Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Algebra und Zahlentheorie
VL Modulformen WS 2019/20

Übungsaufgaben

Besprechung am 20.2.: A38, A39, A40

Aufgabe 40:
Sei $k \geq 4$ gerade und $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Zeigen Sie, dass für alle $l \geq 4$ gilt:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n \sigma_{l-1}(n)}{n^s} = \frac{L(f,s)L(f,s-l+1)}{\zeta(2s+2-k-l)}, \quad \mathrm{Re}(s) > l + \frac{k-1}{2}.$$

Aufgabe 39:
Sei $M(n)$ die Menge der ganzzahligen Matrizen mit Determinanten n. Wir definieren die Menge

$$Man_n := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(n) \mid (i),\ (ii),\ (iii),\ (iv),\ (v)\}$$

mit

$$(i)\ a > |c| \quad (ii)\ d > |b| \quad (iii)\ bc \leq 0$$

$$(iv)\ b = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} < c \leq \frac{a}{2} \quad (v)\ c = 0 \Rightarrow -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}$$

(a) Berechnen Sie Man_n für $n = 3, 4, 6$.

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{M \in Man_n} p\,|_M$$

für $n = 3, 4, 6$ und $p = r_\Delta^+, r_\Delta^-$.

Aufgabe 38:
In der Vorlesung wurde mithilfe des Rankin-Selberg-Entfaltungstrick das gerade und ungerade Periodenpolynom der Diskriminante Δ berechnet, sowie die Zahlen ω_Δ^+, ω_Δ^- aus dem Satz von Eichler-Shimura-Manin. Führen Sie diese Berechnungen auch für die Hecke-Eigenform $E_4\Delta$ von Gewicht 16 durch.

Aufgabe 37:
Sei $f \in S_k$ eine Spitzenform und $r_n(f) = \int_0^{i\infty} f(z)z^n dz$ die n-te Periode von f. Beweisen Sie für $n = 0, \dots, k-2$ die Periodenrelationen

$$0 = r_n(f) + (-1)^n \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ i\equiv 0 \mod 2}} \binom{n}{i} r_{k-2-n+i}(f) + (-1)^n \sum_{\substack{0\leq i\leq k-2-n \\ i\equiv n \mod 2}} \binom{k-2-n}{i} r_i(f) \tag{1}$$

$$0 = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ i\equiv 1 \mod 2}} \binom{n}{i} r_{k-2-n+i}(f) + \sum_{\substack{0\leq i\leq k-2-n \\ i\not\equiv n \mod 2}} \binom{k-2-n}{i} r_i(f) \tag{2}$$

Aufgabe 36:
Sei $k \geq 4$ und $f, g \in S_k$ Spitzenformen.
(a) Zeigen Sie die folgende Identität für die Periodenpolynome von f, g:

$$-\langle r_f|_{2-k}(T-T^{-1}), \overline{r_g}\rangle = 2 \sum_{\substack{0\leq m<n\leq k-2 \\ n\not\equiv m \mod 2}} (-1)^m \binom{k-2}{n}\binom{n}{m} r_{k-2-n}(f)\overline{r_m(g)}$$

(b) Beweisen Sie, dass der Operator $|_{2-k}(T-T^{-1})$ ungerade Polynome aus V_k auf gerade Polynome abbildet und umgekehrt.

Aufgabe 35: Sei $k \geq 4$ und $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie:

$$W_k = \mathrm{Kern}(1 - T - \varepsilon T \varepsilon)$$
$$W_k^{\pm} = \mathrm{Kern}(1 - T \mp T\varepsilon)$$

Aufgabe 34:
(a)* Zeigen Sie, dass wir den Raum W_k der Periodenpolynome zerlegen können in

$$W_k = W_k^+ \oplus W_k^-,$$

wobei $W_k^+ \subset V_k^+$, $W_k^- \subset V_k^-$ gilt.
(b) Bestimmen Sie die Räume W_8^+ und W_8^-.

Aufgabe 33:
Sei $k \geq 2$ gerade. Dann bezeichnen wir mit V_k^S bzw. V_k^U den Raum aller unter der Wirkung von $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ invarianten Polynome vom Grad $\leq k-2$. Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Molien die Dimension dieser beiden Unterräume.

Aufgabe 32:
Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,r} \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit $a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $a_{ii} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j = 1, .., r$, dann nennen wir

$$q : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R},\ (x_1, ..., x_r) \mapsto \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} x_i x_j$$

eine **ganze quadratische Form**. Wir assoziieren zu q die **Theta-Reihe**

$$\theta_q(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^r} e^{\pi i q(x) z} = \sum_{n\geq 0} A_q(n) q^{n/2}, \quad z \in \mathbb{H},$$

wobei $A_q(n) = |\{x \in \mathbb{Z}^r \mid q(x) = n\}|$. Weiter sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^r$ ein Gitter. Wir nennen das Gitter Γ **ganz**, falls für das Standardskalarprodukt gilt: $(x, x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \Gamma$. Zu dem ganzen Gitter Γ assoziieren wir die **Theta-Reihe**

$$\theta_\Gamma(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^r} e^{\pi i (x,x) z} = \sum_{n\geq 0} A_\Gamma(n) q^{n/2}, \quad z \in \mathbb{H},$$

wobei $A_\Gamma(n) = |\{x \in \Gamma \mid (x,x) = n\}|$ gilt.

(a)* Zeigen Sie, dass es für jede positiv definite, ganze quadratische Form q ein ganzes Gitter Γ gibt, sodass $\theta_q = \theta_\Gamma$ gilt, und umgekehrt.

(b)* Sei q eine positiv definite, ganze quadratische Form. Wir nennen q **unimodular**, falls die zugehörige Matrix A Determinante 1 hat. Beweisen Sie für die unimodulare quadratische Form q die folgende Identität:

$$\theta_q(-\frac{1}{2}) = (-iz)^{r/2}\theta_q(z), \quad z \in \mathbb{H}.$$

(c)* Sei $A \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ eine ganzzahlige, symmetrische, positiv definite, unimodulare Matrix mit geraden Diagonaleinträgen und $q : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $8 \mid r$ und $\theta_q \in \mathcal{M}_{r/2}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ gilt.

(d) Zeigen Sie mithilfe von Teilaufgabe (c), dass die Thetareihe der quadratischen Form

$$q : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, ..., x_8) \mapsto 2\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + \sum_{i=2}^{7} x_{i-1}x_i + x_5x_8\right)$$

eine Modulformform zu $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht 4 ist. Folgern Sie $\theta_{E_8} = E_4$, wobei E_4 die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht 4 ist.

Bemerkung: Allgemeiner kann man zeigen, dass für $n \equiv 0 \mod 2$ und jede positiv definite, ganze quadratische Form q die Theta-Reihe θ_q eine Modulform mit Charakter zu einer Kongruenzgruppe $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist. Siehe *D. Zagier: Elliptic Modular Forms and Their Applications.*

Aufgabe 31*:

Sei $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und $\mathcal{F}_\Gamma$ ein Fundamentalbereich für die Wirkung von $\overline{\Gamma} = \{\pm 1\}\Gamma$ auf $\mathbb{H}$. Dann ist für Spitzenformen $f, g \in S_k(\Gamma)$ das **Petersson-Skalarprodukt** definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{[\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \overline{\Gamma}]}\int_{\mathcal{F}_\Gamma} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdx}{y^2}, \quad z = x + iy.$$

Man zeigt, analog zu dem Fall $\Gamma = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, dass das Petersson-Skalarprodukt tatsächlich ein hermitesches Skalarprodukt auf $S_k(\Gamma)$ definiert.

(a) Seien $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ Kongruenzuntergruppen und $f, g \in S_k(\Gamma_2)$. Zeigen Sie, dass der Wert $\langle f, g\rangle$ unabhängig davon ist, ob f, g als Elemente von Γ_1 oder Γ_2 betrachtet werden.

(b) Für eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ und für eine Matrix $A \in \mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$ mit ganzzahligen Einträgen und positiver Determinante setzen wir $\Gamma_A = A^{-1}\Gamma A \cap \Gamma$.
Beweisen Sie, dass Γ_A wieder eine Kongruenzgruppe ist, und, dass der Slash-Operator $f \mapsto f|_A$ den Vektorraum $S_k(\Gamma)$ auf $S_k(\Gamma_A)$ abbildet.

(c) Seien $f, g \in S_k(\Gamma)$ Spitzenformen zu einer Kongruenzuntergruppe Γ und sei $A \in \mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$ eine ganzzahlige Matrix mit positiver Determinante. Zeigen Sie

$$\langle f, g\rangle = \langle f|_A, g|_A\rangle,$$

wobei sich das rechte Skalarproduktauf die Kongruenzuntergruppe Γ_A bezieht.

(d) Folgern Sie aus Teilaufgabe (c), dass

$$\langle f|_A, g\rangle = \langle f, g|_{A^*}\rangle$$

gilt, wobei wir $A^* = \det(A)A^{-1}$ setzen.

Hinweis: Siehe *M. R. Murty, M. Dewar, H. Graves: Problems in the Theory of Modular Forms.*

Aufgabe 30:

(a) Sei $f(z) \in \mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ eine Modulform zu $SL_2(\mathbb{Z})$ von Gewicht k. Zeigen Sie, dass

$$f(dz) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$$

für alle $d \geq 1,\ d \mid N$ eine Modulform von Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$ ist.

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Eisensteinreihe

$$G_2(z) := -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

nur beinahe wie eine Modulform zu $SL_2(\mathbb{Z})$ transformiert. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E_2(z) := G_2(z) - 2G_2(2z)$$

eine Modulform von Gewicht 2 zu $\Gamma_0(2)$ ist.

Aufgabe 29:

Nutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 28, um zu zeigen, dass die Hecke-Operatoren auf $\mathcal{S}_k$ bezüglich des Petersson-Skalarproduktes selbstadjungiert sind.

Aufgabe 28*:

Für $m \geq 0$, $k \geq 1$ sei die **Poincare-Reihe vom Gewicht** k gegeben durch

$$P_m^k(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{e^{2\pi i m \gamma(z)}}{(cz+d)^k}, \quad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).$$

Hierbei bezeichnet Γ_∞ die Untergruppe $\left\{\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass P_m^k für alle $m \geq 1$ eine Spitzenform vom Gewicht k ist.

(b) Sei $f = \sum\limits_{n \geq 1} a_n q^n$ eine Spitzenform vom Gewicht k. Beweisen Sie, dass für alle $m \geq 1$ gilt:

$$\langle f, P_m^k\rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}} a_m.$$

(c) Folgern Sie aus Teilaufgabe (b), dass der Vektorraum $\mathcal{S}_k$ von den Poincare-Reihen P_m^k, $m \geq 1$, erzeugt wird.

(d) Zeigen Sie für alle $k, l, m \geq 1$ die folgende Identität:

$$T(l)P_m^k = \sum_{d|(l,m)} \left(\frac{l}{d}\right)^{k-1} P^k_{\frac{lm}{d^2}}.$$

(e) Beweisen Sie mithilfe von Teilaufgabe (d), dass für alle $k, l, m, n \geq 1$ folgendes gilt:

$$\langle T(l)P_m^k, P_n^k \rangle = \langle P_m^k, T(l)P_n^k \rangle.$$

Hinweis: Siehe *R. C. Gunning: Lectures on modular forms* oder *H. Iwaniec: Topics in Classical Automorphic Forms.*

Aufgabe 27:
Beweisen Sie, dass für alle $k > 2$, k gerade, die Eisensteinreihe $G_k(z)$ eine Hecke-Eigenform ist.

Aufgabe 26:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Hecke-Operatoren Endomorphismen auf dem Vektorraum $\mathcal{S}_k$ der Spitzenformen sind. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von diesen Hecke-Operatoren reelle algebraische Zahlen sind.

Aufgabe 25*: (6 Punkte)
Die ζ-Funktion ist gegeben durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1.$$

Sie lässt sich meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Wir definieren

$$\Lambda(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

wobei die Γ-Funktion gegeben ist durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Skizzieren Sie den Beweis der Funktionalgleichung der ζ-Funktion

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Hinweis: Benutzen Sie die θ-Reihe

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2}$$

und das folgende Integral

$$\int_0^\infty (\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}-1}dt = 2\Lambda(s).$$

Verwenden Sie die Transformationsformel der θ-Funktion, die Sie beweisen sollen,

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Aufgabe 24:
Bestimmen Sie eine Basis aus Hecke-Eigenformen für den Raum S_{28} der Spitzenformen vom Gewicht 28.

Aufgabe 23:
Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Koeffizienten einer normierten Hecke-Eigenform $f = \sum a_n q^n \in \mathcal{M}_k$:

$$\begin{aligned} a_n a_m &= a_{nm} && (n,m)=1 \\ a_p a_{p^n} &= a_{p^{n+1}} + p^{k-1} a_{p^{n-1}} && n \geq 1,\ p \text{ prim.} \end{aligned}$$

Aufgabe 22:
Zeigen Sie, dass die Hecke Algebra $\mathbb{T}$ erzeugt von R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, und $T(p)$, p prim, eine kommutative Algebra ist, die alle Hecke-Operatoren $T(n)$, $n \geq 1$, enthält.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Seien $d, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{0 \leq b < d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} = \begin{cases} d & d|m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $M(n)$ die Menge aller ganzzahligen Matrizen mit Determinante n, also

$$M(n) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z};\ ad - bc = n \right\}.$$

Betrachten Sie die Rechtsnebenklassen $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus M(n)$ und zeigen Sie, dass die Menge

$$S(n) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \middle|\ a,b,c,d \in \mathbb{Z};\ ad = n,\ d > 0,\ 0 \leq b < d \right\}$$

ein vollständiges Repräsentantensystem für diese Klassen bildet.

Aufgabe 19: Zeigen Sie, die folgenden Identitäten für die Hecke-Operatoren $T(n)$ und die Homothetie-Operatoren R_λ:

(a)

$$T(p)^e = \sum_{0 \le r \le e/2} \left[\binom{e}{r} - \binom{e}{r-1} \right] p^r R_p^r T(p^{e-2r}), \quad p \text{ prim.}$$

(b)

$$T(p^r)T(p^s) = \sum_{i=0}^{r} p^i R_p^i T(p^{r+s-2i}), \quad 0 \le r \le s,\ p \text{ prim.}$$

(c)

$$T(m)T(n) = \sum_{d|\mathrm{ggT}(m,n)} dR_d T\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad n, m \ge 1.$$

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle teilerfremden Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 17:
Die j-Invariante sei definiert durch

$$j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die j-Invariante die Teilmenge

$$\{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1,\ -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1,\ -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) \le 0\}$$

des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$ isomorph auf die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ abbildet.
(b)* Folgern Sie, dass $X(1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gilt.
Hinweis: Siehe J. Milne: Modular forms and modular functions (www.jmilne.org/math), Proposition 2.21.

Aufgabe 16:
Beschreiben Sie einen Fundamentalbereich für die Wirkung von $\Gamma(2)$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$.

Aufgabe 15:
Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\widetilde{\mathcal{M}}_k$ der Quasimodulformen vom Gewicht k die folgende Zerlegung hat:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_k = \bigoplus_{l=0}^{k/2} \mathcal{M}_{k-2l} E_2^l.$$

Aufgabe 14:
Zeigen Sie: Die Relationen

$$E_2' = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4), \quad E_4' = \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6), \quad E_6' = \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2)$$

implizieren die Differentialgleichung

$$3(E_2')^2 - 2E_2E_2'' + 2E_2''' = 0.$$

Aufgabe 13:
Sei $f \in \mathcal{M}_k$ eine Modulform vom Gewicht k und $g \in \mathcal{M}_l$ eine Modulform vom Gewicht l. Für $\nu > 0$ definieren wir den **H. Cohen Differentialoperator** F_ν als

$$F_\nu(f,g)(z) = (2\pi i)^{-\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{k+\nu-1}{\mu} \binom{l+\nu-1}{\nu-\mu} f^{(\nu-\mu)}(z) g^{(\mu)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie:

(a) $F_1(f,g)$ ist eine Modulform vom Gewicht $k+l+2$.

(b) $F_2(f,g)$ ist eine Modulform vom Gewicht $k+l+4$.

Aufgabe 12:
Sei $f \in \mathcal{M}_k$ eine Modulform vom Gewicht $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}),\ z \in \mathbb{H}$ gilt:

$$f'(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^{k+2} f'(z) + \frac{k}{2\pi i} c(cz+d)^{k+1} f(z).$$

Aufgabe 11:
Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung zeigen Sie

$$-\nu_\infty(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_E^A \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Aufgabe 10:
Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$N_k := \#\{(a,b) \in \mathbb{N}_0^2 \mid 4a + 6b = k\}.$$

Zeigen Sie, dass $N_{k+12} = N_k + 1$ für alle $k \geq 0$ gilt.

Aufgabe 9:
(a) Stellen Sie die Eisensteinreihe $E_{12} \in \mathcal{M}_{12}$ als Linearkombination von E_4^3, E_6^2 dar, d.h. finden Sie Koeffizienten $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$, sodass gilt

$$E_{12} = \mu E_4^3 - \lambda E_6^2.$$

(b) Stellen Sie die Diskriminante $\Delta \in \mathcal{S}_{12}$ als Linearkombination von E_4^3, E_6^2 dar.

Aufgabe 8:
In der Vorlesung wurde die folgende Tabelle aufgestellt:

k	0	2	4	6	8	10	12
$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_k)$	1	0	1	1	1	1	2
Basis	1	0	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}, Δ
Weitere Elemente	-	-	-	-	E_4^2	$E_4 E_6$	E_6^2, E_4^3

Ergänzen Sie diese Tabelle bis zu dem Gewicht $k = 26$.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Diskriminante $\Delta(z)$ eine Spitzenform von Gewicht 12 für $SL_2(\mathbb{Z})$ ist. Dabei wurde die Identität

$$\frac{d}{dz}(\log \Delta(z)) = -48\pi i G_2(z),$$

wobei $G_2(z)$ die Eisensteinreihe zum Gewicht 2 ist, benutzt.

Führen Sie den Beweis dieser Gleichung noch einmal im Detail aus.

Aufgabe 6:
a) Für welche Funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt die Poisson-Summationsformel

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi(x+m) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-2\pi i r t} dt \right) e^{2\pi i r x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad ?$$

Beweisen Sie ihre Behauptung.

b) Zeigen Sie mithilfe der Poisson-Summationsformel oder der Taylorentwicklung des Kotangens die Lipschitz-Formel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r\geq 1} r^{k-1} e^{2\pi i r z}$$

für $k \geq 2$, $z \in \mathbb{H}$.

Aufgabe 5:
Zeigen Sie die folgenden Identitäten von q-Reihen für $k \geq 2$:

$$\sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{k-1} q^n}{1-q^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{q^n P_{k-1}(q^n)}{(1-q^n)^k}.$$

Hierbei bezeichnet $P_{k-1}(z) \in \mathbb{Q}[z]$ das $(k-1)$-te Eulerpolynom.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $k \geq 4$, gerade, konvergiert die Eisensteinreihe $G_k(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ absolut.

b) Die Eisensteinreihe

$$G_2(z) := -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2}$$

vom Gewicht 2 konvergiert für alle $z \in \mathbb{H}$, allerdings nicht absolut.

Hinweis: Beweisen Sie die Konvergenz für den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ und nutzen Sie das Transfomationsverhalten der Eisensteinreihen, um die Konvergenz auf ganz $\mathbb{H}$ zu zeigen.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Sei k eine ganze Zahl, dann ist für Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ der **slash Operator** vom Gewicht k gegeben durch

$$(f|_k\gamma)(z) := (\det \gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k} f(\gamma(z)) \qquad (z \in \mathbb{H}).$$

Zeigen Sie, dass für beliebige $\gamma, \sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$(f|_k(\gamma\sigma))(z) = ((f|_k\gamma)|_k\sigma)(z) \qquad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Seien f und g schwach modulare Funktionen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht k_1, k_2. Zeigen Sie:

a) Das Produkt fg ist eine schwach modulare Funktion vom Gewicht $k_1 + k_2$.

b) Ist $f \neq 0$, dann ist $1/f$ eine schwach modulare Funktion vom Gewicht $-k_1$.

c) Gilt $k_1 = k_2$, dann ist $f + g$ eine schwach modulare Funktion vom Gewicht k_1.

d) Seien nun f und g sogar Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie: Das Produkt fg ist dann auch eine Modulform.

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Die Operation der Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (\gamma, z) &\longrightarrow \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

mit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist wohldefiniert.

Zeigen Sie also die folgenden drei Eigenschaften:

a) $\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \in \mathbb{H} \quad \forall z \in \mathbb{H},\ \forall \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$.

b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{H}$.

c) $\gamma(\sigma(z)) = (\gamma\sigma)(z) \quad \forall z \in \mathbb{H},\ \forall \gamma, \sigma \in SL_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe : (4 Punkte)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Die Volumenform $\frac{dxdy}{y^2}$ bildet ein Maß auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.

a) Zeigen Sie, dass dieses Maß invariant unter der Wirkung von $SL_2(\mathbb{R})$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen eines Fundamentalbereichs für die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Aufgabe : (16+4* Punkte)

Betrachten Sie den Raum S_{28} der Spitzenformen vom Gewicht 28 zu $SL_2(\mathbb{Z})$.

a) Geben Sie eine normierte Basis für S_{28} an. Stellen Sie hierbei die Basiselemente als Polynom in den Eisensteinreihen G_4 und G_6 da.

b) Berechnen Sie die Heckeoperatoren $T(2)$ und $T(3)$, stellen Sie diese mit Hilfe der in a) berechneten Basis da.

c) Bestimmen Sie die Hecke-Eigenformen für S_{28}.

d) Bestimmen Sie die Dimension r der Wirkung der Hecke-Algebra auf S_{28} und geben Sie eine Basis T_1, ..., T_r an. Stellen Sie $T(2)$ und $T(3)$ mit dieser Basis dar.

e)* Berechnen Sie die Heckeoperatoren $T(4)$, $T(5)$ und $T(6)$ und stellen Sie diese bezüglich der Basis aus a) und bezüglich der Basis aus d) dar.

Aufgabe : (4 Punkte)

Die Euler'sche φ-Funktion ist definiert durch

$$\varphi(n) := \# \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| k < n,\ \mathrm{ggT}(k,n) = 1 \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie die Formel

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ prim}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe : (4 Punkte)

Sei $f \in S_k$ und $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie die Gleichung

$$r(f)|_{2-k}\gamma X = \int_{\gamma^{-1}0}^{\gamma^{-1}\infty} f(z)(X-z)^{k-2} dz$$

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie $(X - \gamma z)(cz + d) = (\gamma^{-1}X - z)(-cX + a)$ mit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe : (4 Punkte)

Seien $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir definieren

$$W_k = \left\{ \phi \in V_k \ : \ \phi + \phi|_{2-k} S = \phi + \phi|_{2-k} U + \phi|_{2-k} U^2 = 0 \right\},$$

wobei V_k der Raum der Polynome vom Grad keiner gleich $k-2$ über $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass für $f \in S_k$ das Periodenpolynom $r(f) \in W_k$ liegt.

Aufgabe : (4 Punkte)

Auf dem Raum V_k ist durch folgende Gleichung

$$(X^n, X^m) = \begin{cases} (-1)^n \binom{k-2}{n}^{-1} & \text{wenn } n+m = k-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und lineare Fortsetzung eine Bilinearform definiert.
Zeigen Sie: Für alle $\phi, \psi \in V_k$ und alle $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ gilt

$$(\phi|_{2-k}\gamma \, , \, \psi|_{2-k}\gamma) = (\phi \, , \, \psi).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $(\phi \, , \, \psi_t) = \phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $\psi_t(X) = (X-t)^{k-2}$ die selbe Form induziert wird. Dann genügt es die Gleichung für den Spezialfall $\psi = \psi_t$ zu zeigen.

Aufgabe : (6 Punkte)

Sei $f \in S_k$ und $r_l(f) = \int_0^{i\infty} F(z) z^l dz$ die l-te Periode. Beweisen Sie für $l = 0, \ldots k-2$ die Periodenrelationen

$$0 = r_l(f) + (-1)^l r_{k-2-l}(f) \tag{3}$$

$$0 = r_l(f) + (-1)^l \sum_{\substack{0 \le j \le l \\ j \equiv 0 \mod 2}} \binom{l}{j} r_{k-2-l+j}(f) + (-1)^l \sum_{\substack{0 \le j \le k-2-l \\ j \equiv k \mod 2}} \binom{k-2-l}{j} r_j(f) \tag{4}$$

$$0 = \sum_{\substack{0 \le j \le l \\ j \equiv 1 \mod 2}} \binom{l}{j} r_{k-2-l+j}(f) + \sum_{\substack{0 \le j \le k-2-l \\ j \not\equiv l \mod 2}} \binom{k-2-l}{j} r_j(f) \tag{5}$$

Aufgabe : (2 Punkte)

Zeigen Sie:

$$p_k^+ := X^{k-2} - 1 \in W_k.$$