Matroidentheorie: Übungsblatt 1

1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (V, I) \text{ ist ein Wald}\}$. Beweisen Sie, dass $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

2. Für welche Zahlen m, n ist der uniforme Matroid $U_{m,n}$ graphisch? Für welche Zahlen ist er über den Körper $\mathbb{R}$ darstellbar?

3. Sei M ein Matroid auf E. Für $X \subseteq E$ ist der *Abschluss* $\mathrm{Cl}_M(X)$ von X die Menge

$$\{x \in E | r_M(X \cup x) = r_M(X)\}$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Cl}_M : \mathcal{P}E \to \mathcal{P}E$ folgende Eigenschaften hat:

(CL1) Für $X \subseteq E$ gilt $X \subseteq \mathrm{Cl}_M(X)$

(CL2) Für $X \subseteq Y \subseteq E$ gilt $\mathrm{Cl}_M(X) \subseteq \mathrm{Cl}_M(Y)$

(CL3) Für $X \subseteq E$ gilt $\mathrm{Cl}_M(\mathrm{Cl}_M(X)) = \mathrm{Cl}_M(X)$

(CL4) Für $X \subseteq E$, $x \in E$ und $y \in \mathrm{Cl}_M(X \cup x) - \mathrm{Cl}_M(X)$ gilt $x \in \mathrm{Cl}_M(X \cup y)$