Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 9

1. (a) Sei M ein zahmer Matroid. Beweise, dass M genau dann binär ist, wenn für jede Basis B und jeden Kreis C von M die Gleichung $C = \triangle_{e \in C \setminus B} C_e^B$ gilt.

   (b)** Sei M ein zahmer Matroid mit einer Basis B, sodass für jeden Kreis C die Gleichung $C = \triangle_{e \in C \setminus B} C_e^B$ gilt. Muss M binär sein?

2. Sei $\mathcal{I}$ die Menge von Kantenmengen des Bean-Graphen, die keinen algebraischen Kreis enthalten. Beweise, dass $\mathcal{I}$ die Axiome (I1), (I2) und (IM) erfüllt, aber dass es (I3) nicht erfüllt.

3. Sei E die Menge $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Sei $\phi\colon E \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ die Abbildung, die wie folgt definiert ist: $\phi((n, 0))(i) := i^n$ und $\phi((n, 1))(i) := -1$ für $i = n$ und 0 sonst. Beweise, dass $\mathbb{N} \times \{0\}$ unabhängig ist in dem dünnen-Summen-System über ϕ. Beweise, dass dieses System (I1), (I2) und (I3) aber nicht (IM) erfüllt.

4.* Sei G ein Graph mit nur einem Ende und sei M ein zahmer Matroid auf $E(G)$, sodass jeder endliche Kreis von G ein Kreis von M ist und jeder Kreis von M ein Kreis oder Doppelstrahl in G ist. Beweise, dass M der endliche-Kreis Matroid oder der topologische-Kreis Matroid von G ist.

5.** Gibt es einen wilden binären Matroiden?

Hinweise

Für Übung 4: benutze $(C3)_{\leq}$.