $L_\alpha = \bigcap_i \{\sigma_p(H_i) = \alpha_i\}$, wenn L_α die Bohr-Sommerfeld-Bedingung $hol(B(L_\alpha)) = 0$ erfüllt, d.h. (66) in $H^1_{dR}(L_\alpha, 2\pi\mathbb{Z})$ liegt. \square*

Bemerkungen:

1. Sind die L_α kompakt, also Tori nach Abschnitt 1.2.1, so sind die Bohr-Sommerfeld Holonomiephasen (66) zu einer Basis von Zykeln $\gamma_i \in \pi_1(L)$ gerade eine Deformation der Wirkungsvariablen (4):

$$\log hol(B(L_\alpha)) \cdot \gamma_i = \frac{2\pi}{\hbar} I_i(\alpha) \pmod{O(\hbar^0)}.$$

2. Verschwinden die Subprinzipalsymbole $\sigma_{sub}(H_i)$, ist die Bohr-Sommerfeld- bis auf höhere Ordnung gleich der Maslov-Bedingung (40).

Beispiele. Für den harmonischen Oszillator (Abschnitt 1.2.3,1) liefert Satz 12 unter Beachtung von $\sigma(H_i) \geq 0$ das richtige Spektrum

$$E_i \in \hbar\omega_i(\mathbb{N} \cup \{0\} + \frac{1}{2}).$$

Für das Keplerproblem $\sigma(H)(q, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{|q|}$ berechnet man gemäß Abschnitt 1.2.3,2: $I_r = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{-E}} - |J|$, man erhält so im Wesentlichen das Bohr-Sommerfeld-Spektrum:

$$\begin{aligned} J_3 &\in \hbar\mathbb{Z} \cap [-|J|, |J|] \quad \text{und} \\ E &\in \left\{ -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N} - \frac{1}{2} + \frac{|J|}{\hbar} \right\}. \end{aligned}$$

4 Deformationsquantisierung

4.1 Grundlagen

Der Symbolkalkül von Pseudodifferentialoperatoren lässt sich algebraisch als Deformation der klassischen Observablenalgebra interpretieren. Gemäß dieser Perspektive betrachten wir zunächst die

4.1.1 Übersetzung topologischer in algebraische Begriffe.

Mengentheoretische Topologie Infolge des Gelfand-Isomorphismus (A. 2, Satz 19) liefert der kontravariante Funktor C , der jedem kompakten Hausdorffraum Z seine komplexe Funktionenalgebra $C(Z)$ und stetigen Abbildungen pullbacks zuordnet, eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{kompakte Hausdorffräume}\} \sim \{\text{abelsche } C^*\text{-Algebren mit } 1\}^{opp}. \quad (67)$$

Insbesondere entspricht die Topologie von Z der Idealstruktur von $C(Z)$. Dank Stetigkeit ist ja das Verschwindungsideal \mathcal{I}_K irgendeiner Menge $K \subset Z$ gleich dem ihres Abschlusses \overline{K} mit

$$\mathcal{I}_{\bigcap_i \overline{K}_i} = \sum_i \mathcal{I}_{\overline{K}_i} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_{\overline{K}_1 \cup \overline{K}_2} = \mathcal{I}_{\overline{K}_1} \cap \mathcal{I}_{\overline{K}_2}.$$

Nun induziert die Inklusion $i : \overline{K} \hookrightarrow Z$ einen kanonischen Isomorphismus

$$C(\overline{K}) = \text{im } i^* \cong C(Z) / \ker i^* = C(Z) / \mathcal{I}_{\overline{K}}.$$

Dem Schnitt abgeschlossener Mengen $K, L \subset Z$ entspricht dann auf Quotientenniveau das Tensorprodukt der zugehörigen Funktionsalgebren (aufgefasst als $C(Z)$ -Module):

$$C(K \cap L) = \frac{C(Z)}{\mathcal{I}_{K \cap L}} = \frac{C(Z)}{\mathcal{I}_K} \otimes_{C(Z)} \frac{C(Z)}{\mathcal{I}_L} = C(K) \otimes_{C(Z)} C(L), \quad (68)$$

denn die kanonische Identifikation $[a] \otimes [b] \mapsto [ab]$ ist wegen $(a + \mathcal{I}_K) \otimes (b + \mathcal{I}_L) = (a + \mathcal{I}_K)(b + \mathcal{I}_L) \otimes (1 + \mathcal{I}_L) = (ab + \mathcal{I}_K + \mathcal{I}_L) \otimes [1] = [1] \otimes (ab + \mathcal{I}_K + \mathcal{I}_L)$ offenbar zu einem wohldefinierten Algebrenisomorphismus fortsetzbar.

Bemerkung: Die Isomorphie der Automorphismengruppen von Z und $C(Z)$ gilt auch für nicht-kompakte Z (verwende Kompaktifizierung bzw. Unitarisierung) und überträgt sich auf die differenzierbaren Versionen für C^∞ -Mannigfaltigkeiten

$$\text{Diff } Z \cong \text{Aut } C^\infty(Z), \quad (69)$$

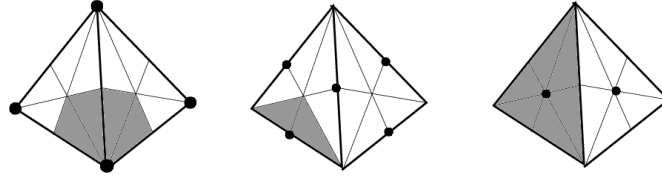
vgl. [GBVF01, Cor. 1.7], wo eine ganze Liste von aus (67) folgenden Korrespondenzen entwickelt wird; einen allgemeineren unabhängigen Beweis findet man in [Mrc].

Vektorbündel Ist $E \xrightarrow{\pi} Z$ ein $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ - oder \mathbb{R} -Vektorraumbündel über einer Mannigfaltigkeit Z mit stabil Inversem $-E$, so ist der $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modul seiner C^∞ -Schnitte wegen

$$\Gamma(E) \oplus_{C^\infty(Z, \mathbb{K})} \Gamma(-E) \cong \Gamma(E \oplus -E) \cong C^\infty(E, \mathbb{K})^n$$

projektiv, d.h direkter Summand eines freien Moduls. Da sich Z durch endlich viele offene Mengen U_i überdecken lässt, deren Zusammenhangskomponenten kontrahierbar sind, und über denen somit E trivial ist $\Gamma(E|_{U_i}) \cong C^\infty(U_i)^n$, wird $\Gamma(E)$ endlich erzeugt.

Bemerkung: Als erste Abschätzung für die Anzahl benötigter Mengen U_i , welche die Topologie von Z ignoriert, erhält man $\dim(Z) + 1$. Das sieht man anhand einer Triangulierung K von Z : Sei K_1 die *baryzentrische Unterteilung* von K , d.h der Simplicialkomplex, der aus K durch Hinzunahme der „Schwereflächen“ entsteht (vgl. Bild), und $J_n := |K^n - K^{n-1}| \cap K_1^0$ die Menge der in den n -Zellen von K liegenden Schwerpunkte. Dann bilden die *offenen Sterne* von J_i , bestehend aus allen Zellen, die J_i berühren, eine komponentenweise kontrahierbare offene Menge, und es ist in der Tat $Z \simeq |K| = \bigcap_{n=0}^{\dim Z} J_n$.



Offene Sterne zu Schwerpunkten in J_0, J_1, J_2 der baryzentrischen Zerlegung der S^2 -Triangulierung durch ein Tetraeder.

Aus (69) folgt zudem

$$\text{Hom}(\Gamma(E), \Gamma(E)) \cong \Gamma(E^*) \otimes_{C^\infty(Z, \mathbb{K})} \Gamma(E) = \Gamma(E^* \otimes E) = \Gamma(\text{Hom}(E)),$$

also stammt umgekehrt jeder Projektor $p = p^2 \in \text{Hom}(C^\infty(Z, \mathbb{K})^n)$ von einem C^k -Bündelhomomorphismus $\phi \in \text{End}(Z \times \mathbb{K}^m)$ mit $\text{im } p = \text{im } \Gamma(\phi) = \Gamma(\text{im } \phi)$; und es folgt:

Lemma 24 (Serre-Swan) [GBVF01, Th. 2.10]. Sei Z C^∞ -Mannigfaltigkeit, dann ist der Schnittfunktor Γ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\mathbb{K}\text{-Vektorraumbündel über } Z\} \sim \{\text{endl. erzeugte proj. } C^\infty(Z, \mathbb{K})\text{-Moduln}\}.$$

Entsprechend definiert man in Verallgemeinerung von $K_0(C_0^\infty(Z)) := K^0(Z)$ die (algebraische) K_0 -Gruppe eines Rings \mathcal{A} als Grothendieckgruppe der Isomorphismenklassen endlich erzeugter projektiver \mathcal{A} -Moduln bezüglich \oplus . Diese lassen sich äquivalent als Konjugationsklassen von Projektoren darstellen

$$K_0(\mathcal{A}) = \{gpg^{-1} | p = p^2 \in M(\mathcal{A}), g \in Gl(\mathcal{A})\} :$$

Sind nämlich $p\mathcal{A}^n \cong q\mathcal{A}^m$ isomorphe projektive Moduln und $a : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^m$ bzw. $b : \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}^n$ 0-Fortsetzungen dieses Isomorphismus, dann sind $p \oplus 0_m$ und $0_n \oplus q$ konjugiert bezüglich der involutiven Matrix (vgl. [Ros94, 1.2.1])

$$u := \begin{pmatrix} 1 - p & a \\ b & 1 - q \end{pmatrix} \in Gl_{n+m}(\mathcal{A}).$$

Vom Tangentialbündel abgeleitete Bündel Schnitte des (komplexifizierten) Tangentialbündels $\Gamma(TZ^{\mathbb{K}})$ bilden darüber hinaus die Liealgebra der Derivationen von $\mathcal{A} := C^\infty(Z)$. Sie sind gerade die 1-Kozykel des (*differenziellen*) *Hochschildkomplexes* $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} , dessen k -Koketten definiert sind als k -Multilinearformen $\bigotimes_{i=1}^k \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, die differentiell in jedem Argument sind, mit Korandoperator $(bC)(f_1, \dots, f_{k+1}) :=$

$$f_1 C(f_2, \dots, f_{k+1}) + \sum_i (-1)^i C(f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{k+1}) + (-1)^{k+1} C(f_1, \dots, f_k) f_{k+1}.$$

Insbesondere ist $(bf)(g) = fg - gf$ für $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$, also bilden die 0-Koränder das Zentrum und die 1-Koränder innere Derivationen, welche wegen der Kommutativität von \mathcal{A} trivial sind. Also sind die Kohomologien $HH^k(\mathcal{A})$ von (\mathcal{C}, b) für $k \leq 1$ kanonisch isomorph zu $\Gamma(\bigwedge^k TZ^{\mathbb{K}})$, was sich fortsetzt auf:

Lemma 25 ([CGD80]) *Die Abbildung eines k -Multivektors X auf den k -Kozykel $(f_1, \dots, f_k) \mapsto X.df_1 \wedge \dots \wedge df_k$ induziert einen Isomorphismus*

$$\Gamma(\bigwedge^k TZ^{\mathbb{K}}) \cong HH^\bullet(\mathcal{A}).$$

$\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ist eine Superliealgebra bezüglich des Kommutators $[C, C'] := C \circ C' - (-1)^{\deg C \cdot \deg C'} C' \circ C$ zum nicht-assoziativen *Gerstenhaber-Produkt*¹⁷ $C^{(k)} \circ C^{(l)}(f_1, \dots, f_{k+l-1}) :=$

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{(i-1)(l-1)} C^{(k)}(f_1, \dots, f_{i-1}, C^{(l)}(f_i, \dots, f_{i+l-1}), f_{i+l}, \dots, f_{k+l-1}),$$

das bezüglich $\deg C^k(\mathcal{A}) := k-1$ gradiert ist. b ist dann die innere Derivation $b = \text{ad}(\cdot)$ zur punktweisen Multiplikation \cdot in \mathcal{A} .

Lemma 26 *In der Identifikation von $\Gamma(\bigwedge T^*Q)$ mit $HH^\bullet(\mathcal{A})$ via ω und Lemma 25 entspricht $\text{ad}(\{.,.\})$ auf $HH^\bullet(\mathcal{A})$ dem deRham-Differential d .*

In der Tat, $\text{ad}(\{.,.\})$ bzw. d sind Superderivationen bezüglich der Cupprodukte $[C] \cup [C'] := [C \otimes C']$ in $HH^\bullet(\mathcal{A})$ bzw. \wedge , und so reicht die Überprüfung des Lemmas auf den Generatoren $HH^0(\mathcal{A}), HH^1(\mathcal{A})$. \square

¹⁷ $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ist eine sog. *G_∞-Algebra*, d.h. induziert die Struktur einer *G(erstenhaber)-Algebra* auf der Kohomologie, s. [Vor].

4.1.2 Definition von Sternprodukten

In Verallgemeinerung der Beispiele aus Abschnitt 2.2.1 definiert man ein Sternprodukt \star als formale Deformation $\widehat{Z} = (C^\infty(Z)[[\lambda]], \star)$ der klassischen Funktionalgebra $(C^\infty(Z), \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ der Form

$$\star := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i C_i, \quad C_i \in \mathcal{C}^2(C^\infty(Z)) \quad (70)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. \star ist assoziativ $[\star, \star] = 0$, was sich ordnungsweise schreibt als

$$2bC_n + \sum_{i=1}^{n-1} [C_i, C_{n-i}], \quad (71)$$

2. \star deformiert das klassische Produkt, d.h. $C_0(f, g) = fg$,
3. Der Kommutator $\frac{i}{\lambda}[\cdot, \cdot]_\star$ deformiert die klassischen Liestruktur, d.h. $\frac{i}{\lambda}[f, g]_\star = \{f, g\} \pmod{O(\lambda)}$. Das ist äquivalent zu

$$C_1 = \frac{i}{2}\{\cdot, \cdot\} + bS_1, \quad (72)$$

denn der symmetrische Anteil von C_1 ist gemäß(71) 0-kohomolog, also ein Korand.

4. $1 \star f = f \star 1 = f$.

In Verallgemeinerung der Übergangsoperatoren zwischen verschiedenen τ -Ordnungen in Abschnitt 2.2.1,4 bezeichnet man zwei solche Deformationen als *äquivalent*, falls es zwischen ihnen einen Algebrenisomorphismus der Form $id + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i S_i$ mit Differentialoperatoren S_i gibt. Man kann so eine Äquivalenzklasse lokal als Quantisierung modulo Ordnungsvorschrift interpretieren, was eindeutig ist:

Lemma 27 (Lichnerovicz) *Ist $H_{dR}^2(Z) = 0$, so sind alle Sternprodukte äquivalent.*

Beweis (s. z. B. [Neu01],[NT95]): Zunächst ist $C_1 - C'_1 = bS_1$, also via der Äquivalenztransformation $id + \lambda S_1$ o.E. $C_1 = C'_1 = \frac{i}{2}\{\cdot, \cdot\}$. Sei nun $\star = \star' \pmod{O(\lambda^k)}$. Anhand der Assoziativität (71) folgt:

$$b(C_k - C'_k) = 0, \quad \text{und} \quad b(C_{k+1} - C'_{k+1}) + \text{ad}(C_1)(C_k - C'_k) = 0,$$

somit ist nach Lemma 26 und der Voraussetzung $C_k - C'_k = \text{ad}(C_1)S_k$ für eine Derivation $S_k \in \ker b$. Also setzt $id + \lambda S_k$ die Äquivalenztransformation um eine Ordnung fort. \square

Die anderen Äquivalenzklassen sind also, so sie existieren, an nicht-triviale Topologie von Q in $H^2(Q, \mathbb{R})$ gebunden; und es wird sich zeigen, dass sie magnetischen Monopolen entsprechen.

4.1.3 Zeitentwicklung

Generatoren Die Derivationen der klassischen Algebra $C^\infty(Z)$ bezüglich der Multiplikation *und* der Poissonstruktur sind gerade die komplexwertigen symplektischen Vektorfelder $\omega^{-1}Z^1(Z) \otimes \mathbb{C}$, insbesondere also lokal Hamiltonsch $X|_{U_i} = ad(H_i)$ mit bis auf Konstanten eindeutigen Hamiltonfunktionen H_i . Ein Sternprodukt \star induziert nun per Definition eine Deformation der Liealgebra Hamiltonscher Vektorfelder

$$(\text{ad } C^\infty(Z), [\cdot, \cdot]) \cong (C^\infty(Z), \{\cdot, \cdot\})/\mathbb{C}$$

auf die $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -linearen *quasiinneren* \star -Derivationen

$$(\frac{i}{\lambda} \text{ad}_\star \widehat{Z}, [\cdot, \cdot]) \cong (\widehat{Z}, \frac{i}{\lambda} [\cdot, \cdot]_\star) / \mathbb{C}[[\lambda]]$$

via $\text{ad } H_i \mapsto \frac{i}{\lambda} \text{ad}_\star H_i$. Letztere lassen sich nun wieder zu einer globalen \star -Derivation $\frac{i}{\lambda} D_X$ zusammenfügen, und in der Tat ist jede $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineare Derivation $\text{Der } \widehat{Z}$ von dieser Form:

Notiz 11 $\text{Der } \widehat{Z} / \frac{i}{\lambda} \text{ad}_\star \widehat{Z} = \omega^{-1} H_{dR}^1(Z) \otimes \mathbb{C}[[\lambda]]$.

Wir brauchen nur noch die Surjektivität per Induktion zu überprüfen: Ist $D \in \text{Der } \widehat{Z}$ und $D - D_X = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda^i D_i$, so ist $D_k(f \star g) = (D_k f)g + f D_k g \text{ mod } O(\lambda)$, also D_k ein Vektorfeld Y , das wegen $Y\{f, g\} = \frac{i}{\lambda} D_k([f, g]_\star) \text{ mod } O(\lambda) = \{Yf, g\} + \{f, Yg\}$ symplektisch, also lokal Hamiltonsch ist. \square

Bemerkung: Geht man zu formalen Laurentreihen über, wird Notiz 11 Teil der Isomorphie $HH^k(C^\infty(Z)((\lambda^{-1}))) \cong H_{dR}^k(Z) \otimes \mathbb{C}((\lambda^{-1})) \forall k > 0$, s. [WX98].

Generierte Automorphismengruppe Infolge des zusätzlichen Faktors $\frac{i}{\lambda}$ der deformierten Liestruktur gegenüber der \star -induzierten generiert eine (quasiinnere) Derivation i.A. keine (inneren) Automorphismen: Sei X Deformation eines reellen symplektischen Vektorfeldes X_0 mit vollständigem Fluss ϕ^{X_0} , dann erzeugt $\frac{i}{\lambda} D_X$ über die Heisenberggleichung

$$\dot{f}(t) = \frac{i}{\lambda} D_X f(t) \tag{73}$$

eine Deformation der klassischen Zeitentwicklung $t \mapsto \phi_t^{X_0}$, die für alle $X_0 \neq 0$ nicht-lokal und damit auch nicht inner ist. Jedoch ist D_X lokale innere Derivation $\text{ad}_\star H$ bezüglich der \star -induzierten Liestruktur, welche sich stets auf einen inneren (also insbesondere lokalen) Automorphismus exponentieren lässt:

$$e^{\text{ad}_\star H} f = e_\star^{-H} \star f \star e_\star^H \quad \forall H \in \widehat{Z}.$$

Dabei ist das \star -Exponential \exp_\star über die Differentialgleichung definiert, die Reihendefinition führt dagegen auf Konvergenzprobleme in jeder Ordnung ≥ 1 von λ (vgl. [Wal99]).

4.1.4 Klassifikation von Sternprodukten

Seien gemäß Lemma 27 T_i lokale Äquivalenztransformationen zwischen zwei Sternprodukten \star und \star' assoziiert zu einer guten Überdeckung $\{U_i\}$ von Z . Nach Abschnitt 4.1.3 sind die $T_{ij} := T_i T_j^{-1} = e^{\text{ad}_\star t_{ij}}$ inner. Auf den 2-Simplizes $U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt dann $T_{ij} T_{jk} T_{ki} = id$, also sind die Baker-Campbell-Hausdorff Produkte $t_{ijk} := t_{ij} \circ t_{jk} \circ t_{ki}$ konstante Čech-Kozykel und definieren so die *relative Deligne-Klasse* $[\star] - [\star'] := [t_{ijk}] \in \check{H}^2(Z, \mathbb{C})[[\lambda]]$.

Die Notation wird gerechtfertigt dadurch, dass die Abbildung der Äquivalenzklasse einer Deformation $[\star]$ auf die relative Klasse $[\star] - [\star']$ ein Isomorphismus affiner Räume ist (s. z.B. [Neu01]). Die endgültige Klassifikation zeichnet noch einen Ursprung aus und wird (in Hinblick auf die Verallgemeinerbarkeit auf Poissonmannigfaltigkeiten) meist formuliert als:

Satz 13 (s. Referenzen im Überblicksartikel [DS02]) Die Deligne-Klasse $[\star] \in \frac{1}{\lambda}[\omega] + H_{dR}^2[[\lambda]]$ liefert einen Isomorphismus zwischen den Deformationen von (Z, ω) modulo Äquivalenz und Deformationen der symplektischen Struktur ω modulo formaler Symplektomorphismen.

Fedosov-Konstruktion von Sternprodukten ([Fed96],[NT95]) Fedosovs Idee zur Konstruktion von Deformationen symplektischer Mannigfaltigkeiten (Z, ω) besteht darin, die Verklebungen lokaler Sternalgebren durch ein infinitesimales Pendant, nämlich den „konstanten“ Schnitten eines Algebrabündels über Z zu ersetzen: Seine ursprüngliche Konstruktion benutzt die formale Weylgebra $\widehat{\mathbb{R}^{2n}} := (\mathbb{C}[[\xi^1, \dots, \xi^{2n}; \lambda]], \ast)$,

$$f \ast g := C_0(\exp(\frac{\lambda}{2i} \omega^{ij} \partial_i \otimes \partial_j)) f \otimes g. \quad (74)$$

$\widehat{\mathbb{R}^{2n}}$ ist offenbar invariant unter linearen symplektischen Transformationen $Sp(n)$, welche klassisch wie \ast -algebraisch (73) durch Quadratformen erzeugt werden. Bezüglich dieser Aktion definieren dann

$$\widehat{TZ} := Sp(Z) \times_{Sp} \widehat{\mathbb{R}^{2n}} \quad \text{assoziiert zu} \quad P := Sp(Z) \times_{Sp} \text{Aut} \widehat{\mathbb{R}^{2n}}$$

punktwise Deformationen von $TZ = Sp(Z) \times_{Sp} \mathbb{R}^{2n}$ assoziiert zum Frame-Bündel $Sp(Z)$. Nach Notiz 11 ist nun die Liealgebra der $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -linearen Derivationen von $\widehat{\mathbb{R}^{2n}}$ kanonisch isomorph zu $(\widehat{\mathbb{R}^{2n}}, \frac{i}{\lambda}[\cdot, \cdot]_\ast)$ selbst modulo Zentrum $\mathbb{C}[[\lambda]]$, also identifizieren wir

$$T_p P \cong \mathfrak{g} := \left\{ f \in \widehat{\mathbb{R}^{2n}} \mid f_0 \text{ reell} \right\} / \mathbb{R} + \lambda \mathbb{C}[[\lambda]].$$

Folglich erlaubt P eine flache Zusammenhangsform $\eta \in \mathfrak{g} \otimes \Omega(P)$ definiert durch

$$d\eta + \frac{i}{2\lambda}[\eta, \eta]_\ast = 0.$$

Sei nun s ein Sp -äquivarianter Schnitt von $P \rightarrow Sp(Z)$ (solche Schnitte existieren, da $\text{Aut } \widehat{\mathbb{R}^{2n}}$ auf Sp zusammenziehbar ist). Dann ist wie η auch

$$A_F := s^* \eta \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(Sp(Z))$$

Sp -äquivariant und Cartansch längs der Fasern ((93),(94)), also identifizierbar mit einer $\Gamma(P \times_{Sp} \mathfrak{g})$ -wertigen Form auf Z . Gemäß A.2.2 identifizieren wir so

$$\nabla_F := s^* d + \frac{i}{\lambda} \text{ad}_* A_F$$

mit einer kovarianten Ableitung auf \widehat{TZ} .

Interpretiert man nun die ∞ -Jets J^∞ von Funktionen auf Z als \widehat{TZ} -Schnitte, erhält man den gewünschten Isomorphismus

$$\tau : (C^\infty(Z)[[\lambda]], \star_F) \xrightarrow{\sim} (\ker \nabla_F, *_W) : \quad \tau f = p \mapsto s(p)^{-1} J^\infty f \quad (75)$$

in der Identifikation von $\Gamma \widehat{TZ}$ mit äquivarianten Abbildungen $Sp(Z) \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^{2n}}$. τ ist in der Tat isomorph: Zwei Schnitte s, s' unterscheiden sich um faserweise äquivariante Selbstäquivalenzen $g \in P$, d.h. $\nabla'_F = g \nabla_F g^{-1}$, lokal können wir so dank der von g induzierten Äquivalenztransformationen $Z = \mathbb{R}^{2n}$ und $\star_F = *$ annehmen. Bezüglich der kanonischen Aktion $s : Sp(Z) \rightarrow \text{Aut } \widehat{\mathbb{R}^{2n}}$ ist dann $\tau f = \sum_\alpha \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} \xi^\alpha$, also die Taylorentwicklung von $f(x + \xi)$ um x , sowie $\frac{1}{i} A_F = \omega_{ij} \xi^j \otimes dz^i$ die kanonische Form, welche TZ in \widehat{TZ} einbettet und auf $\Omega(Z, \widehat{TZ})$ als $*$ -Derivation

$$\delta := \frac{i}{\lambda} \text{ad}_* A_F = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \otimes dz^i.$$

operiert. Die Translationen $f(x + \xi)$ bilden aber gerade den Kern von $\nabla_F = d - \delta = (\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial \xi^i}) dz^i$. \square

Die formale Weylgebra $*$ ist kanonisch \mathbb{N} -gradiert durch $\deg \lambda = 2$, $\deg \xi_i = 1$. Wir betrachten im Folgenden nur solche $\frac{1}{i} A_F$, die in der induzierten Gradierung auf \mathfrak{g} Deformationen der kanonischen Form sind, d.h. $\frac{1}{i} A_F = \omega_{im} (\xi^i + \Gamma_{jk}^i \xi^j \xi^k + O(3)) \otimes dx^m$. Dann ist jedes ∇_F von der Form $\nabla_F = -\delta + T$ mit

$$T := \nabla + \frac{i}{\lambda} \text{ad } \gamma, \quad \gamma \in \Gamma(\widehat{TZ}^3 \otimes T^*Z) \quad (76)$$

für einen (per Definition von P) torsionsfreien symplektischen Zusammenhang ∇ . (Solche Zusammenhänge sind affin isomorph zu den total symmetrischen 3-Vektorfeldern, denn in lokalen Darbouxkoordinaten schreibt sich $\nabla \omega = 0$ als $\omega_{ik} \Gamma_j^k + \omega_{kj} \Gamma_i^k = 0$, also sind die Γ_{ijk} total symmetrisch in den Indizes.)

„Liften“ wir ∇_F zu einer Zusammenhangsform $\nabla^F := d + A^F$ auf $\widehat{T}Z$ via Lift von A_F auf eine $\widehat{T}Z$ -wertige deg-Deformation der kanonischen Form, erhalten wir i.A. Krümmung

$$\Omega = dA^F + \frac{i}{2\lambda}[A^F, A^F]_*$$

mit Werten im Zentrum $\Omega(Z) \otimes \mathbb{C}[[\lambda]]$ von $(\Gamma\widehat{T}Z \otimes_{C^\infty(Z)} \Omega^2(Z), \frac{i}{\lambda}[\cdot, \cdot]_*)$. Ω ist geschlossen (infolge der Bianchi-Identität und $\nabla_F = d$ auf dem Zentrum) und nur bis auf einen Korand $d\alpha$ bestimmt, welcher der Ersetzung $\nabla^F \mapsto \nabla^F + \alpha$ entspricht; in der Tat gilt:

Satz 14 [Neu01] $[\star_F] = \frac{1}{\lambda}[\Omega]$.

Allgemeiner wird Ω durch die Addition $A^F \mapsto A^F + \gamma$ auf $\Omega + \nabla^F \gamma + \frac{i}{2\lambda}[\gamma, \gamma]$ abgebildet, somit können wir die zu (76) gehörige Krümmung modulo Korand in der Form

$$\Omega = \omega - R + \delta\gamma - \nabla\gamma - \frac{i}{2\lambda}[\gamma, \gamma] \quad (77)$$

schreiben, wobei $R := \frac{1}{4}\omega_{im}R^m_{jkl}\xi^i\xi^j dz^k \wedge dz^l$ die Krümmung von ∇ ist. Bemerke, dass $\frac{1}{2\lambda}[\gamma, \gamma] = \gamma^2$ ist in der natürlichen Fortsetzung von $*$ auf $\Gamma\widehat{T}Z$ -wertige Formen. Auf letzteren operiert die Fortsetzung $\delta := dz^i \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ als Korand vom deg-Grad -1 mit trivialer Kohomologie, insbesondere liefert der Homotopieoperator $\delta^{-1}w := \frac{1}{p+q}\xi_i i(\frac{\partial}{\partial z^i})w$ für Monome w vom Grad p in ξ^i , $q > 0$ in dx^i , eine Kettenhomotopie auf das Zentrum

$$(\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta)w = w - \sigma(w). \quad (78)$$

Das setzt sich fort auf die Deformation $\nabla_F = -\delta + T: \nabla_F^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad } \Omega = 0$ und

$$\nabla_F \nabla_F^{-1} + \nabla_F^{-1} \nabla_F = id - \sigma \quad (79)$$

bezüglich $\nabla_F^{-1}w := -\delta^{-1}\left(\frac{1}{1-[\delta, T]}w\right)$ im Sinne der geometrischen Reihe, s. [Fed96, 5.2.5]. Der Isomorphismus (75) lässt sich damit expliziter angeben:

$$\tau f = f - \nabla_F^{-1}df. \quad (80)$$

Man erhält so umgekehrt zu gegebenem torsionsfreien symplektischen Zusammenhang ∇ , gegebener ω -Deformation Ω und $s \in \Gamma\widehat{T}Z^4$ ein eindeutiges Sternprodukt $\star_F = \star_{\nabla, \Omega, s}$, indem man $\gamma \in \Gamma(\widehat{T}Z^2 \otimes T^*Z)$ deg-iterativ anhand der zu (77) äquivalenten Gleichung

$$\gamma = \delta s + \delta^{-1}(\Omega - \omega + R + \nabla\gamma + \frac{i}{\lambda}\gamma^2) \quad (81)$$

und der Normierungsbedingung¹⁸ $\delta^{-1}\gamma = s$ bestimmt.

¹⁸vgl. [EW96] für eine Interpretation der Normierungsbedingung $\delta^{-1}\gamma = 0$.

Verallgemeinerung [Wal99],[Neu01]. Die Produkte $\star_{\Omega, \nabla, s}$ sind gemäß(80), (74) in r -ter λ -Ordnung modulo Differentialoperatoren der Ordnung $< r$ von der Weyl-geordneten Form

$$C_r(f.g) \sim (\delta^{-1}\nabla)^r f \star_r (\delta^{-1}\nabla)^r g = (\omega^{-1})^{\otimes r}(\nabla^r f, \nabla^r g),$$

insbesondere also *natürlich*, d.h. die C_r sind Differentialoperatoren der Ordnung $\leq r$ in jedem Argument. Statt andere natürliche Produkte aus Äquivalenztransformationen von \star_F zu gewinnen, kann man direkt faserweise Äquivalenztransformationen $S : (\widehat{T}Z, \star) \rightarrow (\widehat{T}Z, \star')$ mit $\deg S = 0$ betrachten. I. A. ist dann aber ∇ keine \star' -Derivation mehr, so dass man zu Zusammenhängen der Form

$$\nabla'_F = -\delta + S\nabla S^{-1} + \frac{i}{\lambda} \text{ad}_{\star'} \gamma, \quad \gamma \in \Gamma^3(\widehat{T}Z)$$

übergehen muss, auf welche sich Fedosovs Konstruktion eines Sternproduktes \star'_F überträgt, falls $[\delta, S\nabla S^{-1}] = 0$ (vgl. [Neu01] 1.3). ∇ bleibt als Parameter der \star'_F -Produkte sinnvoll, denn jedes natürliche Sternprodukt definiert über die allgemeine Form von

$$C_2 = (\omega^{-1})^{\otimes 2}(\nabla^2, \nabla^2) + \alpha(\mathcal{X}, \mathcal{X}) + (\text{ad } S^1)^2 C_0 + \text{ad}(S^1)(\{.,.\}) + \text{b}S_2 \quad (82)$$

einen eindeutigen symplektischen Zusammenhang ∇ , wobei S_1 der Differentialoperator aus (72), $S_2 \in \mathcal{C}^1$ und $\alpha \in \Omega^2(Z)$ ist (vgl. [GR]). (82) erhält man aus dem Fedosovprodukt $\star_{\Omega, \nabla, 0}$, für das $C_2 = (\omega^{-1})^{\otimes 2}(\nabla^2, \nabla^2) + \alpha(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ gilt, durch die Äquivalenztransformation $id + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \dots$. In der Tat besteht die Vermutung, dass alle natürlichen Sternprodukte auf (Z, ω) verallgemeinerte Fedosovprodukte sind.

4.1.5 Darstellung

Deformierte Vektorbündel Ausgehend von Lemma 24 definiert man die Deformation eines Vektorbündels E als eine (\widehat{Z}, \star) -Modulstruktur auf $\Gamma(E)[[\lambda]]$, die modulo $O(\lambda)$ mit der klassischen ${}_{\mathcal{A}}\Gamma(E)$ übereinstimmt. Diese bilden gerade die endlich erzeugten projektiven \widehat{Z} -Moduln mit klassischem Limes ${}_{\mathcal{A}}\Gamma(E)$: Ist $\hat{p} = \hat{p} \star \hat{p} \in M^n(\widehat{Z})$ Deformation eines Projektors p von $C^\infty(Z)^n$ auf $\Gamma(E)$, so induziert $pC^\infty(Z)[[\lambda]] \xrightarrow{\sim} p \star \widehat{Z}^n : pf \rightarrow \hat{p} \star f$ eine Deformation von E (s. [BW02],2.3), und in der Tat ist jede E -Deformation von dieser Form:

Lemma 28 ([BW02]) *Die Deformation von Vektorraumbündeln ist eindeutig bis auf Modulisomorphismen, welche die Identität $id_{\Gamma(E)}$ deformieren. Insbesondere ist also K_0 stabil unter Deformation $K_0(C^\infty(Z)) = K_0(\widehat{Z})$.*

Das folgt nun aus folgenden wohlbekanntem Äquivalenzen:

Lemma 29 *Für einen Modul P sind äquivalent:*

1. P ist projektiv.
2. Jeder Modul-Epimorphismus $\gamma : M \rightarrow P$ hat ein Rechtsinverses.
3. Jeder Homomorphismus $\alpha : P \rightarrow M'$ faktorisiert über jedem Epimorphismus $\beta : M \rightarrow M'$.

- 1 \Rightarrow 2: Sei M frei, $\beta : M \rightarrow P$ die Fortsetzung einer Bijektion von Generatoren und $id_P = \beta \circ f$ eine Faktorisierung von id_P , dann ist $p := f \circ \beta \in \text{End}(M)$ Projektor $p = p^2$, also $m \mapsto (\beta(m), (1-p)m)$ Isomorphismus $M = P \oplus (1-p)M$.
- 2 \Rightarrow 3: Ist $F := P \oplus Q$ frei, dann hat $\gamma \oplus id_Q : M \oplus Q \rightarrow F$ ein Rechtsinverses gegeben durch Bijektion von Generatoren.
- 3 \Rightarrow 1: Erweitere $\alpha : P \rightarrow \text{im } \alpha$ via id_P zu einem Isomorphismus $\alpha' : P \xrightarrow{\sim} \text{im } \alpha' \subset \text{im } \alpha \oplus P$, dann reduziert sich die Faktorisierbarkeit auf die Rechtsinvertierbarkeit von $\beta' : (\beta \oplus id_P)^{-1}(\text{im } \alpha') \rightarrow \text{im } \alpha'$. \square

Insbesondere überträgt sich die Beschreibung der Isomorphieklassen durch Verklebungsfunktionen: Sind $\psi_i : \Gamma(E|_{U_i})[[\lambda]] \rightarrow C^\infty(U_i)[[\lambda]]^n$ formale Deformationen lokaler E -Trivialisierungen auf (\widehat{Z}, \star) -Modulisomorphismen, dann definieren die deformierten Verklebungsfunktionen $\psi_i \psi_j^{-1}$ analog zum klassischen Fall (A.1) \star -Čech-1-Kozykel in der Garbe deformierter lokaler Umzeichnungen, welche die Isomorphismenklasse des deformierten Bündels repräsentiert, vgl. [BW02].

Definition von Darstellungen Eine \widehat{Z} -Darstellung auf einem deformierten Vektorraumbündel $\Gamma(E)[[\lambda]]$ ist ein $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -linearer Algebrenhomomorphismus ρ von \widehat{Z} in die Differentialoperatoren auf $\Gamma(E)[[\lambda]]$, notiert als $\rho(f)e = f \bullet e$ für $f \in \widehat{Z}, e \in \Gamma(E)[[\lambda]]$. In unseren Fällen ist meist $\Gamma(E) = C^\infty(C)$ trivial, man spricht dann kurz von Darstellungen auf C .

Lemma 30 Jede \widehat{Z} -Darstellung auf C ist Deformation einer koisotropen Abbildung $i : C \rightarrow Z$, d.h. $f \bullet s = i^* f \cdot s + O(\lambda)$ und $\ker i^*$ ist Poisson (also C koisotrop, falls i Einbettung ist).

Beweis gemäß[Bor, Th. 2.2]: Sei o.E. f reellwertig (sonst zerlege in \Re - und \Im -Teil), dann ist mit $1 + f^2$ auch $\rho(1 + f^2)_0$ invertierbar, also ein Multiplikationsoperator. Somit ist ρ_0 klassischer Algebrenhomomorphismus, also gemäß(69) der pullback i^* nach C . Ist nun $i^* f = i^* g = 0$, folgt $i^* \{f, g\} = [\rho_1(f), \rho_0(g)] + [\rho_0(f) + \rho_1(g)] = 0$, also ist i gemäßLemma 1 koisotrop. \square

Sei C abgeschlossene koisotrope Z -Untermannigfaltigkeit mit Verschwindungsideal \mathcal{I}_C . Ein Sternprodukt \star heißt an C *angepasst*, falls die Deformation $\mathcal{I}_C[[\lambda]]$ auch ein \star -Linksideal ist; in diesem Fall ist $\widehat{Z}/\mathcal{I}_C[[\lambda]]$ kanonische \star -Darstellung auf C . Ist weiter \star' äquivalent zu \star via S , induziert die \star - auch eine \star' -Darstellung $f \bullet' [c] := [Sf \star c]$, und in der Tat ist jede Darstellung auf C von dieser Form:

Satz 15 ([Bor]) Ein Sternprodukt \star ist genau dann auf einer abgeschlossenen koisotropen Mannigfaltigkeit C darstellbar, wenn es auf einer offenen C -Umgebung ein äquivalentes an C angepasstes Sternprodukt \star' gibt.

In der Tat gibt es zu einer \star -Darstellung \bullet auf C und einer Tubenumgebung $\text{im}(i : T_C Z/TC \hookrightarrow Z)$ von C eine Äquivalenztransformation S von \star auf \star' , welche das Darstellungs(links)ideal

$$\mathcal{I}_\bullet := \{f \in \widehat{Z} \mid f \bullet 1 = 0\} \quad (83)$$

auf $\mathcal{I}_C[[\lambda]]$ abbildet: nämlich die Fortsetzung des durch $Df = f \bullet 1$ definierten Differentialoperators $D = i_C^* + O(\lambda)$ auf S via einer Zerlegung der Eins und der kanonischen Projektion von $i(T_C Z/TC)$ auf C , s. [Bor, Prop. 3.2]. Einen expliziten Ausdruck für S für den Spezialfall einer 1-kodimensionalen Niveaufäche findet man auch in [Glö98]. \square

Bemerkung: Zusammenhang mit der GNS-Darstellung [Wal99] \mathbb{R} induziert auf $\mathbb{R}[[\lambda]]$ eine (nicht archimedische) Ordnungsstruktur, indem man gemäß der formalen, Konvergenz ausblendenden Struktur $0 < \lambda < r \quad \forall r \in \mathbb{R}^+ - 0$ setzt. Ist nun \widehat{Z} involutiv $(f \star g)^* = g^* \star f^*$, lässt sich die GNS-Darstellung B.3 übertragen: Ausgehend von Lemma 42 definiert man ein $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineares Funktional $\langle \cdot \rangle : \widehat{Z} \rightarrow \mathbb{C}[[\lambda]]$ als *positiv*, falls $\langle f^* \star f \rangle \geq 0$. Der Gelfandraum $J = \{f \in \widehat{Z} \mid \langle f^* \star f \rangle = 0\}$ ist dann wieder wie im C^* -Fall ein Linksideal, eben das Darstellungsideal (83) des zugehörigen \widehat{Z} -Linksmoduls \widehat{Z}/J , und letzterer wird Prähilbertraum bezüglich des von $\langle f|g \rangle := \langle f^* \star g \rangle$ induzierten Skalarprodukts.

Beispiel: Sei o.E. $C \subset Z$ koisotrop und \widehat{Z}_C die Einschränkung von \widehat{Z} auf Funktionen f mit kompaktem Schnitt $\text{supp } f \cap C$. Aus dem Satz von Riesz folgt, dass jedes positive Funktional zu einer GNS-Darstellung von \widehat{Z}_C auf C „Deformation“ eines positiven Maßes mit Träger in C ist. Z. B. erhält man die Schrödinger-Darstellung $f \bullet_W u := N^{-1} f \star_S \pi^* u|_{T_0^* Q}$ von $(\widehat{T}^* Q_Q, \star_W)$ auf Q aus dem Funktional $\langle f \rangle = \int_{T_0^* Q} f|_{T_0^* Q} |dq|$, dessen Gelfandideal $J = N_{\frac{1}{2}}^{-1} \mathcal{I}_Q[[\lambda]]$ ist.

4.2 Das Problem der Kaustiken im formalen Rahmen

So gut einerseits das Deformationskonzept die algebraischen Aspekte des Quantisierungsproblem klassischer Observablen beschreibt, so unzulänglich ist andererseits der formal algebraische Rahmen zur Behandlung der quantenmechanischen Dynamik und des Spektrums. Etwa reproduziert nach Abschnitt 2.2.1,5 der C^* -algebraische Spektralbegriff für Sternalgebren das klassische Spektrum; ebenso fehlt ein Analogon für den Symbolkalkül oszillatorischer Distributionen, auf dem die Konstruktion semiklassischer Spektren in Kapitel 3 (insbesondere die Maslovbedingung) beruht ¹⁹.

Im Kaustiken-freien Fall kann man sich auf einfache Weise behelfen:

¹⁹Paradoxerweise wird der Spektralbegriff für Sternalgebren über die Dynamik definiert, nämlich als Träger des durch $\text{Exp}(\tau \frac{i}{\lambda} f) = \int e^{\frac{i}{\lambda} \sigma \tau} dE_\lambda$ definierten Spektralmaßes E_λ . Auf diese Weise erhält man schon von der Wahl der Ordnungsvorschrift abhängige Spektren für Observablen, für die das Ordnungsproblem noch gar nicht auftritt.

4.2.1 Maslovbedingung in Abwesenheit von Kaustiken

Sei $Z := T^*Q$ der Phasenraum, \star das standardgeordnete Produkt und \bullet seine kanonische Darstellung auf Q (51). Wir nehmen zunächst an, dass Q nicht-triviale Topologie hat, so dass die Maslovbedingung (40)

$$\frac{1}{\lambda}[\theta|_L] + \frac{\pi}{2}\mu \in H_{dR}^1(L, 2\pi\mathbb{Z})$$

auch für projizierbare Lagrangemannigfaltigkeiten $L = \text{im } A$ nicht verschwindet. Dann lässt sich die Bedingung leicht algebraisch umformulieren, indem man als Observablen- und Darstellungs algebra formale Laurentreihen²⁰ in λ^{-1} statt formaler Potenzreihen in λ betrachtet. Dazu beschränken wir uns (gemäß der typischen quantenmechanischen Situation) auf Funktionen $\mathcal{P}(T^*Q)$, die polynomial in den Impulsen p_i sind, so dass zum Produkt \star in jeder Ordnung nur endlich viele Summanden beitragen:

$$(f \star g)_n = \sum_{l+k+r=n} C_r(f_l, g_k) \quad \text{mit } l, k, r < \infty, r \geq 0.$$

In $\mathcal{P}(T^*Q)((\lambda^{-1}))$ schreibt sich die asymptotische Eigenwertgleichung (53) für $L = \text{im } A$ lokal als

$$0 = (H - E) \bullet e^{\frac{i}{\lambda}S} a|_{U_i} \equiv \iota^*((H - E) \star \pi^*(e^{\frac{i}{\lambda}S} a))|_{U_i}. \quad (84)$$

mit $dS_i = A|_{U_i}$. Wir interpretieren nun die fortgesetzten generierende Funktionen π^*S_i als lokale Hamiltonfunktion. Klassisch erzeugen sie lokal die Fasertranslation $(q, p) \mapsto (q, p + A(q))$, deren Einschränkung auf den Nullschnitt wir mit der üblichen Lagrangeimmersion $A : Q \rightarrow L$ zur Generierenden A identifizieren. Da nun die klassische Unter algebra $(\pi^*C^\infty(Q), \cdot)$ auch $(\mathcal{P}(T^*Q)((\lambda^{-1})), \star)$ -Unter algebra ist, folgt $e^{\frac{i}{\lambda}\pi^*S_i} = e^{\frac{i}{\lambda}\pi^*S_i}$. Via

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\lambda}\pi^*S} \star H \star e^{\frac{i}{\lambda}\pi^*S} \bullet a &= e^{-\pi^*\frac{i}{\lambda}S} J_p^\infty H|_0 \cdot e^{-i\lambda D} (e^{\frac{i}{\lambda}S} a) \\ &= e^{-\pi^*\frac{i}{\lambda}S} J_p^\infty H|_0 \cdot e^{\frac{i}{\lambda}S} e^{-i\lambda D + idS} a \\ &= J_p^\infty H|_0 \cdot e^{-i\lambda(D - \frac{1}{\lambda}dS)} a, \end{aligned} \quad (85)$$

lässt sich nun (84) umschreiben als Eigenwertgleichung für die Amplitude $(H - E) \bullet_A a = 0$ bezüglich der Darstellung

$$H \bullet_A a := T_A H \bullet a := J_p^\infty|_0 H \cdot e^{-i\lambda(D - \frac{1}{\lambda}A)} a. \quad (86)$$

Die lokalen Konjugationen in (85) fügen sich genau dann zu einer globalen zusammen, wenn $S_i - S_j|_{U_i \cap U_j} \in 2\pi\lambda\mathbb{Z}$ ist, also:

Notiz 12 *Im projizierbaren Fall $L = \text{im } A$ ist die Maslovbedingung äquivalent dazu, dass die formale Fasertranslation T_A inner bzw. \bullet_A isomorph zu \bullet ist.*

²⁰Der Laurenttring $R((\lambda^{-1}))$ zu einem Ring R besteht aus formalen Potenzreihen in λ und λ^{-1} , deren positive λ -Potenzen beschränkt sind. Ist insbesondere R Körper, so auch $R((\lambda^{-1}))$.

Minimale Kopplung T_A ist offenbar wohldefinierter $\mathbb{C}((\lambda^{-1}))$ -linearer Isomorphismus von $\mathcal{P}(T^*Q)((\lambda^{-1}))$ für alle $A \in \Omega^1(Z)$ und definiert so ein Sternprodukt $f \star_{dA} g := T_A^{-1}(T_A f \star T_A g)$ mit Darstellung \bullet_A auf Q , wobei $\bullet_A \sim \bullet_{A'}$ genau dann, wenn $A - A' \in H_{dR}^1(2\pi\lambda\mathbb{Z})$. (Man kann sogar wie in [Bor, Th. 3.3] zeigen, dass alle \star_{dA} -Darstellungen auf Q von dieser Form sind.)

T_A lässt sich eichtheoretisch deuten als *minimale Kopplung*: Dabei betrachtet man die formale Phase $s := e^{\frac{i}{\lambda}S}$ als Eichtransformation in einem trivialen S^1 -Bündel P über Q und A als Eichpotential (d.h. mit s zurückgezogene Zusammenhangsform auf P). Die Ersetzung von D durch die kovariante Ableitung $D - \frac{1}{\lambda}A$ (minimale Kopplung) macht dann gemäß(85) die Eigenwertgleichung (84) invariant unter lokalen Umeichungen (96).

Bemerkungen zur Ausdehnung auf Kaustiken

1. **Analoga zu Generierenden** Zur Ausdehnung auf Lagrangemannigfaltigkeiten mit verschwindender K^1 (und damit verschwindender Maslovklasse) kann man gemäßLemma 17 versuchen, das Konzept der Generierenden zu imitieren: In den Notationen von Abschnitt 1.3.2 bildet $C^\infty(C)$ einen Bimodul²¹ bezüglich der kanonischen Aktionen der potenziellen Darstellungsräume $C^\infty(B)$ und $C^\infty(Q)$, also via Fasertranslation ϕ^* auch von $C^\infty(L)$. Gemäß(68) ist aber

$$C^\infty(C) \otimes_{C^\infty(Z)} \phi^* C^\infty(L) = C^\infty(C) \otimes_{C^\infty(Z)} C^\infty(B) = C^\infty(B),$$

also induziert die Darstellung \bullet_A schon in unterster Ordnung keine Darstellung auf Q .

2. **Naive FIO-Analoga** Genau für Äquivalenztransformationen der Lagrangefaserung T^*Q , welche lokal durch Hamiltonfunktionen H der Form $\phi(q).p$ erzeugt werden, ist e_\star^H wohldefinierte formale Potenzreihe in $C^\infty(Z)[[\lambda, \lambda^{-1}]]$ (s. [The00]) bezüglich des standardgeordneten Produkts, doch bilden letztere keine \star -Algebra.

Möchte man auf einen zweiten formalen Parameter verzichten, so bietet sich zunächst an, ein *FIO* U assoziiert zum Symplektomorphismus ϕ durch den formalen Differentialoperator $A(U)$ zu ersetzen, den man aus U durch die Erweiterung des Lemmas 19 von Egorov: $U^{-1}Op(f)U = A(U)f \circ \phi$ für $f \in S^0(Z)$ erhält (vgl. [LNT]). Problematisch wird dann die Verknüpfung solcher $A(U)$.

Einen anderen Zugang liefert folgendes

²¹ C heißt (A, D) -Bimodul, wenn es A -Rechts- und D -Linksmodul ist, in dem beide Aktionen kommutieren

Lemma 31 [Bor, Prop. 3.1]. Sei ϕ symplektischer Diffeomorphismus.

$$(f \otimes g_1) \bullet g_2 := \phi_* f \star' g_1 \star' g_2 \quad g_i \in \widehat{Z}', f \in \widehat{Z}$$

induziert eine 1:1-Korrespondenz von $\star \otimes \star^{opp}$ -Darstellungen \bullet auf graph $\phi \cong Z$ und Algebrenisomorphismen

$$\widehat{\phi} = \phi + O(\lambda) : (\widehat{Z}, \star) \rightarrow (\widehat{Z}', \star').$$

3. Versuche, Notiz 12 im Rahmen der Fedosovkonstruktion zu interpretieren, s. Ausblick (Abschnitt 4.2.3).

4.2.2 L-angepasste Sternprodukte

Magnetische Monopole Sei $A \in \Omega^1[[\lambda]]$ mit A_0 reell, dann generiert

$$D_A := \frac{\exp(-i\lambda D) - 1}{D} A \cdot J_p^\infty$$

eine Deformation der Fasertranslation

$$(T^*Q, \omega) \rightarrow (T^*Q, \omega + dA) : p_q \mapsto p + A$$

auf $T_A : (\widehat{Z}, \star) \rightarrow (\widehat{Z}', \star_{dA})$, die sich im Fall $A_0 = 0$ (also $T_A = id_Z + O(\lambda)$) wieder als minimalen Kopplung (86) schreiben, im Rahmen formaler Potenzreihen aber nicht mehr als Eichinvarianz (85) deuten lässt. D_A ist Derivation und damit T_A \star -Automorphismus falls $dA = 0$. Sei nun $B \in \Omega^2(Z)[[\lambda]]$, B_0 reell, mit lokalen Potenzialen $A_i : B|_{U_i} = dA_i$, dann fügen sich wegen $T_{A_i} T_{A_j}^{-1} = T_{A_i - A_j}$ die lokalen Produkte \star_{dA_i} zu einem Sternprodukt \star_B in \widehat{Z}' zusammen, dessen Deligne-Klasse gemäß[BNPW03] durch $[\star_B] = -\frac{i}{\lambda} \pi^* [B]$ gegeben ist.

Wir nehmen nun an, dass $B_0 = 0$, also $\star_B(Z, \omega)$ deformiert. Erfüllt dann B außerdem die Diracschen Integralitätsbedingung

$$[B] \in \lambda H_{dR}^2(Q, 2\pi\mathbb{Z}) + O(\lambda^2)$$

für magnetische Monopole, so lässt sich (86) noch als *lokale* Darstellung \bullet_i von \star_B auf einem (deformierten) Linienbündel $\Gamma(E)[[\lambda]]$ mit Chernklasse $\frac{1}{2\pi}[B]$ interpretieren: Auf den 1-Simplizes $U_i \cap U_j$ mit $A_i - A_j = dS_{ij}$ gilt in der Tat $f \bullet_i a = e^{-\frac{i}{\lambda} S_{ij}} f \bullet_j e^{\frac{i}{\lambda} S_{ij}} a$, so dass die Verklebungsbedingung $e^{\frac{i}{\lambda}(S_{ij} + S_{jk} + S_{kj})} = 1$ gemäß Anhang A.1, Lemma 1 ff. ein S^1 -Bündel P mit Chernklasse $\frac{1}{2\pi}[B]$ definiert; und E ist das assoziierte Linienbündel $E = P \times_{S^1} \mathbb{C}$. (Eine alternative Definition der \star_B und Interpretation der Integralitätsbedingung findet man in [BW02].)

Allgemeine Darstellungen auf L Eine Z -Untermannigfaltigkeit L der Dimension $\frac{1}{2} \dim Z$ muss nach Lemma 30 Lagrangesch sein, damit $C^\infty(L)[[\lambda]]$ eine \star -Modulstruktur erlaubt. Dank des Satzes von Weinstein 2 können wir $Z = T^*L$ um L annehmen, und hier liefern die Darstellungen \bullet_A (86) von $(C^\infty(Z)[[\lambda]], \star_{dA})$ für alle $A \in \lambda\Omega^1[[\lambda]]$ angepasste Sternprodukte. In der Tat wird in [Bor, Th. 3.3] anhand der Wirkung von \star_B auf den Erzeugenden $\pi^*C^\infty(L)[[\lambda]]$ und $\{z \mapsto z.X_{\pi(z)} \mid X \in \Gamma TL[[\lambda]]\}$ von $\mathcal{P}(T^*Q)[[\lambda]]$ nachgerechnet, dass \star_B um L nur für $B = dA$ an L angepasst ist. Daraus folgert man mit Satz 13, 15 und Notiz 12:

Satz 16 [Bor, Th 3.3] *Eine Deformation (\widehat{Z}, \star) ist genau dann auf einer Lagrangemannigfaltigkeit $L \subset Z$ darstellbar, wenn $i_L^*[\star] = 0$; und die Isomorphieklassen von Darstellungen sind in Bijektion zu*

$$\lambda H_{dR}^1(L)/H_{dR}^1(L, 2\pi\mathbb{Z}) + \lambda^2 H_{dR}^1(L)[[\lambda]].$$

L -angepasste Fedosovprodukte

Lemma 32 *Ist ∇ der torsionsfreie symplektische Zusammenhang eines L -angepassten Fedosov-Sternprodukts, so ist ∇ L -angepasst (d.h. auf L reduzierbar²²).*

In der Tat, bezeichnet σ die Projektion auf das Zentrum, so gilt $\sigma\delta\tau f = \delta\delta^{-1}df = df$. Ist nun f im Verschwindungsideal $I := \mathcal{I}_L[[\lambda]]$ von L , so ist $df|_{TL} = 0$, also lässt sich Anpasstheit $\widehat{Z} * I \subset I$ charakterisieren durch

$$\sigma\delta(X * \tau I)|_{TL} = 0 \quad \forall X \in \ker \nabla_F. \quad (87)$$

Dabei ist $\tau f = f + \delta^{-1}df + (\delta^{-1}\nabla)^2 f + \{\gamma_3, \delta^{-1}df\} + O(3)$ modulo $\deg \geq 3$, und (87) wird in 1. Ordnung von λ und \deg -Grad 1 in X zu

$$0 = X *_1 \delta(\delta^{-1}\nabla)^2 I|_{TL} = X * (\nabla\delta^{-1} + \delta^{-1}\nabla)dI|_{TL}. \quad (88)$$

Dabei entspricht $[\nabla, \delta]$ gerade der symmetrisierten kovarianten Ableitung D unter dem kanonischen Algebrenisomorphismus ϕ von $(\widehat{T}Z, *)$ auf die deformierte symmetrische Algebra $\vee T^*Z[[\lambda]]$ gegeben durch

$$\phi(f)(\xi^{\vee k}) = f(\xi), \quad \forall \xi \in \Gamma TZ, f \in \mathcal{P}^k(TZ)[[\lambda]] \subset \widehat{T}Z.$$

Sind nun $X, Y \in \Gamma TZ$ an L tangentiale Vektorfelder, so ist modulo ΓTL $[X, Y]|_L \sim 0$ und damit $\nabla_X Y \sim \nabla_Y X$ dank Torsionsfreiheit, also ist gemäß(88) $0 = DdI(X, Y)|_L = dI(D_X Y)|_L$ und damit auch $D_X Y$ tangential an L . \square

²²d.h. TL ist invariant unter Paralleltransport längs Kurven in L . Dank Torsionsfreiheit reicht dazu schon, dass L total geodätisch ist: Die Geodätengleichung $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ für Kurven in L reduziert sich dann ja in angepassten Koordinaten auf dem L -Komplement (indiziert durch l) zu $\Gamma_{jk}^l(c_i) \dot{c}^j \dot{c}^k = 0$, also dank Torsionsfreiheit $\Gamma^l|_{T^2L} = 0$.

Eine Idee in [Xu98] korrigierend (wo das faserweise Weylprodukt verwendet wird, das nie zu angepassten Sternprodukten führt), kann man nun angepasste Fedosovprodukte \star_F wie folgt konstruieren:

Sei $I \subset \Gamma \widehat{T}Z \otimes \Omega(Z)$ definiert durch

$$f \in I \iff f| \bigwedge TL \subset \mathcal{I}_{TL},$$

und $*$ ein TL -angepasstes faserweises deg-gradiertes Produkt, so dass \mathcal{I}_{TL} $*$ -Verschwindungsideal (also $*$ bereits „infinitesimal angepasst“) ist. In einer Weinstein-Tubenumgebung T^*L sind gerade die standardgeordneten Produkte

$$f * g := C_0 \exp \left(-\frac{i\lambda}{2} (dq^i)^v \otimes \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h \right) f \otimes g$$

angepasst, wobei h, v der horizontale bzw. vertikale Lift von ΓTL bzw. ΓT^*L auf T_L bezüglich eines Zusammenhangs auf L bezeichnet, vgl. [Wal99].

Ist nun ∇ L -angepasst, so ist $R \in I$, denn für L -tangente Vektorfelder X, Y, Z ist dann auch $R^\sharp(X, Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z$ L -tangential, also $R|TL^4 = 0$ wegen L Lagrange. Sind nun auch $\Omega, s \in I$, so auch das via (81) determinierte γ , denn δ und ∇ erhalten I . Folglich ist I ∇_F -invariant und damit $\ker \nabla_F \cap I$ in der Tat das τ -Bild des Verschwindungsideals von L .

Lemma 33 [Xu98] \star_F ist L -angepasst, falls all seine Konstruktionsdaten $(\Omega, \nabla, s, *)$ L -angepasst sind.

Bemerkung zu integrablen Systemen Für ein semiklassisch integrables System gegeben durch eine Lagrangefaserung, die von $\frac{1}{2} \dim Z$ unabhängigen \star -kommutierende Observablen erzeugt wird, ist ein anderer Anpasstheitsbegriff gemäß Abschnitt 3.3 sinnvoller: nämlich die \star -Invarianz unter den klassischen Hamiltonschen Flüssen der H_i . Genau dann bilden die klassischen Lieableitungen \star -Derivationen. In Termen der Fedosovalgebra $(\ker \nabla_F, *)$ sind die \star -Derivationen gerade durch

$$-\frac{i}{\lambda} \operatorname{ad}_* \nabla_F^{-1} A, \quad A \in Z^1(Z)$$

gegeben, denn $\ker \nabla_F$ ist nur dann invariant unter $D_h := -\frac{i}{\lambda} \operatorname{ad}_* h$, wenn

$$0 = [\nabla_F, D_h] \equiv -\frac{i}{\lambda} \operatorname{ad} \nabla_F h,$$

also $\nabla_F \in \Omega^1(Z)$ zentral, also wegen $\nabla_F^2 = 0$ geschlossen ist. In der Tat lässt sich so Notiz 11 für Fedosovprodukte beweisen, s. [MBN04]. Mit Hilfe der deformierten Cartanformel

$$L_X = \nabla_F i(X) + i(X) \nabla_F - \frac{1}{\lambda} \operatorname{ad}_* \nabla_F^{-1} T(X), \quad T(X) := (1 + \frac{1}{2} \nabla) i(X) \omega - i(X) \gamma$$

für symplektische Vektorfelder X lässt sich damit die Bedingung an L_X , auch \star -Derivation zu sein, zu $\nabla_F T(X) = A \in Z^1(Z)$ umschreiben. Damit lässt sich zeigen:

Satz 17 [MBN04] *Ein symplektisches Vektorfeld X ist genau dann Derivation von $\star_F = \star_{\nabla, \Omega, s}$ (also $\star_F \phi^X$ -invariant), wenn $L_X(\nabla, \Omega, s) = 0$ ist (also die Konstruktionsdaten ϕ^X -invariant sind). In diesem Fall ist X genau dann inner, wenn es Hamiltonsch bezüglich der deformierten symplektischen Struktur ist.*

Insbesondere übertragen sich so die Existenz- und Klassifikationssätze der klassischen auf die deformierte Impulsabbildung (bezüglich der deformierten symplektischen Struktur).

4.2.3 Ausblick zur Maslovbedingung in der Deformationsquantisierung

Sei $p : Sp(T^*Q) \rightarrow U(T^*Q)$ der Bündelhomomorphismus induziert durch die Wahl einer kompatiblen fast komplexen Struktur auf TT^*Q und die Projektion $Sp(n) \rightarrow U(n) : g \mapsto g(g^t g)^{-\frac{1}{2}}$. Seien weiter ∇_F^L, ∇_F^π die Fedosovzusammenhänge zu einem L -angepassten bzw. dem standardgeordneten Produkt auf T^*Q . Dann lässt sich die Maslovklasse gemäß Lemma 15 und Lemma 32 in Fedosov-Termen schreiben als

$$\mu(TL, \ker T_L\pi) + O(\lambda) = 2i_L^* \operatorname{tr}_C(p^{(1)}(\nabla_F^L - \nabla_F^\pi)^{(1)}), \quad (89)$$

wobei ⁽¹⁾ die Projektion auf den deg-Grad 1 bezeichnet; Analoges gilt für die höheren Maslovklassen.

Man kann in Hinblick auf Lemma 28 direkt nach \star -algebraischen Pendants der durch $L, \ker T_L\pi$ definierten $K_{\mathbb{R}}^1(L)$ -Klasse k (Abschnitt 1.5.3) fragen. Im Gegensatz zur K_0 -Klasse sind aber die höheren algebraischen K -Klassen (s. [Ros94]) weder zu den topologischen äquivalent nach invariant unter Deformationen ([Ros96]), doch lässt sich dies umgehen durch den Übergang zu endlichen Koeffizienten (konsistent zur \mathbb{Z}_4 -Holonomie des Maslovbündels).

Ist k zu einer $K_{\mathbb{C}}^1$ -Klasse liftbar, eröffnet sich neben dem Zugang über die Suspension ein direkter Zugang über die Deformation des $K_{\mathbb{C}}^1$ -klassifizierenden Raumes:

$$[L, U(n)] = [L, \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{R}^{2n}}].$$

Solche Abbildungen tauchen in natürlicher Weise in der Fedosovkonstruktion auf, nämlich in Form von Schnitten von P , falls dessen Einschränkung auf L trivial ist. Man kann so direkt versuchen, punktweise Äquivalenztransformationen zwischen faserweisen, an TL und $\ker T_L\pi$ angepassten Produkten längs L zu globalisieren. Alternativ hat M. Bordemann vorgeschlagen, nach Fedosovzusammenhängen zu faserweisen Produkten $*$ zu suchen, so dass $*$ an TL und $*^{opp}$ an $\ker T_L\pi$ angepasst ist. Unter Umständen lässt sich auf einem dieser Wege Notiz 12 auf Lagrangemannigfaltigkeiten mit Kaustiken ausdehnen und die Maslovbedingung vollständig reproduzieren.

A Prinzipalbündel

A.1 Topologie von Prinzipalbündeln

Sei G eine Liegruppe, die frei von rechts auf einer Mannigfaltigkeit Q operiere. Q heißt **Prinzipalbündel** über der Basis $S := Q/G$, falls die kanonische Projektion $\pi : Q \rightarrow S$ submersiv, insbesondere also S Mannigfaltigkeit ist. Lokale Schnitte $s : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i) : \pi s = id_{U_i}$ von π definieren dann lokale Trivialisierungen

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G : h_i^{-1}(x, g) := s_i g.$$

Mithin ist das Bündel trivial (d.h. $Q \cong S \times G$) genau dann, wenn es einen globalen Schnitt zulässt.

Ein $f : Q \rightarrow Q'$ ist Morphismus in der Kategorie der Prinzipalbündel, falls es einen Gruppenhomomorphismus $h : G \rightarrow G'$ gibt, so dass $f(qg) = f(q)h(g) \forall q \in Q$. Insbesondere haben Elemente der **Eichgruppe** $\text{gauge}(Q) = \ker(\text{Aut}(Q) \rightarrow \text{Aut}(S))$ in lokalen Trivialisierungen $U_i \times G$ die Form $(x, g) \mapsto (x, \lambda_i(x)g)$, wobei $\lambda_i : U_i \rightarrow G$ **Umeichung** heißt. Sämtliche Umeichungen G_S bilden nun bezüglich der Restriktion eine **Prägarbe**, d.h. einen (kontravarianten) Funktor \mathcal{F} der Kategorie der Inklusion offener Mengen in die Gruppenhomomorphismen. Wir bezeichnen die *geordneten* $k+1$ -elementigen Indexmengen $\{\sigma^k\} \subset I$ mit nicht-verschwindendem Überlapp $\bigcap_{i \in \sigma^k} U_i \neq \emptyset$ als **k -Simplex**. Die auf der freien Gruppe über den k -Simplizes (*simpliziale k -Ketten*) $\mathbb{Z}\{\sigma^k\}$ definierte simpliziale Korandbildung

$$d : \sigma^{k-1} \rightarrow \mathbb{Z}\{\sigma^k\} : d(i_0, \dots, i_k) = \sum_{l=0}^k (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_k) \Rightarrow d^2 = 0$$

induziert einen Korand d auf den **Čech- k -Koketten** $\prod_{\sigma^k \subset I} \mathcal{F}(\bigcap_{i \in \sigma^k} U_i)$. Nach dieser Vorbereitung identifizieren wir die durch die lokalen Bündel-Trivialisierungen definierten **Verklebungsfunktionen**

$$s_i/s_j : U_i \cap U_j \rightarrow G : h_i h_j^{-1}(x, g) = (x, s_i/s_j(x)g)$$

wegen $s_i/s_j \circ s_j/s_k \circ s_k/s_j = id \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$ mit 1-Zykeln. Aus letzteren lässt sich nun das Bündel als Quotient von $\bigcup_{U \in \{U_i\}} \{U_i\} \times U \times G$ nach der Äquivalenzrelation $(U_i, x, g) \sim (U_j, x, s_j/s_i g)$ zurückgewinnen. Weiter sind die umgekehrten Verklebungsfunktionen offenbar kohomolog zu den alten, d.h. $(s_i/s_j)' = \lambda_j \cdot s_i/s_j \cdot \lambda_i^{-1}$. Durch „universelle Verfeinerung“ der Überdeckung (d.h. Bildung des direkten Limes) erhalten wir so:

Tautologisches Lemma 1 *Die Isomorphieklassen eines G -Prinzipalbündels über S sind die Čech-1-Kohomologieklassen $\check{H}^1(S, G_S)$ von S mit Koeffizienten in der (Prä)Garbe G_S der lokalen Umeichungen. Für G abelsch haben diese sogar Gruppenstruktur repräsentiert durch das Produkt der Verklebungsfunktionen, mit dem trivialen Bündel $[S \times G]$ als Einheit. \square*

A.1.1 Assoziierte Bündel und Reduktion

Operiert G von links auf einer Mannigfaltigkeit F , so erhalten wir zu einem G -Prinzipalbündel Q über S das **assoziierte F -Faserbündel** $Q \times_G F$ über S als Quotient des Produkts $Q \times F$ bezüglich der diagonalen Aktion $g \cdot (q, v) = (qg, gv)$. In der Tat liefert wegen

$$G \cdot (q, v) = G \cdot (q, w) \iff \exists g : (q, v) = g \cdot (q, w) \iff v = w \quad (90)$$

jedes $q \in Q$ einen G -Diffeomorphismus von F in die Faser $F_{\pi(q)}$ des assoziierten Bündels, notiert als „Aktion“ qv . Dieser Diffeomorphismus überführt auch lokale Schnitte von Q in lokale Trivialisierungen des assoziierten Bündels $\check{Z}^1(S, G_S) \rightarrow \check{Z}^1(S, \text{Aut}(F)_S)$, wir erhalten so eine natürliche 1:1-Korrespondenz von F -Faserbündeln und $\text{Aut}(F)$ -Prinzipalbündeln.

Tautologisches Lemma 2 *Ein G -Prinzipalbündel $Q \rightarrow S$ heißt auf eine Untergruppe G' reduzierbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen vorliegt:*

1. *Es gibt einen auf der Basis trivialen Bündelmorphismus auf ein in Q eingebettetes G' -Bündel über S .*
2. *Es gibt lokale Schnitte, so dass alle Verklebungsfunktionen ihre Werte in G' annehmen, d.h. $[Q] \in \check{H}^1(S, G'_S) \subset \check{H}^1(S, G_S)$.*
3. *Es gibt einen (globalen) Schnitt des assoziierten Bündels $Q \times_G (G/G')$.*
□

Lemma 34 *Ist G zusammenhängend, so ist jedes G -Prinzipalbündel auf die maximal kompakte G -Untergruppe reduzierbar.*

In der Tat ist jede zusammenhängende Liegruppe G auf ihre maximal kompakte Untergruppe G' zusammenziehbar (für Matrixliegruppen sieht man das anhand der Projektion $G \rightarrow G' : g \mapsto g(g^*g)^{-\frac{1}{2}}$). Also ist G/G' zusammenziehbar und damit das Lemma ein Spezialfall des folgenden Lemmas 35.
□

A.1.2 Schnitte assoziierter Bündel

Schnitte eines zum G -Prinzipalbündel Q assoziierten F -Bündels $Q \times_G F$ sind nach Konstruktion (90) „Quotienten“ äquivarianter Abbildungen $Q \rightarrow F$, insbesondere identifizieren wir so Morphismen von G -Bündeln $Q \rightarrow Q'$ mit Schnitten von $Q \times_G Q'$.

Schnitte assoziierter Bündel sind nicht mehr äquivalent zu deren Trivialität:

Lemma 35 Ist Q ein Faserbündel über S mit typischer Faser F , deren Homotopiegruppen unabhängig vom Basispunkt sind, und s ein lokaler Schnitt definiert auf einem Unterkomplex L einer Zellenzerlegung²³ von S , so lässt sich s genau dann stetig auf ganz S erweitern, falls $H^n(S, L, \pi^{n-1}(F)) = 0 \forall n \leq \dim F$.

Das folgt sofort aus der lokalen Trivialität von Q und folgender Induktion:

Das stetige Fortsetzungsproblem Ist $f : \text{dom } f \rightarrow F$ bereits stetig definiert auf dem Unterkomplex $L \cup K^n \subset K$ von K , so lässt sich f vom Rand einer $(n+1)$ -Zelle $\partial\sigma^{n+1} \subset K^n$ genau dann in deren Inneres fortsetzen, wenn das Bild des Randes $f(\partial\sigma^{n+1})$ in F zusammenziehbar ist, d.h. $[f|_{\partial\sigma^{n+1}}] \in \pi_n(F)$ verschwindet. Nun ist die relative $n+1$ -Kette

$$c^{n+1}(f) : \sigma^{n+1} \mapsto [f|_{\partial\sigma^{n+1}}]$$

ein Kozykel, der sog. **Obstruktionszykel** (Beweis: [Hu59, VI 3.1]), und somit die Fortsetzbarkeit von f auf K^{n+1} äquivalent zu $[c^{n+1}(f)] = 0$. \square

Äquivalenz zum Lifting-Problem Sei ein F -Faserbündel $Q \xrightarrow{\pi} S$ und eine stetige Abbildung $f : S' \rightarrow S$ gegeben, dann definieren wir das **zurückgezogene F -Bündel** durch $f^*Q := \{(s, q') \in S \times Q | f(s) = \pi(q')\}$. Das resultierende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*Q & \xrightarrow{\hat{f}} & Q \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

ist dann ein pullback-Diagramm, d.h. jeder Morphismus h eines Faserbündels Q' über S' nach Q faktorisiert über \hat{f} :

$$\begin{array}{ccccc} & & Q' & & \\ & & \searrow s & & \\ & & f^*Q & \xrightarrow{\hat{f}} & Q \\ & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ & & S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Wählen wir insbesondere $h = f$, also $Q' = S'$ trivial, erhalten wir eine 1:1-Korrespondenz zwischen Schnitten s des pullbacks f^*Q und Lifts $\hat{f} : S' \rightarrow Q : \pi\hat{f} = f$ von f , d.h. das Lifting- ist äquivalent zum Fortsetzungsproblem.

A.1.3 Homotopieklassifikation von Prinzipalbündeln

Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{\hat{f}} & Q \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

assoziiert zu einem Morphismus $\hat{f} : Q' \rightarrow Q$ zweier G -Prinzipalbündel ist stets ein pullback-Diagramm, d.h. Q ist isomorph zu f^*Q' .

Diese Starrheit führt auf:

²³Zerlegung von S in zu offenen Bällen $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < 1\}$ homöomorphe Teilmengen (n -Zellen), so dass deren Rand in einer endlichen Vereinigung von m -Zellen mit $m < n$ liegt.

Lemma 36 [Hus94, Th. 4,9.9] Ist Q G -Prinzipalbündel über B und $f : [0, 1] \times S \rightarrow B$ eine Homotopie, dann ist $f_0^*Q \cong f_1^*Q$.

Man kann nun zu jeder Liegruppe G bis auf Isomorphie eindeutige **universelle G -Prinzipalbündel** $EG \rightarrow BG$ konstruieren, so dass jedes andere G -Prinzipalbündel Q über S isomorph zu f^*EG ist für eine eindeutige **klassifizierende Homotopie** $[f] \in [S, BG]$ (siehe z.B. [Hus94], 4,11.1). Ein Kriterium für Universalität liefert das

Lemma 37 Ist $E \rightarrow B$ G -Prinzipalbündel mit $\pi_i(E) = 0 \forall i \leq n$, dann ist E universell für G -Prinzipalbündel über Mannigfaltigkeiten der Dimension $\leq n$.

Beweis: Ist Q G -Prinzipalbündel über S mit $\dim S < n$, dann gibt es nach Abschnitt A.1.2 einen Schnitt von $Q \times_G E$ und damit einen Bündelmorphismus $\hat{f} : Q \rightarrow E$, also $Q \cong f^*E$. Ist g eine zweite Klassifizierende $g^*E \cong f^*E$, gibt es analog einen Schnitt von $(Q \times \{0, 1\}) \times_G E$ über $S \times \{0, 1\}$, dessen Einschränkung auf $S \times \{0\}$ bzw. $S \times \{1\}$ \hat{f} bzw. \hat{g} entspricht und der sich wieder nach Lemma 35 auf $(Q \times [0, 1]) \times_G E$ fortsetzen lässt, also sind f und g homotop. \square

Insbesondere sind also G -Prinzipalbündel über zusammenziehbaren Räumen S trivial. Die Elemente der durch die klassifizierende Homotopie induzierten Kohomologie $f^*H(BG, \mathbb{R})$ heißen **charakteristische Klassen**.

Beispiel: EO und BO . Die Stieffelmannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{R}^n)$ der orthonormierten k -Beine im \mathbb{R}^n ist homogen $V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k)$ (Positionen der n -Beine modulo k -Bein-Fortsetzungen) und $O(k)$ -Prinzipalbündel

$$\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n) : (e_i) \mapsto \text{lin}\{e_i\}$$

über der Grassmannmannigfaltigkeit der k -dimensionalen \mathbb{R}^n -Unterräume $G_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(k) \times O(n-k)$. Aus der $O(n)$ -Faserung $O(n+1) \rightarrow S^n : (e_1, \dots, e_{k+1}) \mapsto e_1$ erhält man nun die lange exakte Homotopiesequenz

$$\pi_{i+1}(S^n) \rightarrow \pi_i(O(n)) \rightarrow \pi_i(O(n+1)) \rightarrow \pi_i(S^n)$$

und damit wegen $\pi_i(S^n) = 0 \forall i < n$ induktiv $\pi_i(O(n)) = \pi_i(O(n+m)) \forall i < n-1, m > 0$. Aus der langen exakten Homotopiesequenz zu π folgt weiter $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0 \forall i < n-k$, also ist $V_k \xrightarrow{\pi} G_k$ nach Lemma 37 universell für Dimensionen $< (n-k)$. Analoges erhält man für $G = U(n)$.

Der Funktor K^0 Sei S kompakt. Zu jedem G -Prinzipalbündel Q über S und jeder G -Darstellung $G \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , liefert die Bildung des assoziierten Vektorraumbündels $Q \times_G \mathbb{K}^n$ einen kanonischen

Homomorphismus von Semiringen bezüglich \oplus, \otimes auf den Isomorphieklassen. Dieser erweitert sich auf die Ringvervollständigungen (Grothendieck-Erweiterungen), bezeichnet mit R_G bzw. $K_{\mathbb{K}}^0(S)$, insbesondere ist $R_{\{1\}} = K^0(*) = \mathbb{Z}$ einfach die vervollständigte Vektorraumdimension. K^0 ist kontravarianter Funktor bezüglich pullbacks; den *reduzierten* K^0 -Ring

$$\tilde{K}_{\mathbb{K}}^0(S) := \ker(i^* : K_{\mathbb{K}}^0(S) \rightarrow K_{\mathbb{K}}^0(*) = \mathbb{Z})$$

bezüglich der Inklusion i eines Basispunktes $* \in S$ identifizieren wir mit den **stabilen Äquivalenzklassen** von Vektorraumbündeln über S , definiert durch

$$\eta \sim_s \xi \iff \eta \oplus \epsilon^n \cong \xi \oplus \epsilon^m$$

für triviale Bündel $\epsilon^n := S \times \mathbb{K}^n \sim_s 0$. In der Tat lässt sich für jedes ξ ein stabiles Inverses $\xi \oplus -\xi = \epsilon^N \sim_s 0$ konstruieren als Normalenbündel bezüglich einer Einbettung von ξ in einen \mathbb{R}^N .

Aus der Homotopieklassifikation der G -Prinzipalbündel erhalten wir nun die Isomorphie

$$\tilde{K}_{\mathbb{K}}^0(S) = [S, BGL_n(\mathbb{K})]' \quad (91)$$

in anschaulicher Weise realisiert durch eine Gaußabbildung, d.h. Einbettung von $\xi \in K_{\mathbb{K}}(S)$ in einen \mathbb{K}^n und Parallelverschiebung der Faser über $s \in S$ in den Ursprung.

A.2 Geometrie von Prinzipalbündeln

A.2.1 Äquivalente Definitionen eines Zusammenhangs

1. (*Geometrische Definition*) Ein *Zusammenhang* auf einem Faserbündel $F \xrightarrow{\pi} S$ ist eine zur fasertangentiale (**vertikalen**) Distribution $\ker T\pi$ transversale (**horizontale**) Distribution hTF ; also ein Splitting der durch $T\pi$ induzierten exakten Sequenz

$$\ker T\pi \xrightarrow{i} TF \xrightarrow{\pi} \pi^*TS \quad (92)$$

von Vektorraum-Bündeln über F . Für G -Prinzipalbündel Q fordert man zusätzlich G -Invarianz des Zusammenhangs, so dass wir eine G -invariante Zerlegung $TQ = \ker T\pi \oplus hTQ$ erhalten – Nur dann wird ja nach Konstruktion (90) ein Zusammenhang in assoziierten Faserbündeln induziert.

2. (*Algebraische Definition*) Das ist äquivalent zu einer *Zusammenhangsform*, definiert als \mathfrak{g} -wertige Ad -äquivariante 1-Form ω auf Q , die rechtsinvers zur infinitesimalen Aktion $Q : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TQ)$ ist (also auf den Fasern der Cartanform $\Theta \in \Gamma(T^*G)^G \otimes \mathfrak{g}$ entspricht); in Formeln

$$\omega \circ_Q = id_{\mathfrak{g}} \quad (93)$$

$$g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega. \quad (94)$$

In der Tat, (93) entspricht gerade der G -Invarianz und (94) der Transversalität von $hTQ := \ker \omega$; und umgekehrt determiniert die zur Zerlegung gehörigen Projektionen h, v die Zusammenhangsform durch

$$vX_q := \omega(X_q)_Q(q), \quad h := id - v. \quad (95)$$

3. (*Feldtheoretische Definition*) Dank Äquivarianz ist ω schon bestimmt durch ihre *lokalen Eichpotentiale*, definiert als Pullbacks von ω mit einem lokalen Schnitt $s : U_i \rightarrow Q$. Bezüglich Umeichungen $\lambda : U \rightarrow G$ folgern wir aus der Produktregel $T(\lambda \cdot s) = \lambda_* Ts + (\Theta \cdot \lambda)_Q \circ (\lambda \cdot s)$ das charakteristische Transformationsverhalten

$$(\lambda \cdot s)^* \omega = Ad_{\lambda^{-1}} s^* \omega + \Theta \cdot \lambda \quad (96)$$

oder bezüglich einer G -Dartellung A von $s^* \omega$:

$$A \mapsto \lambda^{-1} A \lambda + \lambda^{-1} d\lambda.$$

A.2.2 Algebraische Definition der kovarianten Ableitung

Die horizontale Projektion (95) induziert die *kovariante Ableitung* $d^\omega = h^* \circ d$ von Formen auf horizontale Formen

$$\Omega_{hor}(Q) := \{\eta \in \Omega(Q) \mid i(\xi_Q)\eta = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Insbesondere bilden die G -invarianten horizontalen Formen bezüglich d^ω einen Komplex isomorph zum de Rham-Komplex auf S

$$(\Omega_{hor}(Q))^G, d^\omega, \wedge \cong (\Omega(G/S), d, \wedge). \quad (97)$$

In der Tat ist ja $\pi^* d\eta = dh^* \pi^* \eta + dv^* \pi^* \eta = d^\omega \pi^* \eta \quad \forall \eta \in \Gamma(\wedge TS)$.

Sei allgemeiner V eine G -Darstellung, dann identifizieren wir gemäß Abschnitt A.1.1 die äquivarianten Abbildungen $\phi : Q \rightarrow V$ mit Schnitten des assoziierten Vektorraumbündels $E := Q \times_G V$. d^ω lässt sich nun auf die äquivarianten V -wertigen horizontalen Formen einschränken und induziert damit eine kovariante Ableitung ∇ auf den E -wertigen Formen auf S . Expliziter ist dank der Äquivarianz

$$d^\omega \phi = d\phi - v^* d\phi = d\phi - d\phi \cdot \omega_Q = d\phi - \omega_V \phi, \quad (98)$$

wobei wir die infinitesimale Aktion wieder durch Indizierung mit dem Raumsymbol notiert haben. Seien nun s_i lokale Q -Schnitte, welche die Zusammenhangsform ω in Q auf lokale Potentiale $s_i^* \omega$ über S zurückziehen und so Trivialisierungen $U_i \times V$ von E induzieren. In diesen Trivialisierungen ist dann in der Notation von Abschnitt A.1.1 $s_i^{-1} X = \phi \circ s_i$ und somit

$$s_i^{-1}(\nabla X) = s_i^{-1} dX - (s_i^* \omega)(s_i^{-1} X).$$

In lokalen Koordinaten von U_i und einer Basis (e_m) von V , so dass $s_i^*\omega = A_n^m e_m \otimes e^n$ und $s_i^{-1}X = X^l e_l$, erhalten wir dann

$$\nabla_{\partial_k}^{\text{koord}} X^l = \partial_k X^l - \Gamma_{kn}^l X^n$$

bezüglich der **Christoffelsymbole** $\Gamma_{kn}^l = A_n^l(\partial_k)$ des Zusammenhangs. Ist insbesondere $G = \text{Aut } V$, erhalten wir offensichtlich eine 1:1 Korrespondenz zwischen Zusammenhängen in Q und kovarianten Ableitungen in E . Eine explizite Übergangsformel $\nabla \rightarrow \omega$ findet man in [Spi75]).

A.2.3 Berechnung charakteristischer Klassen

Krümmung Die *Krümmung* $\Omega := d^\omega \omega$ eines Zusammenhangs $hTQ = \ker \omega$ misst dessen Nicht-Integrabilität: Das G -invariante horizontale Splitting von (92) induziert einen *horizontalen Lift*

$$h : \Gamma(TS) \xrightarrow{\sim} \Gamma(hTQ)^G$$

von Vektorfeldern über der Basis S auf G -invariante horizontale Vektorfelder. Dieser ist linearer, aber kein Lie-Isomorphismus, der vertikale Fehler $[X^h, Y^h] - [X, Y]^h \in \ker \pi_*$, der von ω treu à la Cartan auf \mathfrak{g} abgebildet wird, ist

$$\omega([X^h, Y^h] - [X, Y]^h) = \omega([X^h, Y^h]) = -d\omega(X^h, Y^h) = -\Omega(X, Y); \quad (99)$$

Die topologisch zentrale Eigenschaft der Krümmung ist, dass sie d^ω -geschlossen ist:

$$(d^\omega)^2 \omega = 0 \quad (100)$$

(*Bianchi-Identität*), was aus Ableitung der *Strukturgleichung*

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] \quad (101)$$

folgt, welche man ihrerseits in einer h, v -Zerlegung von X, Y nachrechnet ([KN63] 5.5).

Bott-Homomorphismus Die Menge aller Zusammenhangsformen $\{\omega\}$ auf Q bildet offenbar einen affinen Raum, den Differenzvektorraum bilden die horizontalen Ad -äquivalenten 1-Formen kanonisch isomorph zum Vektorraum der zugehörigen Krümmungen $\{\Omega\}$. Durch Komposition des Krümmungsraums mit einem Ad -invarianten k -homogenen Polynom p_k erhalten wir so nach (97) und (100) den horizontalen Lift einer einzigen charakteristischen Klasse

$$p_k(Q) := \pi_*(p_k(\{\Omega\})) \in H^{2k}(S, \mathbb{R}).$$

Der so induzierte Homomorphismus von Algebren

$$B : (\bigvee \mathfrak{g}^*)^G \rightarrow H^{ev}(S, \mathbb{R}) \quad (102)$$

heißt *Bott-Homomorphismus*, die Koeffizienten c_k von $B(\det(1-x))$ heißen **Chernklassen** und die von $B(\text{tr } e^x)$ **Cherncharaktere** ch_k . Sind ξ, η zwei assoziierte Vektorraumbündel, so sind letztere additiv $ch_k(\xi \oplus \eta) = ch_k(\xi) + ch_k(\eta)$ und folglich *stabil*, d.h. faktorisieren über \tilde{K} .

Bemerkung: Die Cherncharaktere induzieren sogar einen Ringisomorphismus

$$K^0(Q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \bigoplus_n H^{2n}(Q, \mathbb{R})$$

vgl. dazu [Hil71, 3.21].

A.2.4 Paralleltransport

Satz 18 *Jede Kurve in der Basis S eines Prinzipalbündels mit Zusammenhang (Q, ω) hat einen eindeutigen horizontalen Lift zu gegebenem Lift des Startpunkts, d.h. die **Liftabbildung***

$$\hat{\cdot} : \{c \in Q \times \Omega(S) \mid c(0) = \pi(q)\} \rightarrow \{\hat{c} \in \Omega(Q) \mid \omega(\hat{c}) = 0\}$$

ist bijektiv.

Zum Beweis konstruieren wir die Liftabbildung explizit: Wähle einen Lift $d : \pi \circ d = c$ von c und finde $g : [0, 1] \rightarrow G$, so dass $g \cdot d$ horizontal, d.h. die Geschwindigkeitskurve $\frac{d}{dt}(g \cdot d) = g_* \dot{d} + (\Theta \cdot \dot{g})_P \circ (g \cdot d)$ in hTQ liegt. Ist ω zu h gehörige Zusammenhangsform, schreibt sich dies äquivalent $0 = Ad_{g^{-1}}(\omega \cdot \dot{d}) + \Theta \cdot \dot{g}$ oder in einer G -Darstellung

$$\dot{g}g^{-1} = -\omega \cdot \dot{d}.$$

Aus der G -Invarianz des Zusammenhangs folgt sofort $g \cdot \hat{c} = \widehat{g \cdot c} \forall g \in G$. Wähle nun als Liftstartpunkt $d(0) = q \iff g(0) = 1$, dann hat diese wohl-bekannte Differentialgleichung eine eindeutige Lösung, lokal formal gegeben durch

$$g \cdot d = \widehat{d_0 c} \iff g = T \exp \left(- \int_d \omega \right), \quad (103)$$

wobei T der Pfad-Ordnungsoperator ist. \square

Die Liftabbildung liefert eine (mit der G -Aktion kommutierende) **Parallelverschiebung** von Fasern in Form des **Faserfunktors** \parallel der Aneinanderreihung \star von Wegen in die Isomorphismen von Fasern:

$$\parallel : (\Omega(S, x_0, x_1), \star) \rightarrow \text{Iso}(G_{x_0}, G_{x_1}) : \parallel c q = \widehat{c}(1)$$

Übertragung auf assoziierte Faserbündel Zusammenhang bzw. Paralleltransport in Q induzieren solche in assoziierten F -Faserbündeln: In der Notation von A.1.1 liefert ja jedes $v \in F$ eine natürliche Abbildung $Q \rightarrow Q \times_G F : q \mapsto qv$, welche die Horizontal-Vertikal-Zerlegung von TQ in eine von $T(Q \times_G F)$ überführt, die unabhängig von der Wahl von v ist. Gegeben eine Kurve $c \in \Omega(S, c_0, c_1)$ und ein v in F_{c_0} , wähle nun (wieder in der Notation von Abschnitt A.1.1) irgend einen G -Diffeomorphismus $q \in G_{c_0} : V \rightarrow V_{c_0}$ mit zugehörigem c -Lift $\hat{c} = \hat{q}c$ und setze

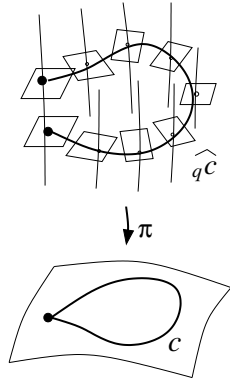
$$\|_c v := \hat{c}_1 \hat{c}_0^{-1} v. \quad (104)$$

Ist insbesondere F Vektorraum und $X \in \Gamma(c^*E)$ Vektorfeld längs c , so lässt sich die kovariante Ableitung in Richtung der Tangente $\dot{c}(0)$ als infinitesimaler Paralleltransport interpretieren:

$$\nabla_{\dot{c}(0)} X := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{c}_0 \hat{c}_t^{-1} X(c_t) - X(c_0)}{t} = \hat{c}_0 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{c}_t^{-1} X(c_t) - \hat{c}_0^{-1} X(c_0)}{t} = L_{\hat{c}_0} (\hat{c}^{-1} X(c)).$$

Die Äquivalenz dieser geometrischen Definition mit der algebraischen wird etwa in [Spi75] bewiesen.

A.2.5 Krümmung als infinitesimale Holonomie



Horizontaler Lift einer Schleife: Ein triviales Bündel kann einen nicht-trivialen Zusammenhang und damit nicht-triviale Holonomie besitzen.

Insbesondere liefert der Paralleltransport eine mit G kommutierende Aktion der Schleifengruppe $\Omega(S, x)$ zu Basispunkt x auf der Faser G_x über x . Offenbar haben wir einen Gruppenhomomorphismus von $\Omega(S, x)$ in die **Holonomiegruppen** Hol_q der „Differenzen“ $g_c : \|_c q = g_c q$ zwischen Start und Endpunkt des c -Lifts $\hat{q}c$, d.h. $g_{c_1 \star c_2} = g_{c_1} g_{c_2}$. (103) liefert nun für abelsche G eine explizite **lokale Holonomieformel** als Analogon des *lokalen Gauß-Bonnet-Theorems*: Ist c der Rand einer orientierten kontrahierbaren Fläche $A \subset S$ und s lokaler Schnitt über A , so hat c nach Stokes die Holonomie

$$g_c = \exp \int_A s^* \Omega. \quad (105)$$

Ist nun $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ eine Einbettung, so ist die Krümmung eingeschränkt auf (im T_0f) die infinitesimale Holonomie längs des Randes der eingebetteten Quadrate $f([0, \epsilon]^2)$:

$$s^*\Omega(\partial_i f|_0, \partial_j f|_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g\partial f([0, \epsilon]^2)}{\epsilon^2}. \quad (106)$$

Aus unserer Definition der Krümmung folgt sofort, dass die Liealgebra \mathfrak{hol}_q das Bild der Krümmungsform eingeschränkt auf $[q]$ ist (Theorem von Ambrose und Singer).

Darstellung der Krümmung über ∇ Sei V eine G -Darstellung und $E = Q \times_G V$ das assoziierte Vektorraumbündel. Als horizontale Ad-equivariante Form projiziert sich die Krümmungsform auf eine $\text{End}(V)$ -Bündel-Schnittwertige 2-Form R . Deren Interpretation als Darstellung infinitesimaler Holonomie können wir nun sogar explizit hinschreiben: Sei wieder $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ eine Einbettung und $\nabla_i := \nabla_{\partial_i f}$ die kovariante Ableitung längs der i -ten Koordinatenachse, so erhalten wir aus (106):

$$R(\partial_i f|_0, \partial_j f|_0)v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\partial f([0, \epsilon]^2)v = [\nabla_i, \nabla_j]v|_{f(0)}. \quad (107)$$

Für nicht-kommutierende Vektorfelder ist noch der Beitrag der Fluss-Discrepanz abzuziehen, d.h.

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}.$$

Eine formale Ableitung dieser Formel ist in [KN63] zu finden.

A.2.6 Flache Bündel und Reduktion

Reduktion Ist $f : Q' \rightarrow Q$ ein Morphismus von Prinzipalbündeln über S mit Strukturgruppe G' bzw. G , so induziert ein Zusammenhang hTQ' auf Q' den Zusammenhang $Tf(hTQ)$ auf Q . Ist weiter F der von f induzierte Homomorphismus $\mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$, gilt für die zugehörigen Zusammenhangsformen $F\omega' = f^*\omega$, denn $Tf \ker \omega' = \ker \omega$ und nach (94) $\omega(Tf.\xi'_Q) = \omega((F\xi_{Q'}) = F\xi = F\omega'(\xi_{Q'})$; analog erhält man aus der Strukturgleichung $F\Omega' = f^*\Omega$.

Ist insbesondere f Einbettung eines reduzierten Bündels, so heißen die auf Q induzierten Zusammenhänge **reduzierbar**; ihre Holonomiegruppen liegen damit in der Untergruppe $G' \subset G$. Ist umgekehrt ein Zusammenhang auf einem (reduzierbaren) Prinzipalbündel gegeben, so gilt:

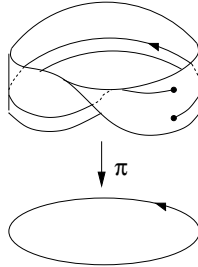
Satz und Definition 1 [KN63, Th. 7.1]. *Die Fasern $[q]$ der Äquivalenzrelation*

$$q \sim p \Leftrightarrow \exists \text{ Horizontale Kurve, die } q \text{ mit } p \text{ verbindet.}$$

*sind reduzierte hol_q -Bündel über S , genannt **Holonomiebündel**.*

Wegen der Kommutativität der G und $\Omega(S)$ -Aktion sind dabei die verschiedenen Holonomiebündel isomorph zu konjugierten Holonomiegruppen.

Flache Bündel Krümmungsfreie und damit integrable Zusammenhänge heißen auch **flach**, ihre Holonomiealgebra ist damit nach (105) trivial $\mathfrak{hol}_q = 0 \forall q \in Q$ (d.h. die horizontalen Lifts geschlossener *zusammenziehbarer* Kurven bleiben geschlossen). Die Holonomiegruppen sind damit *diskrete* zueinander konjugierte G -Untergruppen, und Bündel samt Zusammenhang reduzierbar auf ein diskretes Hol_q -Bündel.



Flache Bündel besitzen nur dann nicht-triviale Holonomie, wenn sie nicht-trivial sind wie hier das Möbiusband, wo $hol \cong \mathbb{Z}_2$.

Lemma 38 Die Isomorphieklassen flacher G -Bündel über S sind die Čech-Kohomologieklassen $\check{H}^1(S, G)$.

In der Tat, die Schnitte und damit Verklebungsfunktionen ihrer Holonomiebündel lassen sich lokal *konstant* wählen, und so folgt das Lemma aus dem tautologischen Lemma 1. \square

Der Faserfunktork flacher Bündel ist *Homotopie-invariant*, Sprünge in der Holonomie können ja nur an den Verklebungsstellen auftreten. Wir können so die Isomorphieklasse $\in H^1(S, G)$ als **Holonomieklass**e interpretieren, deren Antwort auf Schleifen in S ihre Holonomie ist (und deren de Rham-Form durch die Zusammenhangsform des reduzierten Bündels gegeben ist). Aus der 1:1-Korrespondenz des reduzierten $\text{Perm}(\mathbb{Z}_n)$ -Bündels mit dem assoziierten \mathbb{Z}_n -Bündel (*Überlagerungen*) und obiger Klassifikation erhalten wir schließlich folgende Klassifikation:

Lemma 39 Der (assozierte) Faserfunktork liefert eine Äquivalenz von Kategorien: $\{\text{Überlagerungen über } S\} \sim \{\pi_1(S)\text{-Mengen}\}$.

B C^* -Algebren und Spektralkalkül

Eine *Banachalgebra* \mathcal{A} ist ein Banachraum (normierter, vollständiger Vektorraum) mit einer stetigen Multiplikation (assoziative, distributive bilineare Abbildung $\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$), die der „Dreiecksungleichung“ $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ genügt. Eine C^* -Algebra ist eine Banachalgebra mit einer Involution $*$ (antilineare Abbildung $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $* \circ * = id$), welche die C^* -Bedingung $\|a^* a\| = \|a\|^2$ erfüllt.

Wir betrachten im Folgenden nur C^* -Algebren über \mathbb{C} , so dass für alle $a \in \mathcal{A}$ das Spektrum

$$\text{spec } a := \{z \in \mathbb{C} \mid (z - a) \text{ nicht invertierbar}\} \quad (108)$$

nicht leer ist (andernfalls wäre die Resolvente $z \mapsto (z - a)^{-1}$ beschränkt holomorph auf \mathbb{C} , also nach Liouville konstant), außerdem setzen wir die Existenz einer Eins ($a1 = 1a = a \forall a \in \mathcal{A}$) voraus.

Beispiele solcher C^* -Algebren sind die komplexwertigen stetigen Funktionen auf einem Kompaktum K versehen mit der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$, sowie die beschränkten²⁴ Operatoren $B(H)$ auf einem Hilbertraum H versehen mit der Operatornorm $\|a\| := \sup\{\|a\phi\| \mid \phi \in H, \|\phi\| = 1\}$. Wir werden sehen, dass alle kommutativen C^* -Algebren von erster Form und alle nicht-kommutativen abgeschlossene $B(H)$ -Unteralgebren sind; und folgen dabei [Wer95].

B.1 Darstellung kommutativer C^* -Algebren

Die Klassifikation kommutativer C^* -Algebren \mathcal{A} mit Eins beruht auf ihren nicht-trivialen Charakteren $\Gamma(\mathcal{A})$ (Algebrenhomomorphismen $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi \neq 0$), dem sogenannten **Gelfandraum**:

Topologie von $\Gamma(\mathcal{A})$. Die $\phi \in \Gamma(\mathcal{A})$ sind automatisch beschränkt, sogar normiert $\|\phi\| = 1$, denn $\|\phi\| \geq 1$ wegen $\phi(1) = 1$ und wäre nun $\|\phi\| > 1$, dann gäbe es $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$, $\phi(a) = 1$ im Widerspruch zu $\phi(b) = 1 + \phi(b)$ für $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = ab + a$.

Wir versehen deshalb $\Gamma(\mathcal{A})$ nicht mit der Norm-, sondern der schwach*-Topologie, die sich dadurch charakterisieren lässt, dass genau die *Auswertungsfunktionale* (*Gelfandtransformierten*) $\hat{a} \in C(\Gamma(\mathcal{A})) : \phi \mapsto \phi(a)$ stetig sind. $\Gamma(\mathcal{A})$ ist dann schwach*-abgeschlossene Teilmenge der Einheitsphäre, welche nach dem Satz von Alaoglu [Wer95, VIII 3.11] schwach*-kompakt ist, also ist $\Gamma(\mathcal{A})$ selbst schwach*-kompakt.

²⁴Eine lineare Abbildung $a : H \rightarrow H'$ von Banachräumen heißt *beschränkt*, wenn ihre Operatornorm beschränkt ist, genau dann ist dank Linearität a stetig.

Interpretation von $\Gamma(\mathcal{A})$ Ist J ein abgeschlossenes Ideal²⁵ von \mathcal{A} , so ist \mathcal{A}/J auf kanonische Weise eine Banachalgebra bezüglich der Quotientennorm

$$\|[a]\| := \inf_{u \in J} \|x + u\| \quad (109)$$

(die Stetigkeit der Multiplikation folgt dabei aus $\|[a, b]\| \leq \|(a+u)(b+v)\| \leq \|a+u\| \|b+v\|$, für alle $u, v \in J$).

Lemma 40 $J \subset \mathcal{A}$ ist genau dann maximales Ideal, wenn $J = \ker \phi$, $\phi \in \Gamma(\mathcal{A})$.

Sei J maximal. J ist abgeschlossen wegen der Stetigkeit der Multiplikation, damit ist \mathcal{A}/J eine Banachalgebra und es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}$ ist, so dass J Kern der kanonischen Projektion $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$ ist. Jedes $u \in \mathcal{A}/J - 0$ ist invertierbar, denn $u\mathcal{A} + J$ ist ein J enthaltendes Ideal, also gleich J . Folglich ist $z - u = 0$ für $z \in \text{spec}(u)$, also in der Tat $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}$. Die Umkehrung ist klar. \square

Lemma 41 $\text{spec } a = \{\phi(a), \phi \in \Gamma(\mathcal{A})\} = \text{im } \hat{a} = \text{spec } \hat{a}$.

Ist $z \notin \text{spec } a$, also $z - a$ invertierbar, so auch die Bilder $\phi(z - a) = z - \phi(a)$ für alle $\phi \in \Gamma(\mathcal{A})$, also $z \notin \text{im}(\hat{a})$. Ist andererseits $z \in \text{spec } a$, dann ist $J := (z - a)\mathcal{A}$ Ideal, also $J \subset \ker \phi$ nach Lemma 40, folglich $\phi(a) = z$. \square

Der Gelfandisomorphismus Bis jetzt haben wir nur die Banachalgebra-Struktur genutzt, die C^* -Zusatzstrukturen ermöglichen folgenden

Satz 19 (Gelfand) Die Gelfandtransformation

$$\hat{\cdot} : \mathcal{A} \rightarrow C(\Gamma(\mathcal{A})) : \hat{a}(\phi) := \phi(a)$$

ist ein Isomorphismus von C^* -Algebren.

Nach Lemma 41 ist die Gelfandtransformation isometrisch, also ihr Bild im $\hat{\mathcal{A}}$ abgeschlossene Unter algebra in $C(\Gamma(\mathcal{A}))$, die zudem die Punkte trennt (d.h. es existiert für alle $\phi_1 \neq \phi_2 \in \Gamma(\mathcal{A})$ ein $f \in \hat{\mathcal{A}}$ mit $f(\phi_1) \neq f(\phi_2)$) und 1 enthält. Aus dem Satz von Stone-Weierstraß (s. z.B. [Wer95, VIII 4.7]) folgt daraus $\hat{\mathcal{A}} = C(\Gamma(\mathcal{A}))$.

Es bleibt $\hat{a}^* = \overline{\hat{a}}$ zu zeigen, wegen $a = \frac{1}{2}a + a^* + i\frac{1}{2i}(a - a^*)$ ist das äquivalent zu $\text{im } \hat{a} = \text{spec } a \subset \mathbb{R}$ für selbstadjungierte $a^* = a$, und dazu ist die C^* -Bedingung nötig: Aus $\alpha + i\beta \in \text{spec } a$ folgt $\alpha + i(\beta + \delta) \in \text{spec}(a + i\delta)$, also $|\alpha + i(\beta + \delta)|^2 \leq \|a + i\delta\|^2 = \|(a + i\delta)^*(a + i\delta)\| = \|a^2 + \delta^2\| \leq \|a^2\| + \delta^2$, also $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\delta \leq \|a^2\|$ für alle $\delta \in \mathbb{R}$, somit in der Tat $\beta = 0$. \square

²⁵d.h. J ist invariant unter der Operation von \mathcal{A} : $\mathcal{A}J = J\mathcal{A} = J$

B.2 Spektralkalkül

Satz 20 *Sei a normales Element einer nicht-kommutativen C^* -Algebra \mathcal{A} , d.h. die von $a, a^*, 1$ erzeugte Algebra A kommutativ. Dann ist die Gelfand-Transformierte \widehat{a} ein Homöomorphismus*

$$\widehat{a} : \Gamma(A) \xrightarrow{\sim} \text{spec}(a)$$

Nach Satz 19 ist \widehat{a} stetige Surjektion des Gelfand-Spektrums Γ_A auf das a -Spektrum bezüglich A . \widehat{a} ist injektiv, denn die Charaktere $\phi \in \Gamma_A$ sind involutiv $\phi(a^*) = \widehat{a^*}(\phi) = \overline{\widehat{a}(\phi)} = \overline{\phi(a)}$, aus $\phi(a) = \psi(a)$ folgt damit $\phi(\sum c_{nm} a^m (a^*)^n) = \psi(\sum c_{nm} a^m (a^*)^n)$, also $\phi = \psi$ dank Stetigkeit. Weil $\Gamma(A)$ selbst kompakt und Hausdorffsch ist, folgt, dass auch \widehat{a}^{-1} stetig ist.

Nun ist das Spektrum von a in $B(H)$ identisch mit dem bezüglich A : Gäbe es nämlich $\lambda \in \text{spec}_A(a) - \text{spec}(a)$, mithin $\rho := (\lambda - a)^{-1}$ und $f \in C(\text{spec}_A)$ mit $f(\lambda) > \|\rho\|$ und $|g| \leq 1$, $g(t) := f(t)(\lambda - t)$, erhielten wir den Widerspruch

$$\|\rho\| < f(\lambda) \leq \|f\|_\infty = \|f(a)\| \leq \|g(a)\| \|\rho\| = \|g\|_\infty \|\rho\| \leq \|\rho\|.$$

□

Sei nun $B(H)$ die C^* -Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H . Aus Satz 20 und 19 folgt nun sofort:

Korollar 2 (Stetiger Funktionalkalkül) *Sei $a \in B(H)$, d.h. die von a, a^* und id_H erzeugte Algebra $A \subset B(H)$ kommutativ. Dann gibt es einen Isomorphismus von C^* -Algebren*

$$C(\text{spec}(a)) \xrightarrow{\sim} A \subset B(H) : f \mapsto f(a)$$

mit $f(\text{id}) = a$.

□

Nach dem Satz von Riesz (s. [Wer95, II 2.5]) liefert die Integration einen Isomorphismus des Raumes der (Borel)-Maße über einem Kompaktum K mit dem Dualraum stetiger Funktionen auf K , also

$$\langle f(a)\phi, \psi \rangle = \int_{\text{spec } a} f d\mu_{\phi, \psi} \quad (110)$$

bezüglich komplexer Maße $\mu_{\phi, \psi}$ auf $\text{spec } a$. Dann ist $(\phi, \psi) \mapsto \int_{\text{spec } a} f d\mu_{\phi, \psi}$ auch für messbare beschränkte Funktionen $f \in M(\text{spec}(a))$ eine stetige Sesquilinearform, und so definiert Gleichung (110) einen Operator $f(a) \in B(H)$ für messbare f .

Satz 21 (Messbarer Funktionalkalkül) [Wer95, Satz VII 1.6] *Gleichung (110) erweitert den stetigen Funktionalkalkül zu normalen Operatoren $a \in B(H)$ auf einen stetigen $*$ -Algebrenhomomorphismus*

$$M(\text{spec}(a)) \rightarrow B(H) : f \mapsto f(a)$$

der messbaren beschränkten Funktionen $M(\text{spec } a)$.

Beweis: Für K kompakt ist $M(K)$ gerade die kleinste $C(K)$ enthaltende Funktionenalgebra, die abgeschlossen ist unter der Bildung punktweiser Limiten gleichmäßig beschränkter Folgen ([Wer95, VII 1.5]); und so folgt der messbare $*$ -Algebrenhomomorphismus aus dem stetigen via des Lebesgueschen Konvergenzsatz $\lim \langle f_n(a)\phi, \psi \rangle = \langle (\lim f_n)(a)\phi, \psi \rangle$. \square

Den charakteristischen Funktionen $\chi_A : \text{spec}(a) \rightarrow \{0, 1\}$ zu Borelmengen $A \subset \text{spec}(a)$ entsprechen dann wegen $\chi^2 = \chi = \chi^*$ *Orthogonalprojektoren* $\chi_A(a)^2 = \chi_A(a) = \chi_A^*(a) \in B(H)$, wobei die $\chi_{\{z_0\}}(a)$ zu isolierten $z_0 \in \text{spec}(a)$ auf den Eigenraum $\ker(z - a)$ projizieren. Die Abbildung P von Borelmengen A in $\text{spec } a$ auf $\chi_A(a)$ heißt dann wegen $P\bigcup_i A_i = \sum_i P(A_i)$ für paarweise disjunkte A_i , $P(\text{spec } a) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$ *Spektralmaß* zu a , und wir haben $\mu_{\phi, \psi} = \langle \phi | P | \psi \rangle$ bzw.

$$f(a) = \int_{\text{spec } a} f(z) dP(z). \quad (111)$$

Wir können nun die *Spektralzerlegung* $a = \int_{\text{spec } a} z dP(z)$ von a wie folgt umformulieren:

Satz 22 [Wer95, VII Satz 1.21] *Jeder normale Operator $a = a^* \in B(H)$ ist unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator in einem L^2 -Raum.*

Beweisskizze: Es reicht, das für invariante zyklische Unterräume $V = \overline{\text{lin}\{a^n | \phi\}, n \in \mathbb{N}_0\}$ zu prüfen. Dann ist $U : f \mapsto f(a) | \phi \rangle$ Isometrie $C(\text{spec}(a)) \rightarrow V$ bezüglich des L^2 -Maßes $\mu_\phi := \langle \phi | P | \phi \rangle$, also $a(U(f)) = af(a) | \phi \rangle = U(\text{id} \cdot f)$ für alle f .

Unbeschränkte Operatoren Im Allgemeinen sind die ΨDO $a := \text{Op}_\tau(f)$ (49) unbeschränkte lineare Abbildungen $H \supset \text{dom}(a) \rightarrow H$ mit in $H := L^2(Q)$ dichtem Unterraum $\text{dom}(a)$. Das Adjungierte a^* eines solchen Operators ist definiert durch $\langle \phi | a\psi \rangle = \langle a^*\phi | \psi \rangle$ für alle $\phi \in \text{dom}(a)$, $\psi \in \text{dom}(a^*)$, wobei $\text{dom}(a^*)$ kanonisch definiert ist als Raum der $\psi \in H$, so dass $\langle \psi | a$ beschränktes Funktional auf $\text{dom}(a)$ ist.

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren Das Spektrum eines dicht definierten selbstadjungierten Operators $a^* = a$ ist definiert als Komplement der *Resolventenmenge*

$$\rho(a) := \{z \in \mathbb{R} | (z - a) : \text{dom}(a) \rightarrow H \text{ bijektiv mit } (z - a)^{-1} \in B(H)\} \quad (112)$$

in \mathbb{R} . Der Spektralsatz 22 gilt dann auch für solche a :

In der Tat, der Bijektion von Spektren

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 - 1 \subset \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z + i}{z - i}$$

entspricht die *Cayley-Transformierte* $C(a) = (a + i)(a - i)^{-1}$ von a , die unitär ist. Folglich ist $U := C(a)$ ein Multiplikationsoperator $(U\phi)(\alpha) = e^{i\alpha}\phi(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, folglich auch das Inverse $(a\phi)(\alpha) = (C^{-1}(a)(U))(\alpha) = i\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\phi(\alpha)$. \square

Man erhält auf diese Weise selbstadjungierte Erweiterungen von symmetrischer Operatoren a , deren Defektindizes $\dim \ker(a^* \pm i)$ (welche die Abweichung vom reellen Spektrum messen) übereinstimmen: Dann ist die Cayley-Transformierte $U := U(a)$ unitäre Fortsetzung einer Isometrie $\text{im}(a-i) \rightarrow \text{im}(a+i)$ und $C(a)^{-1}(U)$ ist eine selbstadjungierte Erweiterung (siehe [Wer95, VII 2.10]). Im Fall *wesentlicher Selbstadjungiertheit*, d.h. wenn $a^* = a^{**}$ selbstadjungiert ist und damit die Defektindizes verschwinden, ist offenbar a^* die eindeutige Erweiterung.

B.3 Darstellung nicht-kommutativer C^* -Algebren

Positivität Sei \mathcal{A} eine nicht-kommutative C^* -Algebra. Ein Funktional $\langle \cdot \rangle \in \mathcal{A}'$ heißt *Zustand*, falls $\langle 1 \rangle = \|\langle \cdot \rangle\| = 1$. Die Integration liefert nach dem Satz von Riesz einen Isomorphismus zwischen Maßen auf Kompakta K und dem Dualraum stetiger Funktionen auf K , also gibt es zu selbstadjungierten $a = a^* \in \mathcal{A}$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P , so dass gilt:

$$\langle a \rangle = \int_{\Gamma(\mathcal{A})} \widehat{ad}P, \quad (113)$$

bezüglich der von $a, a^*, 1$ erzeugten kommutativen C^* -Algebra A .

Lemma 42 Sei $a = a^* \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Es sind äquivalent:

1. a ist positiv, d.h. $\langle a \rangle \geq 0$ für alle Zustände $\langle \cdot \rangle \in \mathcal{A}'$
2. $\text{spec } a \subset \mathbb{R}^+$
3. $a = b^*b$ für ein $b \in \mathcal{A}$

1 \iff 2 folgt sofort aus (113), ebenso 2 \implies 3 aus (111) für $f = \sqrt{\cdot}$. Für die Umkehrung s. [Wer95, IX 1.3]. \square

GNS-Darstellung. Algebren stellen sich dank ihrer Vektorraumstruktur selbst dar, die Zustände liefern nun das fehlende Skalarprodukt: $\langle a|b \rangle := \langle b^*a \rangle$ besitzt nämlich folgende Eigenschaften:

1. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist hermitesche Sesquilinearform, wobei $\overline{\langle a|b \rangle} = \langle b|a \rangle$, durch die Zerlegung $a^*b = x + iy$ in selbstadjungierte x, y folgt.
2. Aus $\langle a|a \rangle \geq 0$ folgt wie üblich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle \quad (114)$$

3. Es gilt

$$\langle ab|ab \rangle \leq \|a\|^2 \langle b|b \rangle \quad (115)$$

In der Tat, aus der C^* -Bedingung folgt $\text{spec}(a^*a) \subset [-\|a\|^2, \|a\|^2]$, also ist nach Lemma 42 $a^*a - \|a\|^2 = u^*u$ und damit $\|a\|^2 \langle b|b \rangle - \langle ab|ab \rangle = \langle (ub)^*ub \rangle \geq 0$.

Allerdings ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ im Allgemeinen nur semidefinit, wir betrachten also

$$J := \{b \in \mathcal{A}, \langle b | b \rangle = 0\}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (114) folgt rein algebraisch, dass J ein Linksideal ist: $\langle (b + b')^*(b + b') \rangle = \langle b^*b' \rangle + \langle b'^*b \rangle = 0$ und $|\langle (ab)^*(ab) \rangle|^2 \leq \langle c^*c \rangle \langle b^*b \rangle = 0$ für $c^* := b^*a^*a$ für alle $b, b' \in J, a \in \mathcal{A}$. (die \mathcal{A} -Invarianz folgt alternativ sofort aus (115)). Mithin ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ Skalarprodukt auf \mathcal{A}/J , dessen Repräsentanten wir mit $|\phi\rangle := \phi + J$ notieren. Dann ist $\pi^{(\cdot)}(a) |\phi\rangle := |a\phi\rangle$ eine $*$ -Darstellung von \mathcal{A} mit

$$\langle a | a \rangle \leq \|\pi^{(\cdot)}(a)\|^2 \leq \|a\|^2, \quad (116)$$

wobei die erste Ungleichung aus $\| |1\rangle \| \leq 1$ und die zweite aus (115) folgt.

Die $\pi^{(\cdot)}(a)$ lassen sich deshalb zu Operatoren auf der Vervollständigung von \mathcal{A}/J zum Hilbertraum fortsetzen, also:

Lemma 43 *Ein Zustand $\langle \cdot | \cdot \rangle \in \mathcal{A}'$ induziert eine $*$ -Darstellung $\pi^{(\cdot)}$ von \mathcal{A} durch beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum, deren Norm (116) genügt. \square*

Nun existiert zu jedem $a \in \mathcal{A}$ ein Zustand, in dem (116) Gleichungen werden, nämlich die Hahn-Banach-Fortsetzung²⁶ von $b \mapsto \widehat{b}(\|b\|)$, definiert auf der von $b = a^*a$ aufgespannten kommutativen Algebra. Indem wir nun die direkte Summe $\pi := \bigoplus_{\langle \cdot | \cdot \rangle} \pi^{(\cdot)}$ der Darstellungen über alle Zustände bilden, erhalten wir eine $*$ -Darstellung mit $\|\pi(A)\| = \|a\|$, also:

Satz 23 (Gelfand) *Jede komplexe C^* -Algebra mit Eins ist eine abgeschlossene Unteralgebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum. \square*

²⁶Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass jede stetige Linearform auf einem Unterraum eines Banachraums B normgleich auf ganz B fortgesetzt werden kann, s. etwa [Wer95, III 1.5]

Literatur

- [AGZV85] Arnold, Gusein-Zade, and Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps*, volume I of *Monographs in Math.* Birkhäuser, 1985.
- [AM85] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2 edition, 1985.
- [AN90] Arnold and Novikov. *Dynamical systems*, volume IV of *Encyclopaedia of math. sciences*. Springer, 1990.
- [Arn89] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2 edition, 1989.
- [AS85] C. Abraham and Shaw. *Dynamics: The Geometry of Behaviour*, volume 3 of *Visual Math. Lib.* Aerial Press Inc., 1985.
- [BFF⁺77] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 1:521–530, 1977.
- [BHW00] M. Bordemann, H.-C. Herbig, and S. Waldmann. Brst cohomology and phase space reduction in deformation quantization. *Commun. Math. Phys.*, 210:107–144, 2000.
- [BJ90] Bröcker and Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, 1990.
- [BNPW03] M. Bordemann, N. Neumaier, M. J. Pflaum, and S. Waldmann. On representations of star product algebras over cotangent spaces on hermitian line bundles. *J. Funct. Anal.*, 199:1–47, 2003.
- [Bor] M. Bordemann. (Bi)modules, morphismes et réduction des star-produits: le cas symplectique, feuilletages et obstructions. Preprint math.QA/0403334.
- [Bot59] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math.*, 70:313–337, 1959.
- [BW] H. Bursztyn and A. Weinstein. Picard groups in poisson geometry. Preprint math.SG/0304048.
- [BW95] S. Bates and A. Weinstein. Lectures on the geometry of quantization. Berkeley Mathematics Lecture Notes 8, Berkeley, 1995.

- [BW02] H. Bursztyn and S. Waldmann. The characteristic classes of Morita equivalent star products on symplectic manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 228:103–121, 2002.
- [CdSW99] A. Cannas da Silva and A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. Berkeley Mathematics Lecture Notes. AMS, 1999.
- [CdV] Y. Colin de Verdière. Géométrie symplectique et théorie semi-classique. Buchmanuskript Institut Fourier.
- [CF] M. Crainic and R. Fernandes. Integrability of poisson brackets. Preprint math.DG/0210152.
- [CGD80] M. Cahen, S. Gutt, and M. DeWilde. Local cohomology of the algebra of c^∞ functions on a connected manifold. *Lett. Math. Phys.*, 4:157–167, 1980.
- [DG75] J. Duistermaat and V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. *Inventiones Math.*, 29:39–79, 1975.
- [DK00] Duistermaat and Kolk. *Lie Groups*. Springer, 2000.
- [DS02] G. Dito and D. Sternheimer. Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses. In G. Halbout, editor, *Deformation quantization*, volume 1 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, pages 9–54. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- [Dui76] J. Duistermaat. *Fourier integral operators*. Birkhäuser, 1976.
- [EW96] C. Emmrich and A. Weinstein. Geometry of the transport equation in multicomponent wkb approximations. *Comm. Math. Phys.*, 176:701–711, 1996.
- [Fed96] B. V. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [GBVF01] Gracia-Bondia, Varilly, and Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser, 2001.
- [Glö98] P. Glöbner. *Phasenraumreduktion von Sternprodukten für superauflösbare Constraintalgebren*. PhD thesis, Universität Freiburg, 1998.
- [GPP] Giambo, Piccione, and Portaluri. On the maslov index of symplectic paths that are not transversal to the maslov cycle. Preprint math.DG/0306187.

- [GR] Gutt and Rawnsley. Natural star products on symplectic manifolds and quantum moment maps. Preprint math.SG/0304498 v2.
- [GS84] Guillemin and Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge Univ. Press, 1984.
- [Hil71] P. Hilton. *General Cohomology and K-Theory*. Cambridge Univ. Press, 1971.
- [Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Partial Differential Operators*, volume III of *Grundlehren*. Springer, 1983.
- [Hu59] S. Hu. *Homotopy Theory*. Pure and Appl. Math. Academic Press, 1959.
- [Hus94] Dale Husemøller. *Fibre bundles*. Graduate Texts in Math. Springer-Verlag, 1994.
- [Jos98] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Universitext. Springer, 1998.
- [Kar78] M. Karoubi. *K-Theory: An Introduction*. Grad. Texts in Math. Springer, 1978.
- [KN63] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I*. Number 15 in Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1963.
- [Lee79] A. Lees. Defining lagrangian immersions by phase functions. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 250, 1979.
- [LNT] Leichtnam, Nest, and Tsygan. Local formula for the index of a fourier integral operator. Preprint math.DG/0004022.
- [MBN04] M. F. Müller-Bahns and N. Neumaier. Some remarks on \mathfrak{g} -invariant fedosov star products and quantum momentum mappings. *J. Geom. Phys.*, 50:257–272, 2004.
- [Mei90] E. Meinrenken. Differentialgeometrische Methoden der Kurzwellenasymptotik. Master's thesis, Universität Freiburg, 1990.
- [Mei92] E. Meinrenken. Maslov indices for periodic orbits. *Conference Proceedings Salamanca 1992, Vol.II*, pages 414–417, 1992.
- [Mil69] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton Uni. Press, 1969.
- [Mrc] J. Mrcun. On isomorphisms of algebras of smooth functions. Preprint math.DG/0309179.

- [MS95] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Clarendon Press, 1995.
- [Neu98] N. Neumaier. Sternprodukte auf Kotangentenbündeln und Ordnungs-Vorschriften. Master's thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1998.
- [Neu01] N. Neumaier. *Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung*. PhD thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2001.
- [NT95] R. Nest and B. Tsygan. Algebraic index theorem for families. *Adv. Math.*, 113:151–205, 1995.
- [OR] J. Ortega and T. Ratiu. The optimal momentum map. Preprint math.SG/0203040.
- [Pfl98] M. J. Pflaum. A deformation-theoretical approach to weyl quantization on riemannian manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 45:277–294, 1998.
- [Röm94] H. Römer. *Theoretische Optik*. Wiley-VCH, 1994.
- [Ros94] J. Rosenberg. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
- [Ros96] Rosenberg. Rigidity of k-theory under deformation quantization. Preprint q-alg/9607021, 1996.
- [Saf97] Y. Safarov. Pseudodifferential operators and linear connections. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2(74):379–416, 1997.
- [Spi75] M. Spivak. *Differential Geometry*, volume II. Publish or Perish, 1975.
- [tD00] T. tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter, 2000.
- [The00] Y.-K. The. Zum Spektrum und Sternexponential in der Deformationsquantisierung. Master's thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, November 2000.
- [Thi88] W. Thirring. *Klassische Dynamische Systeme*, volume 1 of *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Wien, New York, 2 edition, 1988.
- [Vai87] I. Vaisman. *Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1987.
- [Vor] A. Voronov. Homotopy Gerstenhaber Algebras. Preprint math.QA/9908040.

- [VuN] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. Preprint Institut Fourier 433, math.AP/981013.
- [Wal99] S. Waldmann. *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen*. PhD thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1999. German, 190 pages. Available at <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
- [Wei74] A. Weinstein. Fourier integral operators, quantization, and the spectra of riemannian manifolds. *Geom. sympl. Phys. math. Colloq. int. Aix-en-Provence*, 1:289–298, 1974.
- [Wer95] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 1995.
- [Whi78] G. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*. Grad. Texts in Math. Springer, 1978.
- [Wid80] H. Widom. Families of pseudodifferential operators. *Bull. Sci. Math.*, 2(102):19–63, 1980.
- [Wig03] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [WX98] A. Weinstein and P. Xu. Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products. In A. Khovanskij, A. Varchenko, and V. Vassiliev, editors, *Geometry of differential equations. Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 60th birthday*, pages 177–194. American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [Xu98] P. Xu. Fedosov $*$ -products and quantum momentum maps. *Commun. Math. Phys.*, 197:167–197, 1998.

Danksagung

Mein Dank gilt allen Mitarbeitern des achten Stocks, insbesondere Stefan Waldmann für die vielseitige, aber Freiraum lassende Betreuung; Carsten Eilks, Stefan Jansen und Frank Keller für Kritik und Korrekturlesen; sowie Martin Bordemann für anregende Diskussionen.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Freiburg, im Mai 2004

Michael Carl