

In diesem Kapitel stellen wir in relativ kompakter Form die in der Graphentheorie üblichen Grundbegriffe zusammen. Glücklicherweise sind fast all diese Begriffe und ihre Bezeichnungen anschaulich und ganz leicht zu merken; schwierigere Begriffsbildungen, die erst vor dem Hintergrund gewisser Sachverhalte natürlich werden, führen wir dann jeweils später ein.

Bereits ab Abschnitt 0.2 werden wir schon laufend kleinere aber wichtige Tatsachen beweisen, um so die neuen Worthülsen gleich mit etwas Leben zu erfüllen. Häufig wird uns dabei die Frage leiten, wie verschiedene soeben definierte Grapheninvarianten voneinander abhängen: diese Frage zieht sich wie ein roter Faden durch wesentliche Teile der Graphentheorie, und es ist gut, von Anfang an ein Gespür dafür zu entwickeln.

Die Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der Null, bezeichnen wir mit \mathbb{N} . Mit \mathbb{Z}_n bezeichnen wir den Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen modulo n ; seine Elemente schreiben wir kurz als $\bar{i} := i + n\mathbb{Z}$. Ist x eine reelle Zahl, so bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$, und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$. Mit \log bezeichnete Logarithmen haben die Basis 2. Eine Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ disjunkter Teilmengen einer Menge A ist eine *Partition* von A , wenn $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^k A_i = A$ ist und $A_i \neq \emptyset$ für jedes i . Mit $[A]^k$ bezeichnen wir die Menge aller k -elementigen Teilmengen von A . Wir verwenden den Ausdruck „entweder ... oder“ synonym mit „oder“, also im einschließenden Sinne; die längere Version dient lediglich dem Ziel größerer syntaktischer Klarheit. Die Worte „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ kürzen wir als „oBdA“ ab.

\mathbb{N}
 \mathbb{Z}_n
 $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$
 \log
 $\bigcup \mathcal{A}$
Partition
 $[A]^k$

0.1 Graphen

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$; die Elemente von E sind also 2-elementige Teilmengen von V . Die Elemente von V nennt man die *Ecken* (oder *Knoten*) des Graphen G , die Elemente von E seine *Kanten*. Bildlich kann man G darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind (Abb. 0.1.1). Wie man diese Punkte und Linien zeichnet, ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig.

Graph
Ecken
Kanten

Ein Graph $G = (W, F)$ ist ein Graph *auf* W ; seine Eckenmenge W bezeichnen wir mit $V(G)$, seine Kantenmenge F mit $E(G)$. Statt $v \in V(G)$ oder $e \in E(G)$ schreiben wir gelegentlich auch einfach $v \in G$ oder $e \in G$. Der Graph G heißt *endlich* bzw. *unendlich* je nachdem, ob $V(G)$ endlich oder unendlich ist. Ist nichts anderes gesagt, so sind unsere

auf
 $V(G), E(G)$

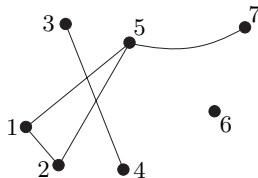


Abb. 0.1.1. Der Graph auf $V = \{1, \dots, 7\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

Graphen endlich. Statt $|V(G)|$ schreiben wir auch $|G|$ und nennen $|G|$ die *Ordnung* von G ; statt $|E(G)|$ schreiben wir $\|G\|$.

$|G|, \|G\|$
Ordnung

Den *leeren* Graphen (\emptyset, \emptyset) bezeichnen wir kurz mit \emptyset . Einen Graphen der Ordnung 0 oder 1 nennen wir *trivial*. Manchmal, etwa bei Induktionsanfängen, kommen triviale Graphen gelegen; anderswo bilden sie lästige Ausnahmen. Um die Darstellung der wesentlichen Aussagen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden wir solche Ausnahmen, insbesondere für den leeren Graphen \emptyset , in der Regel nicht explizit nennen sondern großzügig ignorieren.

\emptyset
trivialer
Graph

Eine Ecke v und eine Kante e *inzidieren* miteinander und heißen *inzident*, wenn $v \in e$ gilt. Die beiden Ecken einer Kante sind ihre *Endecken*, und sie *verbindet* diese Ecken. Für eine Kante $\{x, y\}$ schreiben wir kürzer auch xy (oder yx). Ist $x \in X \subseteq V$ und $y \in Y \subseteq V$, so ist xy eine *X–Y-Kante*. Die Menge aller X–Y-Kanten in einer Menge E bezeichnen wir mit $E(X, Y)$; für $E(\{x\}, Y)$ und $E(X, \{y\})$ schreiben wir kurz $E(x, Y)$ und $E(X, y)$. Die Menge $E(v, V \setminus \{v\})$ aller mit v inzidenten Kanten bezeichnen wir mit $E(v)$.

Zwei Ecken x, y von G sind (*adjazent* oder) *benachbart* in G und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn $xy \in E(G)$ ist. Zwei Kanten $e \neq f$ sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Ecke haben. Sind je zwei Ecken von G benachbart, so heißt G *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf n Ecken bezeichnen wir mit K^n ; ein K^3 ist ein *Dreieck*.

Paarweise nicht benachbarte Ecken oder Kanten nennt man *unabhängig*. Formaler: eine Teilmenge von V oder von E heißt *unabhängig*, wenn ihre Elemente paarweise nicht benachbart sind. Unabhängige Eckenmengen nennt man auch *stabil*.

Im Folgenden sei $G' = (V', E')$ ein weiterer Graph. G heißt *isomorph* zu G' , geschrieben $G \simeq G'$, wenn es eine Bijektion $\varphi: V \rightarrow V'$ gibt mit $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ für alle $x, y \in V$. Eine solche Abbildung φ ist ein *Isomorphismus*; ist $G = G'$, so nennt man φ einen *Automorphismus* von G . Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, schreiben also $G = G'$ statt $G \simeq G'$, sprechen von „dem“ vollständigen Graphen auf 17 Ecken usw. Wollen wir in informellem Sprachgebrauch ausdrücken, dass es uns bei der Beschreibung eines Graphen nur um seinen Isomorphietyp geht, so nennen wir den Graphen *abstrakt*.

Eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von Graphen nennen wir eine *Eigenschaft* von Graphen. „Ein Dreieck zu enthalten“ etwa ist eine Grapheneigenschaft: hat G drei paarweise benachbarte Ecken, so hat auch jeder zu G isomorphe Graph drei solche Ecken. Eine Funktion, die Graphen als Argumente hat und isomorphen Graphen gleiche Werte zuordnet, nennt man eine (Graphen-) *Invariante*. Eckenzahl und Kantenzahl sind einfache Grapheninvarianten; die größte Anzahl paarweise benachbarter Ecken etwa wäre eine weitere.

Wir setzen $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ und $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Ist $G \cap G' = \emptyset$, so heißen G und G' *disjunkt*. Gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein *Teilgraph* von G (und G ein *Obergraph* von G'), geschrieben $G' \subseteq G$. Informell sagen wir häufig einfach, dass G den Graphen G' *enthält*. Der Teilgraph G' heißt *induziert* oder *aufgespannt* (von V' in G), wenn er *alle* Kanten $xy \in E$ mit $x, y \in V'$ enthält. Einen solchen induzierten Teilgraphen nennen wir einen *Untergraphen*. Wir bezeichnen G' dann auch mit $G[V']$; dies ist also der Graph auf V' , dessen Kanten genau die Kanten von G sind, deren Endecken beide in V' liegen. Ist G' ein Teilgraph von G (aber nicht notwendig ein Untergraph), so schreiben

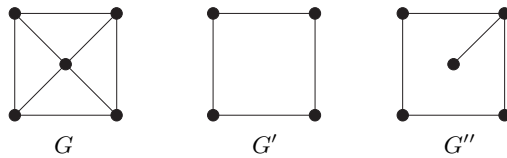


Abb. 0.1.2. Ein Graph G mit Teilgraphen G' und G'' :
 G' ist Untergraph von G , G'' ist es nicht.

aufspannend

wir statt $G[V(G')]$ auch kürzer $G[G']$. Umgekehrt nennt man $G' \subseteq G$ einen *aufspannenden* Teilgraphen von G , wenn V' ganz G aufspannt, d.h. wenn $V' = V$ ist.

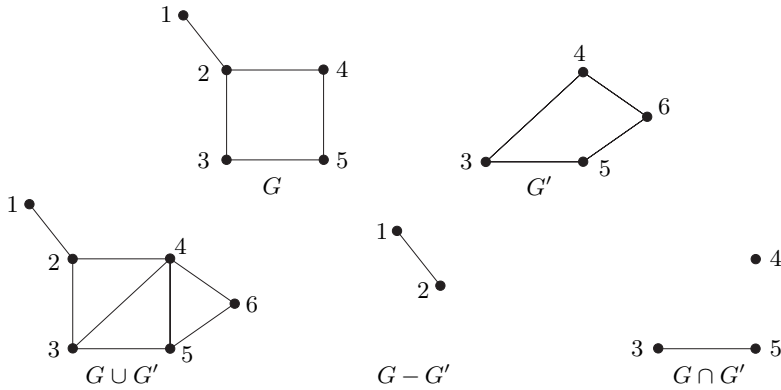


Abb. 0.1.3. Vereinigung, Differenz, Durchschnitt; die Ecken 2,3,4 spannen in $G \cup G'$ ein Dreieck auf, nicht aber in G

Ist U eine beliebige Menge (meist eine Teilmenge von V), so schreiben wir $G - U$ statt $G[V \setminus U]$; mit anderen Worten, $G - U$ entsteht aus G durch *Löschen* aller Ecken in $U \cap V$ und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten. Ist $U = \{v\}$ einelementig, so schreiben wir $G - v$ statt $G - \{v\}$. Ist H ein weiterer Graph, so schreiben wir statt $G - V(H)$ kurz $G - H$. Ist F irgendeine Teilmenge von $[V]^2$, so setzen wir $G - F := (V, E \setminus F)$ und $G + F := (V, E \cup F)$; statt $G - \{e\}$ und $G + \{e\}$ schreiben wir $G - e$ und $G + e$. Wir nennen G *kantenmaximal* mit einer gegebenen Grapheneigenschaft, wenn G selbst die Eigenschaft hat, aber kein $G + xy$ für nicht benachbarte Ecken $x, y \in G$ sie hat.

$G - U$

$G - H$

$G - F$

$G + F$

kantenmaximal

minimal

maximal

Sagen wir allgemeiner, ein gegebener Graph sei *minimal* oder *maximal* mit irgendeiner Eigenschaft, so meinen wir (wenn nichts anderes gesagt ist) die Minimalität oder Maximalität hinsichtlich der Teilgraphenbeziehung. Häufig werden wir auch von minimalen oder maximalen Ecken- oder Kantenmengen sprechen; hier ist die zugrundeliegende Relation natürlich einfach die Teilmengenbeziehung.

Sind G und G' disjunkt, so bezeichnet $G * G'$ den Graphen auf $V \cup V'$ mit der Kantenmenge $E \cup E' \cup \{vv' \mid v \in V \text{ und } v' \in V'\}$. Das *Komplement* \bar{G} von G ist der Graph auf V , in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in G nicht sind. Der *Kantengraph* $L(G)$ von G ist der Graph auf E , in dem $x, y \in E$ genau dann als Ecken benachbart sind, wenn sie es als Kanten in G sind.

$G * G'$

Komplement \bar{G}

Kantengraph $L(G)$

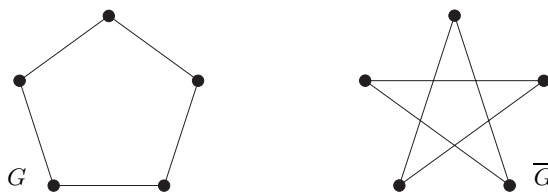


Abb. 0.1.4. Ein Graph, der zu seinem Komplement isomorph ist

0.2 Der Grad einer Ecke

Es sei $G = (V, E)$ ein (nicht leerer) Graph. Die Menge der Nachbarn einer Ecke v bezeichnen wir mit $N_G(v)$, oder kurz mit $N(v)$.¹ Allgemeiner bezeichnet $N(U)$ für $U \subseteq V$ die Menge aller Nachbarn in $V \setminus U$ von Ecken aus U .

 $N(v)$

Grad $d(v)$ Der *Grad* (oder die *Valenz*) $d_G(v) = d(v)$ einer Ecke v ist die Anzahl $|E(v)|$ der mit v inzidenten Kanten; nach unserer Definition eines Graphen² ist dies gerade die Anzahl der Nachbarn von v . Eine Ecke vom Grad 0 ist *isoliert*. Die Zahl $\delta(G) := \min \{ d(v) \mid v \in V \}$ heißt *Minimalgrad* von G , und $\Delta(G) := \max \{ d(v) \mid v \in V \}$ ist sein *Maximalgrad*. Hat jede Ecke von G den gleichen Grad k , so heißt G *regulär*, oder *k-regulär*. Einen 3-regulären Graphen nennt man auch *kubisch*.

Die Zahl

$$d(G) := \sum_{v \in V} d(v) / |V|$$

Durchschnittsgrad nennt man den *Durchschnittsgrad* von G . Offenbar gilt

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Der Durchschnittsgrad misst global, was lokal durch die einzelnen Eckengrade ausgedrückt wird: die ungefähre Anzahl der Kanten von G pro Ecke. Manchmal ist es natürlich, dieses Verhältnis direkt auszudrücken; wir schreiben dazu $\varepsilon(G) := |E|/|V|$.

 $\varepsilon(G)$

Natürlich sind die Größen d und ε lediglich zwei Seiten derselben Medaille. Zählen wir nämlich alle Eckengrade in G zusammen, so zählen wir dabei jede Kante vw genau zweimal: einmal von v und einmal von w aus. Es gilt also

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|,$$

und somit

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

[8.3.1] **Proposition 0.2.1.** Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in G ist stets gerade.

Beweis. Wegen $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ ist $\sum d(v)$ eine gerade Zahl. \square

Hat ein Graph einen hohen Minimalgrad, lokal betrachtet also überall viele Kanten, so hat er auch global gesehen viele Kanten (gemessen an seiner Eckenzahl): $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G) \geq \frac{1}{2} \delta(G)$. Umgekehrt erzwingt ein hoher Durchschnittsgrad natürlich keinen hohen Minimalgrad: auch global gesehen „dichte“ Graphen können etwa isolierte Ecken haben. Jeder Graph enthält jedoch einen Teilgraphen, dessen Durchschnittsgrad nicht kleiner ist und dessen Minimalgrad mehr als die Hälfte seines Durchschnittsgrades beträgt:

[0.4.3]
[2.5.1]

Proposition 0.2.2. Jeder Graph G mit mindestens einer Kante hat einen Teilgraphen H mit $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Beweis. Um H aus G zu konstruieren, wollen wir sukzessive Ecken geringen Grades löschen, bis nur noch Ecken hohen Grades übrig sind. Bis zu welchem Grad $d(v)$ können wir eine Ecke v löschen, ohne dass ε sinkt? Offenbar bis höchstens $d(v) = \varepsilon$: dann löschen wir genau eine Ecke und mit ihr höchstens ε Kanten, d.h. das Verhältnis ε der Kanten zur Eckenzahl wird nicht sinken.

Formal konstruieren wir, ausgehend von $G =: G_0$, eine Folge $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ von Untergraphen von G wie folgt. Hat G_i eine Ecke v_i vom Grad $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$, so setzen wir $G_{i+1} := G_i - v_i$; hat G_i keine solche Ecke, so beenden wir die Folge mit diesem G_i und setzen $G_i =: H$. Nach

¹ Auch bei anderen Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Index angeben, lassen wir diesen Index häufig fort, wenn der Bezug klar ist.

² nicht jedoch bei Multigraphen; vgl. Abschnitt 0.10

Wahl von v_i gilt $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$ für alle i , und damit insbesondere $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Mit welchem $G_i = H$ kann unsere Folge von Untergraphen enden? Wegen $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$ tritt K^1 nicht unter den G_i auf; insbesondere ist H also nicht leer. Dass H dennoch keine zur Definition eines weiteren Untergraphen G_{i+1} geeignete Ecke v_i enthält, impliziert somit $\delta(H) > \varepsilon(H)$, wie behauptet. \square

0.3 Wege und Kreise

Ein *Weg* ist ein nicht leerer Graph $P = (V, E)$ der Form

Weg

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

wobei die x_i paarweise verschieden sind. Die Ecken x_0 und x_k sind die *Endecken* von P ; sie sind durch P *verbunden*. Die Ecken x_1, \dots, x_{k-1} sind die *inneren Ecken* von P . Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine *Länge*; den Weg der Länge k bezeichnen wir mit P^k .

Länge
 P^k

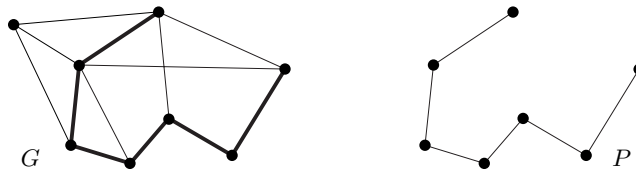


Abb. 0.3.1. Ein Weg $P = P^6$ in G

Oft bezeichnen wir einen Weg durch die natürliche Folge seiner Ecken,³ schreiben also etwa $P = x_0x_1 \dots x_k$. Wir nennen dann P einen Weg *von* x_0 *nach* x_k , oder auch *zwischen* diesen Ecken, mit *erster* Ecke x_0 und *letzter* Ecke x_k , usw.

Für $0 \leq i \leq j \leq k$ schreiben wir

$$\begin{aligned} Px_i &:= x_0 \dots x_i \\ x_iP &:= x_i \dots x_k \\ x_iPx_j &:= x_i \dots x_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P} &:= x_1 \dots x_{k-1} \\ P\overset{\circ}{x}_i &:= x_0 \dots x_{i-1} \\ \overset{\circ}{x}_iP &:= x_{i+1} \dots x_k \\ \overset{\circ}{x}_iP\overset{\circ}{x}_j &:= x_{i+1} \dots x_{j-1} \end{aligned}$$

für die entsprechenden Teilwege von P . Ähnliche offensichtliche Schreibweisen, wie etwa $PxQyR$ statt $Px \cup xQy \cup yR$, verwenden wir für Wege, die aus anderen Wegen durch Aneinanderhängen gewonnen worden sind.

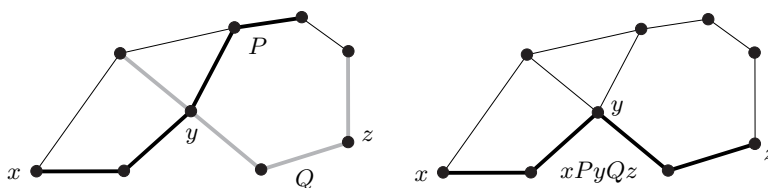


Abb. 0.3.2. Wege P , Q und $xPyQz$

³ Genauer, durch eine der beiden natürlichen Folgen: auch $x_k \dots x_0$ bezeichnet den Weg P . Dennoch ist es oft nützlich, sich informell auf eine dieser beiden linearen Ordnungen von $V(P)$ beziehen zu können, und zu deren Festlegung dient die informelle Schreibweise $P = x_0 \dots x_k$.

Für Eckenmengen A, B nennen wir P einen A - B -Weg, wenn $V(P) \cap A = \{x_0\}$ ist und $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Einen $\{a\}$ - B -Weg bezeichnen wir kürzer als a - B -Weg, usw. Zwei oder mehr Wege heißen *kreuzungsfrei*, wenn keiner eine innere Ecke eines anderen enthält. Zwei a - b -Wege etwa sind genau dann kreuzungsfrei, wenn sie bis auf a und b disjunkt sind.

 A - B -Wegkreuzungs-
frei

Ist H ein Graph, so nennen wir P einen H -Weg, wenn P nicht trivial ist und den Graphen H genau in seinen Ecken x_0, x_k trifft. Ein Weg der Länge 1 mit Ecken in H gilt genau dann als H -Weg, wenn seine Kante nicht Kante von H ist.

 H -Weg

Ist $P = x_0 \dots x_{k-1}$ ein Weg und $k \geq 3$, so ist der Graph $C := P + x_{k-1}x_0$ ein *Kreis*. Auch einen Kreis bezeichnen wir häufig kurz durch seine (zyklische) Eckenfolge, im obigen Beispiel also etwa $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$. Die *Länge* eines Kreises ist wieder die Anzahl seiner Kanten, und den Kreis der Länge k bezeichnen wir mit C^k .

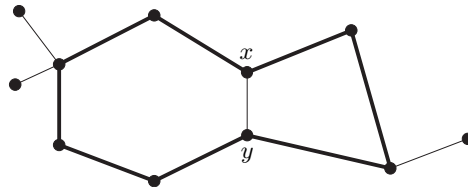
Kreis

Länge

 C^k Taillen-
weite $g(G)$
Umfang

Die Länge eines kürzesten Kreises in (\subseteq) einem Graphen G ist die *Tailleweite* $g(G)$ von G , die Länge eines längsten Kreises der *Umfang*. (Enthält G keinen Kreis, so habe G Tailleweite ∞ und Umfang null.) Eine Kante von G , die zwei Ecken eines Kreises in G verbindet aber nicht selbst Kante des Kreises ist, ist eine *Sehne* dieses Kreises; ein Kreis in G ist also genau dann sehnenlos, wenn er als Teilgraph in G induziert ist.

Sehne

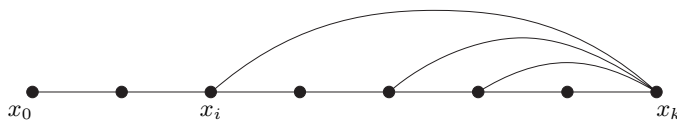
Abb. 0.3.3. Ein C^8 mit Sehne xy , und induzierte C^6, C^4

Hat G hohen Minimalgrad, so enthält G lange Wege und Kreise (vgl. Übung 8):

[0.4.3]
[2.5.1]

Proposition 0.3.1. *Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$ (für $\delta(G) \geq 2$).*

Beweis. Es sei $x_0 \dots x_k$ ein längster Weg in G . Alle Nachbarn von x_k in G liegen dann auf diesem Weg (Abb. 0.3.4). Es folgt $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$. Ist $i < k$ minimal mit $x_i x_k \in E(G)$, so ist $x_i \dots x_k x_i$ ein Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$. \square

Abb. 0.3.4. Ein längster Weg $x_0 \dots x_k$, und die Nachbarn von x_k

Minimalgrad und Tailleweite hängen (bei variabler Eckenzahl) hingegen nicht zusammen; wie wir in Kapitel 9 sehen werden, gibt es Graphen, die gleichzeitig beliebig hohen Minimalgrad und beliebig hohe Tailleweite haben.

Abstand

 $d_G(x, y)$ Durchmes-
ser $\text{diam } G$

Der *Abstand* zweier Eckenmengen X, Y in G ist die geringste Länge eines X - Y -Weges in G ; existiert kein solcher Weg, so sei ihr Abstand unendlich. Den Abstand zweier einzelner Ecken x und y bezeichnen wir mit $d_G(x, y)$. Der größte Abstand zweier Ecken in G ist der *Durchmesser* $\text{diam } G$ von G .

Durchmesser und Tailleweite eines Graphen hängen natürlich zusammen:

Proposition 0.3.2. *Für jeden Graphen G , der einen Kreis enthält, gilt $g(G) \leq 2 \text{diam } G + 1$.*

Beweis. Es sei C ein kürzester Kreis in G . Ist $g(G) \geq 2 \text{diam } G + 2$, so enthält C zwei Ecken, die in C einen Abstand von mindestens $\text{diam } G + 1$ haben. In G haben diese Ecken geringeren Abstand; ein kürzester Weg P zwischen ihnen liegt somit nicht in C . Folglich enthält P einen C -Weg xPy . Zusammen mit dem kürzeren der beiden x - y -Wege in C ergibt xPy einen kürzeren Kreis als C , mit Widerspruch. \square

zentral
Radius
rad G

Eine Ecke heißt *zentral* in G , wenn ihr größter Abstand von anderen Ecken möglichst klein ist. Dieser Abstand ist der *Radius* von G , geschrieben $\text{rad } G$; formal ist also $\text{rad } G = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$. Wie man leicht sieht (Übung), gilt

$$\text{rad } G \leq \text{diam } G \leq 2 \text{rad } G.$$

Durchmesser und Radius sind nicht mit Minimal-, Durchschnitts- oder Maximalgrad korreliert, solange wir nichts über die Ordnung des Graphen sagen. Graphen mit hohem Durchmesser und Minimalgrad haben jedoch viele Ecken (mehr als ihr Durchmesser oder Minimalgrad alleine es erzwingen; siehe Übung 9), und Graphen mit geringem Durchmesser und Maximalgrad haben wenige Ecken:

Proposition 0.3.3. *Ein Graph G mit Radius $\leq k$ und Maximalgrad höchstens $d \geq 3$ hat weniger als $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ Ecken.*

[7.4.1]
[7.4.2]

Beweis. Es sei z eine zentrale Ecke in G . Bezeichnet D_i die Menge der Ecken von G mit Abstand i von z , so ist $V(G) = \bigcup_{i=0}^k D_i$, und es gilt $|D_0| = 1$ und $|D_1| \leq d$. Für $i \geq 1$ gilt $|D_{i+1}| \leq (d-1)|D_i|$, da jede Ecke aus D_{i+1} Nachbar einer Ecke in D_i ist (warum?), und jede Ecke in D_i höchstens $d-1$ Nachbarn in D_{i+1} hat (da sie einen weiteren Nachbarn in D_{i-1} hat). Induktiv gilt damit $|D_{i+1}| \leq d(d-1)^i$ für alle $i < k$, und somit

$$|G| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i = 1 + \frac{d}{d-2} ((d-1)^k - 1) < \frac{d}{d-2} (d-1)^k. \quad \square$$

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass Graphen mit hohem Minimalgrad und hoher Taillenweite viele Ecken haben müssen. Zu gegebenen $d \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{N}$ sei

$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r+1 \text{ ungerade ist;} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Durch Betrachten von Distanzklassen wie im Beweis von Proposition 0.3.3 folgt leicht, dass ein Graph mit Minimalgrad δ und Taillenweite g mindestens $n_0(\delta, g)$ Ecken hat (Übung 7). Wesentlich tiefer liegt der folgende Satz, nach dem man die gleiche Schranke bereits für hohen Durchschnittsgrad erhält:

Satz 0.3.4. (Alon, Hoory & Linial 2002)

Für jeden Graphen G mit $d(G) \geq d \geq 2$ und $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$ gilt $|G| \geq n_0(d, g)$.

Ein Aspekt von Satz 0.3.4 ist, dass er die Existenz kurzer Kreise garantiert. Die folgende ganz allgemeine Abschätzung der Taillenweite folgt bereits aus der einfachen Minimalgradversion des Satzes (Übung 7):

Korollar 0.3.5. *Aus $\delta(G) \geq 3$ folgt $g(G) < 2 \log |G|$.*

[1.3.1]

Beweis. Ist $g := g(G)$ gerade, so gilt

$$n_0(3, g) = 2 \frac{2^{g/2} - 1}{2 - 1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2};$$

ist g ungerade, so ist

$$n_0(3, g) = 1 + 3 \frac{2^{(g-1)/2} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Wegen $|G| \geq n_0(3, g)$ folgt die Behauptung. \square

Ein *Kantenzug* (der Länge k) in einem Graphen G ist eine nicht leere Folge $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$ von abwechselnd Ecken und Kanten aus G mit $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ für alle $i < k$. Ist $v_0 = v_k$, so heißt der Kantenzug *geschlossen*. Ein Kantenzug definiert auf natürliche Weise einen Weg in G , wenn seine Ecken v_i paarweise verschieden sind. Allgemein enthält⁴ jeder Kantenzug zwischen zwei Ecken einen Weg zwischen diesen Ecken (Beweis?).

Kantenzug

0.4 Zusammenhang

zusammenhängend

Ein nicht leerer Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er für je zwei seiner Ecken x, y einen x - y -Weg enthält. Ist $U \subseteq V(G)$ und $G[U]$ zusammenhängend, so nennen wir U *zusammenhängend in G* .

[0.5.2]

Proposition 0.4.1. Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen G besitzt stets eine Aufzählung (v_1, \dots, v_n) mit der Eigenschaft, dass $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$ für jedes i zusammenhängend ist.

Beweis. Wähle v_1 beliebig. Es seien nun v_1, \dots, v_i bereits gewählt und $i < |G|$. Wähle eine Ecke $v \in G - G_i$ beliebig. Da G zusammenhängend ist, enthält G einen v - v_1 -Weg P . Wähle als v_{i+1} die letzte Ecke von P in $G - G_i$; dann hat v_{i+1} einen Nachbarn in G_i . Dass jedes G_i zusammenhängend ist, folgt hieraus mit Induktion nach i . \square

Komponente

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G sind seine *Komponenten*. Sie sind offensichtlich Untergraphen, und ihre Eckenmengen partitionieren V . Da zusammenhängende Graphen nicht leer sind, hat der leere Graph (aber nur dieser) keine Komponenten.

Gerüst

Ein minimaler aufspannender Teilgraph von G , dessen Durchschnitt mit jeder Komponente von G zusammenhängend ist, heißt *Gerüst* von G .

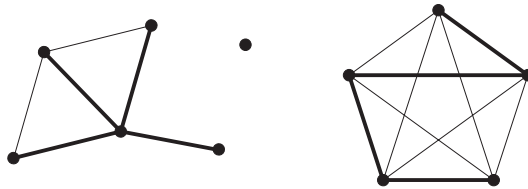


Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst
 $(K^1 * K^4) \cup K^1 \cup P^4$

trennt

Trenner

Sind $A, B \subseteq V$ und $X \subseteq V \cup E$, und enthält jeder A - B -Weg in G eine Ecke oder Kante aus X , so *trennt* X die Mengen A und B in G und ist ein A - B -*Trenner*; insbesondere gilt dann $A \cap B \subseteq X$. Allgemeiner *trennt* X den Graphen G , wenn X in G zwei Ecken aus $G - X$ trennt.

Artikulation

Brücke

Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt *Artikulation*. Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

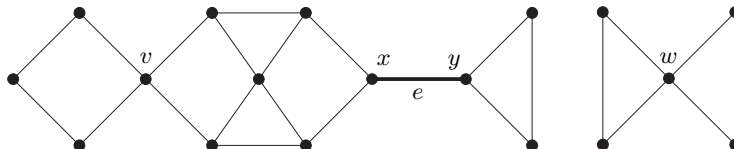


Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen v, w, x, y und Brücke $e = xy$

Teilung

Das ungeordnete Paar $\{A, B\}$ heißt *Teilung* von G , wenn $A \cup B = V$ ist und G keine Kante zwischen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ hat. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage, dass A von B durch $A \cap B$ getrennt wird. Wenn weder $A \setminus B$ noch $B \setminus A$ leer ist, heißt die Teilung *echt*. Die Zahl $|A \cap B|$ ist die *Ordnung* der Teilung $\{A, B\}$.

⁴ Für Graphen definierte Bezeichnungen verwenden wir informell gelegentlich auch für Kantenzüge, wenn ihre Bedeutung offensichtlich ist.

k-
zusammen-
hängend

G heißt *k*-zusammenhängend (für $k \in \mathbb{N}$), wenn $|G| > k$ gilt und $G - X$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von G durch weniger als k andere Ecken getrennt werden.

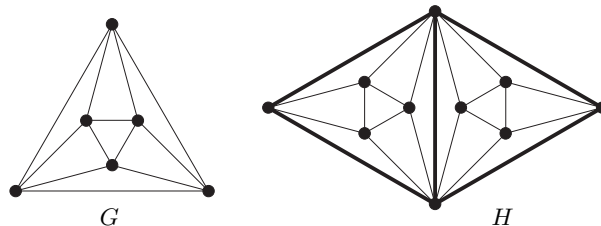
Jeder nicht leere Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl k , für die G *k*-zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang* $\kappa(G)$ von G . Insbesondere ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder ein K^1 ist, und es gilt $\kappa(K^n) = n - 1$ für alle $n \geq 1$.

Ist $|G| > 1$, so heißt G *l*-kantenzusammenhängend, wenn $G - F$ für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ der Mächtigkeit $< l$ zusammenhängend ist. Das größte $l \in \mathbb{N}$, für das G *l*-kantenzusammenhängend ist, ist der *Kantenzusammenhang* $\lambda(G)$ von G ; insbesondere ist $\lambda(G) = 0$, wenn G unzusammenhängend ist.

$\kappa(G)$

l-kanten-
zusammen-
hängend

$\lambda(G)$



Oktaeder

Abb. 0.4.3. Das Oktaeder G (links) mit $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$, und ein Graph H mit $\kappa(H) = 2$ und $\lambda(H) = 4$

Proposition 0.4.2. *Ist $|G| \geq 2$, so gilt $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Beweis. Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der Tatsache, dass die mit einer festen Ecke inzidenten Kanten stets G trennen. Zum Beweis der ersten sei F eine Menge von $\lambda(G)$ Kanten, für die $G - F$ unzusammenhängend ist; F existiert nach Definition von λ und ist ein minimaler Kantentrenner in G . Wir zeigen $\kappa(G) \leq |F|$.

Nehmen wir zuerst an, G habe eine Ecke v , die mit keiner Kante aus F inzidiert. Es sei C die v enthaltende Komponente von $G - F$. Die mit Kanten aus F inzidenten Ecken von C trennen dann v von $G - C$. Da F wegen seiner Minimalität keine Kante mit mehr als einer Ecke in C enthält, gibt es höchstens $|F|$ solche Ecken; damit ist $\kappa(G) \leq |F|$ wie gewünscht.

Betrachten wir nun den Fall, dass jede Ecke von G mit einer Kante aus F inzidiert. Es sei v eine beliebige Ecke, und C die v enthaltende Komponente von $G - F$. Die Nachbarn w von v mit $vw \notin F$ liegen dann ebenfalls in C . Da sie alle nach Annahme mit (paarweise verschiedenen) Kanten aus F inzidieren, folgt $d_G(v) \leq |F|$. Nun trennt aber $N_G(v)$ die Ecke v von allen anderen Ecken in G , was $\kappa(G) \leq d(v) \leq |F|$ impliziert – es sei denn, es gibt keine solchen anderen Ecken, d.h. es ist $\{v\} \cup N(v) = V$. Da v beliebig gewählt war, dürfen wir dann aber annehmen, dass G vollständig ist. Doch dann gilt $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$ nach Definition. \square

Hoher Zusammenhang setzt also hohen Minimalgrad voraus. Umgekehrt sichert hoher Minimalgrad keinen hohen Zusammenhang, ja nicht einmal hohen Kantenzusammenhang. (Beispiele?)

Bereits aus hohem Durchschnittsgrad folgt aber die Existenz eines Teilgraphen hohen Zusammenhangs. Um einen *k*-zusammenhängenden Teilgraphen zu erzwingen, reicht ein Durchschnittsgrad von $4k$:

Satz 0.4.3. (Mader 1972)

Jeder Graph G mit $d(G) \geq 4k$, wobei $0 \neq k \in \mathbb{N}$ sei, hat einen $(k + 1)$ -zusammenhängenden Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$.

[6.2.1]
[9.2.3]

Beweis. Es sei $\gamma := \varepsilon(G) (\geq 2k)$. Wir betrachten die Teilgraphen $G' \subseteq G$ mit

(0.2.2)
(0.3.1)
 γ

$$|G'| \geq 2k \quad \text{und} \quad ||G'| > \gamma (|G'| - k). \quad (*)$$

Solche Graphen G' existieren, da G selbst einer ist; wir wählen ein solches G' minimaler Ordnung und nennen es H .

H

Kein Graph G' , für den (*) gilt, kann die Ordnung genau $2k$ haben, denn dies würde bedeuten, dass $\|G'\| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2}$ gilt. Die Minimalität von H impliziert daher $\delta(H) > \gamma$: andernfalls könnten wir eine Ecke des Grades höchstens γ löschen und erhielten einen Graphen $G' \subsetneq H$, der immer noch (*) erfüllt. Insbesondere ist $|H| \geq \gamma$. Teilen wir die Ungleichung $\|H\| > \gamma |H| - \gamma k$ aus (*) durch $|H|$, so erhalten wir wie gewünscht $\varepsilon(H) > \gamma - k$.

Es bleibt $\kappa(H) \geq k + 1$ zu zeigen. Anderenfalls hat H eine echte Teilung $\{U_1, U_2\}$ der Ordnung höchstens k ; wir setzen $H[U_i] =: H_i$. Da jede Ecke $v \in U_1 \setminus U_2$ all ihre $d(v) \geq \delta(H) > \gamma$ Nachbarn aus H in H_1 hat, erhalten wir $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$. Analog zeigt man $|H_2| \geq 2k$. Da aufgrund der Minimalität von H weder H_1 noch H_2 die Bedingung (*) erfüllt, ist überdies

$$\|H_i\| \leq \gamma (|H_i| - k)$$

für $i = 1, 2$. Aber dann gilt

$$\begin{aligned} \|H\| &\leq \|H_1\| + \|H_2\| \\ &\leq \gamma (|H_1| + |H_2| - 2k) \\ &\leq \gamma (|H| - k) \quad (\text{da } |H_1 \cap H_2| \leq k \text{ ist}), \end{aligned}$$

was der Bedingung (*) für H widerspricht. \square

0.5 Bäume und Wälder

Wald
Baum

Blatt

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. (Ein Wald ist somit ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.) Die Ecken vom Grad 1 eines Baumes sind seine *Blätter*.⁵ Jeder nicht triviale Baum hat ein Blatt; betrachte etwa die Endecken eines längsten Weges. Dies kann bei Induktionsbeweisen für Bäume nützlich sein: entfernt man von einem Baum ein Blatt, so ist der Rest immer noch ein Baum.

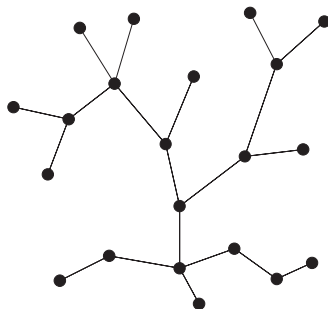


Abb. 0.5.1. Ein Baum

[0.6.1]
[0.9.5]
[3.2.9]

Satz 0.5.1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T :

- (i) T ist ein Baum;
- (ii) Zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg;
- (iii) T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend;
- (iv) T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken x, y enthält $T + xy$ einen Kreis. \square

xTy

Der Beweis von Satz 0.5.1 ist ganz einfach und eine gute Übung zum Umgang mit den in ihm auftretenden Begriffen. Für zwei Ecken $x, y \in T$ bezeichnen wir (die Notation aus Abschnitt 0.3 erweiternd) mit xTy den nach Satz 0.5.1 (ii) bestimmten x - y -Weg in T .

⁵ Ausnahme: haben wir eine Ecke des Baumes als *Wurzel* gewählt (s.u.), so gilt sie auch dann nicht als Blatt, wenn sie den Grad 1 hat.

Korollar 0.5.2. Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung (v_1, \dots, v_n) mit der Eigenschaft, dass v_i für jedes $i \geq 2$ genau einen Nachbarn in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ hat.

(0.4.1) *Beweis.* Verwende die Eckenaufzählung aus Proposition 0.4.1. □

Korollar 0.5.3. Ein zusammenhängender Graph mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n - 1$ Kanten hat.

[0.9.5]
[1.4.1]
[1.4.4]
[3.2.9]

Beweis. Dass jeder Baum mit n Ecken $n - 1$ Kanten hat, folgt induktiv aus Korollar 0.5.2. Ist umgekehrt G ein beliebiger zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten, so betrachten wir ein Gerüst G' von G . Nach Satz 0.5.1 ist G' ein Baum und hat damit bereits selbst $n - 1$ Kanten. Es folgt $G = G'$, d.h. auch G ist ein Baum. □

Korollar 0.5.4. Ist T ein Baum und G ein Graph mit $\delta(G) \geq |T| - 1$, so gilt $T \subseteq G$, d.h. G hat einen zu T isomorphen Teilgraphen.

[7.2.1]
[7.2.3]

Beweis. Finde eine Kopie von T in G induktiv entlang einer Eckenaufzählung von T aus Korollar 0.5.2. □

Ein Baum $T \subseteq G$ heißt *Spannbaum* von G , wenn er ganz G aufspannt, d.h. wenn $V(T) = V(G)$ ist. Ein Spannbaum ist nach Satz 0.5.1 also nichts anderes als ein Gerüst eines zusammenhängenden Graphen; insbesondere besitzt jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum. Ist T ein Spannbaum von G , so nennt man die Kanten aus $E(G) \setminus E(T)$ die *Sehnen* von T in G .

Spannbaum

Gelegentlich ist es hilfreich, eine spezielle Ecke eines Baumes besonders auszuzeichnen, indem man sie seine *Wurzel* nennt. Einen Baum mit fest gewählter Wurzel nennt man einen *Wurzelbaum*. Die Wahl einer Wurzel r aus der Eckenmenge eines Baumes T definiert eine Ordnungsrelation auf $V(T)$: wir schreiben $x \leq y$, wenn $x \in rTy$ gilt. Wir denken uns diese zu T und r gehörige *Baumordnung* vertikal: ist $x < y$, so sagen wir, dass x *unter* y in T liegt, wir nennen

Wurzel

Baumordnung

oben/unten

$$[y] := \{x \mid x \leq y\} \quad \text{und} \quad [x] := \{y \mid y \geq x\} \quad [t], [t]$$

den *Abschluss* von y nach unten bzw. von x nach oben, und so weiter. Die Wurzel r des Baumes T ist dann seine kleinste Ecke, die Blätter sind die maximalen Ecken, die Endecken einer Kante sind stets vergleichbar, und jede Eckenmenge der Form $\{x \mid x \leq y\}$ (wobei y irgendeine feste Ecke ist) ist eine *Kette*, d.h. eine Menge paarweise vergleichbarer Elemente. (Beweise?) Die Ecken mit Abstand k von r haben die *Höhe* k und bilden die k te *Schicht* von T .

Abschluss

Blatt

Höhe
Schicht

Ein Wurzelbaum T in einem Graphen G heißt *normal* in G , wenn die Endecken eines jeden T -Weges in G in der Baumordnung von T vergleichbar sind. Ist T ein Spannbaum von G , so heißt dies nichts weiter, als dass zwei Ecken von T stets vergleichbar sein müssen, wenn sie in G benachbart sind (Abb. 0.5.2).

normaler Baum

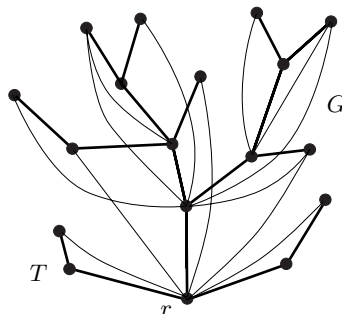


Abb. 0.5.2. Ein normaler Spannbaum mit Wurzel r

Ein normaler Baum T in G kann ein mächtiges Hilfsmittel sein, um die Trennungseigenschaften von G zu beschreiben:

Lemma 0.5.5. Sei T ein normaler Baum in G .

- (i) Je zwei Ecken $x, y \in T$ werden in G durch die Menge $[x] \cap [y]$ getrennt.
- (ii) Ist $S \subseteq V(T) = V(G)$ nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von $G - S$ von den Mengen $[x]$ aufgespannt, für die x in $T - S$ minimal ist.

Beweis. (i) Es sei P ein beliebiger x - y -Weg in G ; wir zeigen, dass P die Menge $[x] \cap [y]$ trifft. Dazu betrachten wir eine minimale Folge t_1, \dots, t_n in $V(P \cap T)$ mit der Eigenschaft, dass $t_1 = x$ und $t_n = y$ ist und t_i und t_{i+1} in der Baumordnung von T für alle i vergleichbar sind. (Solch eine Folge existiert: die Folge aller Ecken von P in $V(T)$ etwa erfüllt diese Bedingungen, da T normal ist und jedes Segment $t_i P t_{i+1}$ entweder eine Kante von T oder ein T -Weg ist.) In unserer minimalen Folge kann es nun nicht passieren, dass $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ gilt für irgendein i : dann wären t_{i-1} und t_{i+1} vergleichbar, und durch Löschen von t_i erhielten wir eine kleinere solche Folge. Es gibt also ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y.$$

Da t_k in $[x] \cap [y] \cap V(P)$ liegt, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachten wir eine Komponente C von $G - S$, und in $V(C)$ ein minimales Element x . Dann gibt es in $V(C)$ kein weiteres minimales Element x' : da x und x' unvergleichbar wären, enthielte nach (i) jeder x - x' -Weg in C eine Ecke unter beiden, im Widerspruch zu ihrer Minimalität in $V(C)$. Da jede Ecke von C über irgendeinem minimalen Element von $V(C)$ liegt, liegt sie damit über x . Umgekehrt liegt aber auch jede Ecke $y \in [x]$ in C : da S nach unten abgeschlossen ist, liegt der aufsteigende Weg xTy ja ganz in $T - S$. Somit gilt $V(C) = [x]$.

Wir zeigen nun, dass x minimal nicht nur in $V(C)$ sondern in ganz $T - S$ ist. Die Ecken unterhalb von x bilden eine Kette $[t]$ in T . Da t zu x benachbart ist, folgt aus der Maximalität von C als Komponente von $G - S$, dass t in S liegt. Da S nach unten abgeschlossen ist, gilt dann auch $[t] \subseteq S$. Damit haben wir bewiesen, dass jede Komponente von $G - S$ die behauptete Form hat.

Ist umgekehrt x irgendein minimales Element von $T - S$, so ist x natürlich auch minimal in der Komponente C von $G - S$, die es enthält. Wie oben folgt $C = [x]$. \square

Normale Spann bäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt, weil man sie durch ein bestimmtes Suchverfahren auf Graphen definieren und konstruieren kann (Übung 22). Ihre Existenz kann man mit einem kleinen Trick leicht durch Induktion zeigen (Übung 21), doch ist der folgende konstruktive Beweis erheller.

[5.5.3]

Proposition 0.5.6. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgegebener Ecke als Wurzel.

Beweis. Es sei G ein zusammenhängender Graph, $r \in G$ eine beliebige Ecke, und $T \subseteq G$ ein maximaler in G normaler Baum mit Wurzel r . Wir zeigen, dass T alle Ecken von G enthält.

Wenn nicht, so betrachten wir eine Komponente C von $G - T$. Da T in G normal ist, bildet $N(C)$ eine Kette in T ; deren größtes Element heiße x . Wir erweitern nun T zu einem Baum T' , indem wir einen Nachbarn $y \in C$ von x hinzufügen und mit x verbinden. Die von T' auf $V(T)$ induzierte Baumordnung stimmt dann mit der Baumordnung von T selbst überein. Um einen Widerspruch zur Maximalwahl von T herzuleiten, zeigen wir jetzt, dass auch T' in G normal ist.

Sei dazu P ein T' -Weg in G . Liegen beide Enden von P in T , so sind sie in der Baumordnung von T (und somit in der von T') vergleichbar; P ist ja dann auch ein T -Weg, und T ist nach Annahme normal in G . Liegen nicht beide Enden von P in T , so ist y eine davon, und bis auf seine andere Endecke z liegt P ganz in C . Die Ecke z liegt dann in $N(C)$, und es gilt $z \leq x$ nach Wahl von x . Für unseren Nachweis der Vergleichbarkeit von y und z reicht es somit zu zeigen, dass $x < y$ ist. Nach Definition der Baumordnung von T' ist dies gleichbedeutend mit $x \in rT'y$, was schon deshalb gilt, weil x der einzige Nachbar von y in T' ist. \square

0.6 Bipartite Graphen

Es sei $r \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *r-partit*, wenn eine Partition von V in r Teile existiert, so dass die Enden einer jeden Kante von G in verschiedenen Partitionsklassen liegen: Ecken aus der gleichen Klasse dürfen nicht benachbart sein. Ein 2-partiter Graph heißt auch *bipartit* (oder *paar*).

r-partit

bipartit

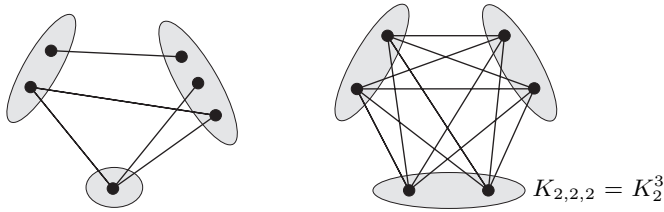


Abb. 0.6.1. Zwei 3-partite Graphen

Ist G ein r -partiter Graph, in dem je zwei Ecken aus verschiedenen Klassen benachbart sind, so heißt G *vollständig r-partit* (bzw. *vollständig bipartit*), oder allgemeiner *vollständig multipartit*. Sind n_1, \dots, n_r die Mächtigkeiten seiner r Partitionsklassen, so bezeichnen wir diesen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$ mit K_{n_1, \dots, n_r}^r . Ist $n_1 = \dots = n_r = s$, so bezeichnen wir den Graphen auch mit K_s^r ; dies ist also der vollständig r -partite Graph, in dem jede Partitionsklasse genau s Ecken enthält.⁶ (Abb. 0.6.1 zeigt als Beispiel das Oktaeder K_2^3 ; vergleiche diese Darstellung mit der aus Abb. 0.4.3!) Graphen der Form $K_{1,n}$ nennt man *Sterne*; die Ecke der einelementigen Partitionsklasse dieses $K_{1,n}$ ist das *Zentrum* des Sterns.

vollständig multipartit

K_{n_1, \dots, n_r}^r
 K_s^r

Stern
Zentrum

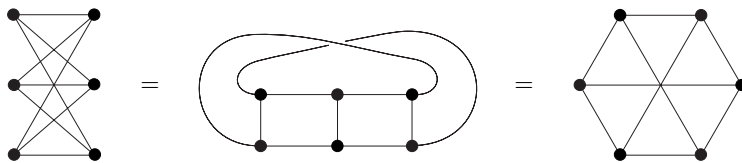


Abb. 0.6.2. Drei Darstellungen des bipartiten Graphen $K_{3,3} = K_3^2$

Offenbar kann ein bipartiter Graph keinen Kreis ungerader Länge enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert die bipartiten Graphen sogar:

Proposition 0.6.1. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

[0.9.4]
[4.3.1]
[5.4.2]

Beweis. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne Kreise ungerader Länge; wir zeigen, dass G bipartit ist. Da ein Graph bipartit ist, wenn all seine Komponenten es sind, dürfen wir G als zusammenhängend voraussetzen. Es sei $T \subseteq G$ ein Spannbaum, r dessen Wurzel, und \leq_T die entsprechende Baumordnung auf V . Für jedes $v \in V$ hat der eindeutig bestimmte Weg rTv gerade oder ungerade Länge; dies definiert eine Partition von V in zwei Teile. Wir zeigen, dass diese Partition G als bipartit erweist.

(0.5.1)

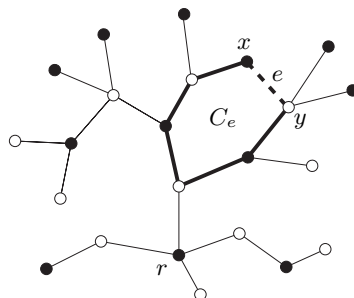


Abb. 0.6.3. Der Kreis C_e in $T + e$

⁶ Umgekehrt entsteht jeder K_s^r aus einem K^r durch Aufblähung von dessen Ecken zu unabhängigen s -Mengen; diese Beziehung soll in der Notation K_s^r anklagen.

Es sei $e = xy$ eine beliebige Kante von G . Ist $e \in T$, etwa mit $x <_T y$, so gilt $rTy = rTxy$, und x, y liegen in verschiedenen Partitionsklassen. Ist andererseits $e \notin T$, so ist $C_e := xTy + e$ ein Kreis (Abb. 0.6.3), und nach dem bereits behandelten Fall liegen die Ecken des Weges xTy abwechselnd in den beiden Partitionsklassen. Da C_e nach Annahme gerade Länge hat, liegen wiederum auch x, y in verschiedenen Klassen. \square

0.7 Minoren und Kontraktion

In Abschnitt 0.1 haben wir zwei grundlegende Relationen des Enthaltenseins zwischen Graphen kennengelernt: die Teilgraphen- und die Untergraphenrelation. In diesem Abschnitt lernen wir zwei weitere kennen: die topologische Minorenrelation und die (gewöhnliche) Minorenrelation. Sei X irgendein Graph, fest gewählt.

Unterteilung
 TX

Anschaulich entsteht eine *Unterteilung* von X durch das Einzeichnen neuer Ecken auf schon bestehenden Kanten. Etwas formaler: wir ersetzen Kanten von X durch (neue) Wege zwischen ihren Enden, wobei diese Wege keine inneren Ecken in $V(X)$ oder auf anderen neuen Wegen haben dürfen. Ist G eine Unterteilung von X , so sagen wir, G sei *ein* TX .⁷ Die Ecken aus X sind die *Verzweigungsecken dieses* TX , die inneren Ecken der neuen Wege seine *Unterteilungsecken*. Während Unterteilungsecken stets den Grad 2 haben, erben die Verzweigungsecken ihren Grad aus X .

Verzweigungs-
ecken

Unterteilungs-
ecken

topologischer
Minor

Enthält ein Graph Y einen TX als Teilgraphen, so ist X ein *topologischer Minor* von Y (Abb. 0.7.3).

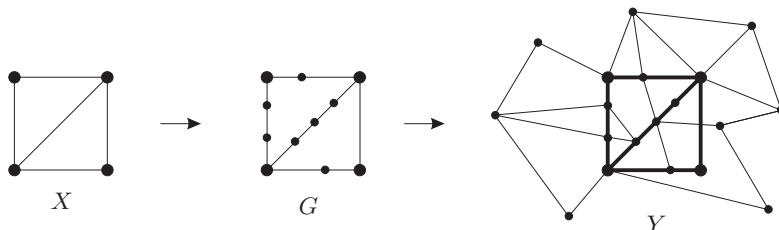


Abb. 0.7.3. Der Graph G ist ein TX , eine *Unterteilung* von X .
Wegen $G \subseteq Y$ ist X damit *topologischer Minor* von Y .

In ähnlicher Weise liefert die Ersetzung der Ecken x von X durch disjunkte zusammenhängende Graphen G_x , sowie der Kanten xy von X durch nicht leere Mengen von $G_x - G_y$ -Kanten, einen Graphen, den wir einen IX nennen.⁸ Formal: Ein Graph G ist *ein* IX , wenn seine Eckenmenge eine Partition $\{V_x \mid x \in V(X)\}$ in zusammenhängende Mengen V_x erlaubt, so dass verschiedene Ecken $x, y \in X$ genau dann in X benachbart sind, wenn G eine $V_x - V_y$ -Kante enthält. Die V_x sind die *Verzweigungsmengen des* IX . Umgekehrt sagen wir, X entstehe aus G durch *Kontraktion* der Teilgraphen G_x .

IX

Verzweigungs-
mengen

Kontraktion

Minor

\preceq

Enthält ein Graph Y einen IX als Teilgraphen, so ist X ein *Minor* von Y , und wir schreiben $X \preceq Y$ (Abb. 0.7.2). Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn es eine surjektive Abbildung φ von einer Teilmenge von $V(Y)$ auf $V(X)$ gibt, für die jedes Urbild $\varphi^{-1}(x)$ einer Ecke $x \in X$ in Y zusammenhängend ist und es für jede Kante $xx' \in X$ eine Kante in Y gibt zwischen den (Verzweigungs-) Mengen $\varphi^{-1}(x)$ und $\varphi^{-1}(x')$.

Da Verzweigungsmengen einelementig sein dürfen, ist jeder Teilgraph eines Graphen zugleich sein Minor. In unendlichen Graphen dürfen Verzweigungsmengen unendlich sein.

[10.4.1]

Proposition 0.7.3. *Die Minorenrelation \preceq und die topologische Minorenrelation sind Ordnungsrelationen auf der Klasse der endlichen Graphen, das heißt sie sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.* \square

⁷ „ T “ steht für „topologisch“. Obwohl formal TX eine ganze Klasse von Graphen ist, die Klasse aller Unterteilungen von X , verwenden wir den Ausdruck wie angedeutet für einzelne Elemente dieser Klasse.

⁸ „ I “ steht für „inflated“, also „aufgeblasen“. Wie zuvor ist IX eigentlich eine Klasse von Graphen, doch verwenden wir den Ausdruck wiederum für einzelne Elemente dieser Klasse, in der angedeuteten Sprechweise.

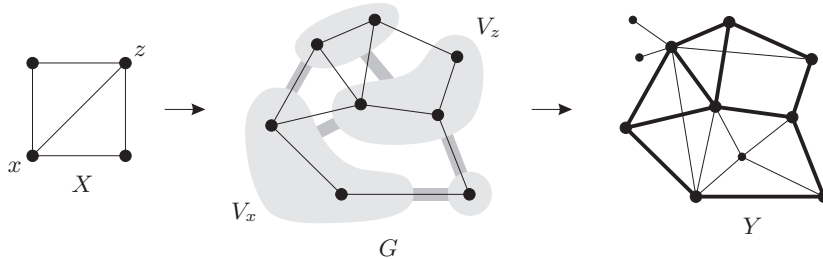


Abb. 0.7.2. Der Graph G ist ein IX , und G ist Teilgraph von Y .
Daher ist X ein *Minor* von Y .

G/U
 v_U

Kanten-
kontraktion

Ist G ein IX mit einer Verzweigungsmenge $U = V_x$, und besteht jede andere Verzweigungsmenge aus nur einer Ecke, so schreiben wir G/U für den Graphen X , und v_U für die Ecke $x \in X$ zu der U kontrahiert wurde; den Rest von X fassen wir als Untergraphen von G auf. Besteht U aus genau zwei Ecken, so bilden diese eine Kante $e = U$; wir sagen dann, $X = G/e$ entstehe aus G durch *Kontraktion der Kante e* (Abb. 0.7.1).

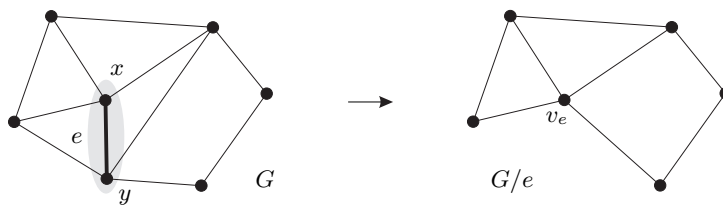


Abb. 0.7.1. Kontraktion der Kante $e = xy$

Proposition 0.7.1. G ist genau dann ein IX , wenn X aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen gewonnen werden kann, wenn also Graphen G_0, \dots, G_n und Kanten $e_i \in G_i$ existieren mit $G_0 = G$, $G_n \simeq X$, und $G_{i+1} = G_i/e_i$ für alle $i < n$.

Beweis mit Induktion nach $|G| - |X|$. □

Zwischen Minoren und topologischen Minoren gibt es die folgenden Beziehungen:

Proposition 0.7.2.

- (i) Jeder TX ist auch ein IX (Abb. 0.7.4); jeder topologische Minor eines Graphen ist somit auch sein (gewöhnlicher) Minor.
- (ii) Ist $\Delta(X) \leq 3$, so enthält jeder IX einen TX ; jeder Minor mit Maximalgrad ≤ 3 eines Graphen ist somit auch sein topologischer Minor. □

[3.4.2]
[6.3.1]

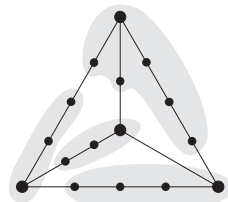


Abb. 0.7.4. Ein TK^4 aufgefasst als IK^4

Nachdem wir nun die vier wichtigsten Relationen zwischen Graphen kennengelernt haben, können wir einen davon abhängigen weiteren Begriff einführen: den der *Einbettung* eines Graphen G in einen anderen Graphen H . Grob gesprochen ist dies, wie auch sonst in der Mathematik, eine strukturerhaltende injektive Abbildung $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$. Wann jedoch die Struktur von G durch sein Bild in H als erhalten gilt, hängt von der Relation ab, die wir betrachten wollen. So nennen wir φ eine Einbettung von G in H „als Teilgraphen“, wenn φ die Benachbarkeit von Ecken erhält, d.h. wenn aus $uv \in E(G)$ stets $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ folgt und somit die Ecken in $\varphi(V(G))$ zusammen mit diesen Kanten $\varphi(u)\varphi(v)$ einen Teilgraphen von H bilden. Enthält φ auch die Nichtbenachbarkeit von Ecken in G , so bettet es G in H „als Untergraphen“ ein.

Einbettung

Analog können wir Einbettungen als Minor oder topologischen Minor definieren. Damit φ eine Einbettung von G in H als Minor definiert, verlangen wir, dass φ die Ecken von G nicht auf einzelne Ecken von H abbildet sondern auf disjunkte zusammenhängende Eckenmengen in H , und dass es in H zwischen zwei Mengen $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ stets eine Kante gibt, wenn uv Kante von G ist. Eine Einbettung von G in H als topologischer Minor bildet die Ecken von G auf Ecken von H ab, und zusätzlich die Kanten von G auf kreuzungsfreie Wege in H zwischen den ihren Ecken entsprechenden Ecken von H .

Je nach Bedarf kann man weitere Einbettungen definieren, etwa als aufspannenden Teilgraphen, als induzierten Minor usw.

0.8 Eulersche Graphen

Wer sich als Mathematiker einmal in der ehemals ostpreußischen Stadt Königsberg (und dazu im 18. Jahrhundert) findet, wird sich umgehend – so jedenfalls gebietet es eine durch den großen Mathematiker Leonhard Euler begründete Tradition – nach einer Möglichkeit erkundigen, die in Abb. 0.8.1 dargestellten Brücken über den Pregel in einem einzigen Rundgang jeweils genau einmal zu überschreiten.

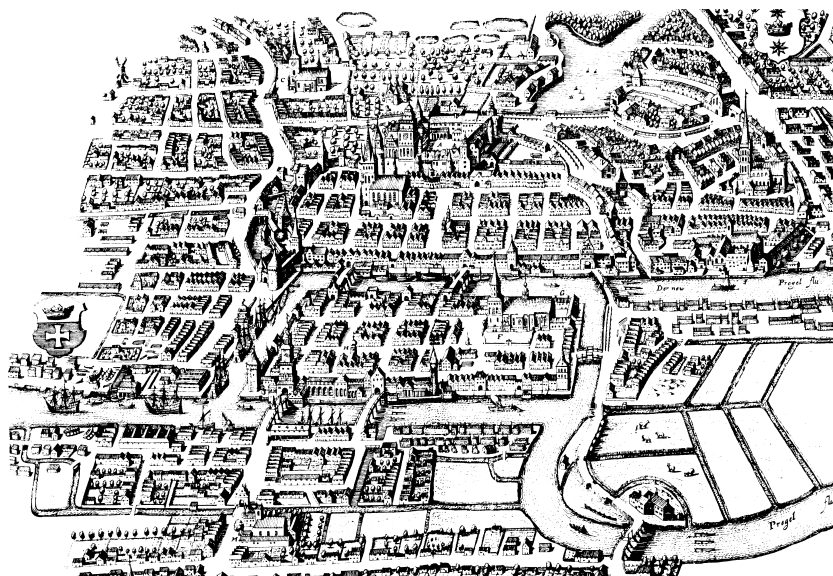


Abb. 0.8.1. Die Königsberger Brücken (anno 1736)

Hiervon inspiriert⁹ nennen wir einen geschlossenen Kantenzug in einem Graphen *eulersch*, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn er einen solchen Kantenzug enthält.

eulersch

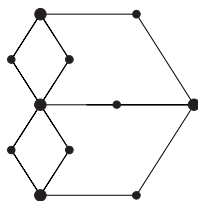


Abb. 0.8.2. Der Graph zum Brückenproblem

[1.1.5]
[8.3.1]

Satz 0.8.1. (Euler 1736)

Ein zusammenhängender Graph ist genau dann *eulersch*, wenn jede seiner Ecken *geraden Grad* hat.

⁹ Wer diese Inspiration auch nach Betrachtung von Abb. 0.8.2 als zu sprunghaft empfindet, mag in dem *Multigraphen* aus Abb. 0.10.1 seine Zuflucht finden.

Beweis. Die Gradbedingung ist offensichtlich notwendig: tritt eine Ecke k -mal in einem eulerschen Kantenzug auf (bzw. $(k+1)$ -mal, wenn sie erste und letzte Ecke des Kantenzugs ist), so ist ihr Grad $2k$.

Umgekehrt sei nun G ein zusammenhängender Graph, in dem alle Ecken gerade sind. Es sei

$$W = v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$$

ein Kantenzug maximaler Länge in G , der keine Kante mehrfach enthält. Da wir W nicht mehr verlängern können, liegen alle mit v_ℓ inzidenten Kanten auf W . Da nach Annahme die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt $v_\ell = v_0$ (warum?), d.h. der Kantenzug W ist geschlossen.

Ist W nicht eulersch in G , so hat G eine nicht auf W liegende Kante e , die mit einer Ecke von W inzidiert, etwa $e = uv_i$. (Hier geht ein, dass G zusammenhängend ist; siehe den Beweis von Proposition 0.4.1.) Der Kantenzug

$$uev_i e_i \dots e_{\ell-1} v_\ell e_0 \dots e_{i-1} v_i$$

ist dann länger als W , mit Widerspruch. \square

0.9 Algebraisches

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Ecken und m Kanten, etwa $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Mit $\mathcal{V}(G)$ bezeichnen wir den \mathbb{F}_2 -Vektorraum aller Funktionen $V \rightarrow \mathbb{F}_2$; dabei bezeichnet \mathbb{F}_2 wie üblich den Körper $\{0, 1\}$. Wir nennen diesen Vektorraum den *Eckenraum* von G . Seine Elemente entsprechen in natürlicher Weise den Teilmengen von V : einer Eckenmenge $U \subseteq V$ entspricht die Indikatorfunktion $V \rightarrow \mathbb{F}_2$, die den Ecken aus U die Eins aus \mathbb{F}_2 zuordnet und allen anderen Ecken die Null. Im Folgenden unterscheiden wir begrifflich nicht mehr zwischen den Eckenmengen $U \subseteq V$ und ihren Indikatorfunktionen, sondern fassen die Eckenmengen selbst als die Elemente von $\mathcal{V}(G)$ auf. Für $U, U' \subseteq V$ ist dann $U+U'$ gerade die symmetrische Differenz der Mengen U und U' (warum?), und es gilt $U = -U$ für alle $U \subseteq V$. Das neutrale Element von $\mathcal{V}(G)$ ist die leere Eckenmenge \emptyset , und $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{V}(G)$, seine *Standardbasis*. Insbesondere ist also $\dim \mathcal{V}(G) = n$.

Analog zum Eckenraum bilden die Funktionen $E \rightarrow \mathbb{F}_2$ den *Kantenraum* $\mathcal{E}(G)$ von G : seine Elemente entsprechen den Teilmengen von E , seine Vektoraddition ist die symmetrischen Differenz dieser Teilmengen, und $\emptyset \subseteq E$ ist das neutrale Element. Wiederum gilt $F = -F$ für alle $F \subseteq E$, und $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ ist die *Standardbasis* von $\mathcal{E}(G)$; insbesondere ist $\dim \mathcal{E}(G) = m$. Fassen wir $F, F' \in \mathcal{E}(G)$ als Abbildungen $E \rightarrow \mathbb{Z}_2$ auf, so können wir

$$\langle F, F' \rangle := \sum_{e \in E} F(e)F'(e) \in \mathbb{F}_2$$

definieren. Dies ist genau dann null, wenn F und F' eine gerade Anzahl von Kanten gemeinsam haben; insbesondere kann also $\langle F, F \rangle = 0$ auch für $F \neq \emptyset$ auftreten. Für einen Unterraum \mathcal{F} von $\mathcal{E}(G)$ schreiben wir wie gewohnt

$$\mathcal{F}^\perp := \{ D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{F} \};$$

dies ist dann ebenfalls ein Unterraum von $\mathcal{E}(G)$ (der Lösungsraum eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems – welches?), und es gilt

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m.$$

Mit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ bezeichnen wir den Unterraum von $\mathcal{E}(G)$, der von den Kreisen in G (genauer:¹⁰ von ihren Kantenmengen) aufgespannt wird.

¹⁰ Der Einfachheit halber unterscheiden wir nicht immer streng zwischen den Kantenmengen $F \in \mathcal{E}(G)$ und den dazu gehörigen Teilgraphen (V, F) von G . Insbesondere unterscheiden wir meist nicht zwischen Kreisen und ihren Kantenmengen.

$G = (V, E)$

Eckenraum
 $\mathcal{V}(G)$

+

Kantenraum
 $\mathcal{E}(G)$

Standardbasis

$\langle F, F' \rangle$

\mathcal{F}^\perp

$\mathcal{C}(G)$