Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 3

1. Sei $(M_k | k \in K)$ eine Familie von Matroiden auf der endlichen Menge E. Beweise, dass es einen Matroiden $\bigvee_{k \in K} M_i$ gibt, dessen unabhängigen Mengen genau die Mengen der Form $\bigcup_{k \in K} I_k$ sind, wobei jedes I_k in M_k unabhängig ist. Was ist die Rangfunktion von $\bigvee_{k \in K} M_k$?
2. Folgere den Baumpackungssatz daraus.
3. Folgere den Baumüberdeckungssatz daraus.
4. Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge E, die (C3) erfüllt. Beweise, dass auch $\mathcal{C}^*$ (C3) erfüllt. Beweise auch, dass $\mathcal{C}^{**} = \langle \mathcal{C} \rangle$.

Zur Erinnerung: Sätze aus der Graphentheorie

Theorem 0.1 (Baumpackungssatz: Nash-Williams, Tutte). *Ein endlicher Graph enthält genau dann k kantendisjunkte Spannbäume, wenn er zu jeder Partition P seiner Eckenmenge mindestens $k(|P| - 1)$ Partitionskanten enthält.*

Eine *Partitionskante* ist eine Kante, deren Endecken in verschiedenen Partitionsmengen sind.

Theorem 0.2 (Baumüberdeckungssatz: Nash-Williams). *Ein endlicher Graph G hat genau dann eine Kantenüberdeckung durch k Bäume, wenn $e(U) \leq k(|U|-1)$ gilt für jedes nicht leere $U \subseteq V(G)$*

Hier bedeutet $e(U)$ die Anzahl von Kanten mit beiden Endecken in U.