Invariante Mannigfaltigkeiten und Blätterungen
im Zusammenhang mit der globalen Dynamik
von partiellen Differentialgleichungen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Doris Bohnet

angefertigt am
Department Mathematik
der
Universität Hamburg
unter der Anleitung von Prof. Roland Gunesch

Wintersemester 07/08

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieser Arbeit liegt die Fragestellung zugrunde, ob es möglich ist, Blätterungen im Zusammenhang von partiellen Differentialgleichungen zu beschreiben und die Theorie der Blätterungen für das Verständnis der qualitativen Dynamik der partiellen Differentialgleichungen auszunutzen.
Der Ausgangspunkt für diese Arbeit war der Vortrag von Dr. Andrzej Biś über die Dynamik von Blätterungen im Rahmen des Kolloquiums „Angewandte Mathematik“ der Universität Hamburg, in dem diese Frage in den Raum gestellt wurde.

Abwegig ist diese Verbindung zwischen Blätterungen und der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen historisch gesehen nicht; vielmehr ist die Theorie der Blätterungen aus der geometrischen Theorie der dynamischen Systeme entstanden. Ihr Ursprung war vermutlich die Frage von Heinz Hopf (1935) nach der Existenz von integrablen, zweidimensionalen Feldern auf der dreidimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^3$. Eine äquivalente Frage ist, ob es eine zweidimensionale Blätterung auf der dreidimensionalen Sphäre gibt. Die Antwort erbrachte der französische Mathematiker Georges Reeb, der zeigte, daß alle Sphären ungerader Dimension eine Blätterung der Kodimension eins besitzen. Reeb prägte in den 50er Jahren den Begriff der Blätterung.

Die Einarbeitung in das Thema der Blätterungen und in die Dynamik von partiellen Differentialgleichungen legte nahe, nach Blätterungen aus invarianten Mannigfaltigkeiten zu suchen. Denn bei Anosov-Diffeomorphismen auf endlichdimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten existieren zwei zueinander transversale Blätterungen aus stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.[1] Um diese Idee überhaupt für unendlichdimensionale Systeme formulieren zu können, beschränkt sich diese Arbeit auf eine bestimmte Klasse von partiellen Differentialgleichungen, die Evolutionsgleichungen, die einen Lösungshalbfluß besitzen. Durch diesen Lösungshalbfluß läßt sich ein unendlichdimensionales dynamisches System definieren.
Auf der anderen Seite führte die Beschäftigung mit der globalen Dynamik von partiellen Differentialgleichungen zu globalen Attraktoren und insbesondere zu Attraktoren von Gradientensystemen. Denn Andrzej Biś hatte auf Nachfrage als möglicherweise hilfreiche Literatur den Aufsatz von A.V. Babin über globale Attraktoren „Global Attractors in PDE“([Bab06]) vorgeschlagen. Doch zeigte sich, daß gerade die generische Endlichkeit der Fixpunkte bei Gradientensystemen die Existenz von Blätterungen des Attraktors verhindert. Die Attraktoren liegen aber für bestimmte Systeme in Inertialmannigfaltigkeiten, d.h. in endlichdimensionalen, invarianten, regulären Mannigfaltigkeiten. Aufgrund der normalen Hyperbolizität von Inertialmannigfaltigkeiten lassen sich in ihrem Zusammenhang

[1] Als Anhaltspunkt diente das Buch „Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity“([Pes04]) von Yakov Pesin.

Blätterungen konstruieren. In diesem Zusammenhang tauchte die Frage auf, ob sich der Begriff der partiellen Hyperbolizität, auf kompakten, glatten Mannigfaltigkeiten definiert, auf endlichdimensionale, vollständige Mannigfaltigkeiten, beispielsweise auf die Inertialmannigfaltigkeiten, in Banachräumen übertragen läßt.

Inhaltlich gliedert sich die Arbeit deswegen wie folgt: Nach der Darstellung der nötigen mathematischen Grundlagen im *ersten Kapitel* behandelt das *zweite Kapitel* die Existenzvoraussetzungen für invariante Mannigfaltigkeiten von Halbgruppen in Banachräumen. Das *dritte Kapitel* wendet sich den globalen Attraktoren zu. Ein globaler Attraktor ist eine kompakte, invariante Menge, von der alle Lösungen angezogen werden. Die Beschreibung von Blätterungen auf Attraktoren ist aber nur, wenn überhaupt, lokal möglich. Deshalb befaßt sich das letzte *vierte Kapitel* mit den Inertialmannigfaltigkeiten, die alle Orbits exponentiell anziehen. Es lassen sich Blätterungen transversal zur und auf der Inertialmannigfaltigkeit beschreiben. Hauptgrund hierfür ist die normale Hyperbolizität von Inertialmannigfaltigkeiten, die wiederum den Bogen zu partiell hyperbolischen Diffeomorphismen schlägt. So ergeben sich vielleicht Möglichkeiten, sowohl die Existenz von Blätterungen als auch die Theorie der partiellen Hyperbolizität für das Verständnis der globalen Dynamik von partiellen Differentialgleichungen fruchtbar zu machen. Deswegen werden im *Anhang* kurz die grundlegenden Ansätze von Blätterungen bei partiell hyperbolischen Diffeomorphismen erwähnt.

Danksagung: Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Gunesch für die Unterstützung und Ermunterung während der Ausarbeitung der Diplomarbeit sowie die Möglichkeit, Teile der Arbeit im Rahmen des Seminars „Dynamische Systeme“und der AG „Dynamische Systeme“ vorzustellen. Auch bei Herrn Prof. Lauterbach möchte ich mich für hilfreiche Anmerkungen zu meiner Arbeit bedanken, sowie für wichtige Literaturhinweise.
Weiter bedanke ich mich für das Korrekturlesen von Philip Kaltner, Jeremias Lauterbach, Dr. Ilja Bohnet und meinen Eltern Dres. Gisela und Heiko Plate.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Blätterungen

Die vorliegende Arbeit ist durch die Idee motiviert, Begriffe aus der Theorie der Blätterungen auf die Dynamik von partiellen Differentialgleichungen anzuwenden. Deshalb an dieser Stelle nun einige einführende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Blätterungen, die für das Verständnis der folgenden Arbeit unumgänglich sind:

Eine Mannigfaltigkeit wird über Karten definiert, die die Mannigfaltigkeit lokal homöomorph auf offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ abbilden. Läßt sie die Existenz besonderer Karten zu, die lokal eine Produktstruktur auf der Mannigfaltigkeit induzieren, nämlich Blätterungskarten, dann besitzt die Mannigfaltigkeit eine Blätterung:

Definition 1.1. [CC00, S.19] Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine **Blätterungskarte** auf M der Kodimension q ist ein Paar (U, ϕ), wobei $U \subset M$ offen und

$$\phi : U \to B_{n-q} \times B_q$$

ein Diffeomorphismus ist und $B_q \subset \mathbb{R}^q$ und $B_{n-q} \subset \mathbb{R}^{n-q}$ rechteckige Umgebungen sind. Die Menge $P_y = \phi^{-1}(B_{n-q} \times \{y\}), y \in B_q$ heißt **Platte** der Blätterungskarte.

Definition 1.2. [CC00, S.20] Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_\lambda$ eine Zerlegung von M in zusammenhängende, topologisch immergierte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k = n - q$. Die Mannigfaltigkeit M besitze einen Atlas (U_α, ϕ_α) aus Blätterungskarten der Kodimension q so, daß $B_\lambda \cap U_\alpha$ für jedes α und jedes λ eine Vereinigung von Platten ist. Dann heißt $\mathcal{B}$ **Blätterung** von M der Kodimension q und der Dimension k. Jedes B_λ heißt **Blatt** der Blätterung. Sind die Karten des Blätterungsatlanten $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismen, dann wird die Blätterung $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{C}^r$-Blätterung genannt.

Bemerkung 1.3.

1. Eine Zerlegung in disjunkte Mengen liefert eine Äquivalenzrelation auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M:

$$x \equiv y \quad \forall x, y \in M \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{Es gibt eine endliche Folge } (P_{\alpha_i})_{i=0,\dots,n} \text{ von Platten :} \\ x \in P_{\alpha_0},\ y \in P_{\alpha_n},\ P_{\alpha_i} \cap P_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Alternativ läßt sich deshalb eine Blätterung als Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen stetig immergierte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k < n$

von M sind. Im Folgenden werden vor allem Äquivalenzklassen des asymptotischen Verhaltens von Lösungen zu partiellen Differentialgleichungen betrachtet.

2. In dieser Arbeit tauchen fast ausschließlich Blätterungen auf, deren Grundraum nicht der $\mathbb{R}^n$, sondern ein unendlichdimensionaler Hilbert- oder Banachraum E ist. Die Definition der Blätterung wird darauf analog übertragen.

3. Häufig wird eine Karte $\phi_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ bezeichnet. Dabei sei $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-q})$ und $y_\alpha = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^q)$. Der Kartenwechsel ist dann in der y-Koordinate unabhängig von der x-Koordinate: $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = (x_\alpha(x_\beta, y_\beta), y_\alpha(y_\beta))$.Durch die x- und y-Koordinate wird lokal ein Koordinatensystem definiert.

Beispiel 1.4. Sei $f : M \to N$ eine glatte Submersion von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in eine q-dimensionale Mannigfaltigkeit N. Für jedes $y \in M$ gibt es eine Koordinatenumgebung $U \subset M$ und eine Koordinatenumgebung $V \subset B$ von $f(y)$, so daß

$$f(y_1, \dots, y_n)\big|_U = (y_1, \dots, y_q)$$

gilt. Die Niveaumengen $f^{-1}(x)$ sind damit eingebettete Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $k = n - q$. Die Zusammenhangskomponenten der nichtleeren Niveaumengen von f sind die Blätter einer Blätterung $\mathcal{B}$ der Kodimension q.

Beispiel 1.5. Sei $v : M \to TM$ ein nichtsinguläres Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Dann definiert der Fluß eine Blätterung der Dimension 1. Da das Vektorfeld v nichtsingulär ist, gibt es für beliebiges $x \in M$ nach dem Rektifizierungssatz eine Koordinatenumgebung $(U, x_1, \dots, x_n)$ von x, so daß

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = v\big|_U$$

gilt. Jede Trajektorie ist ein Blatt der Blätterung.

Beispiel 1.6. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ eine in beiden Komponenten stetig differenzierbare Funktion mit Λ Parameterraum. Betrachte die parameterabhängige Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, \lambda)$ mit Λ. Dann bildet der Phasenraum zu jedem $\lambda \in \Lambda$,

$$\bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \{x(t; x_0, \lambda)\}_{t \in \mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n,$$

ein Blatt. Die Blätter bilden eine Blätterung des $\mathbb{R}^n \times \Lambda$. Bei diesem Beispiel ist auch das Grundproblem von Blätterungen ersichtlich: Jedes Blatt sieht aus wie der $\mathbb{R}^n$. Daraus lassen sich keine relevanten Informationen über die parameterabhängige Dynamik der Differentialgleichung ablesen. Betrachtet man anstelle des Phasenraums zu jedem $\lambda \in \Lambda$ jede Trajektorie zu (x_0, λ), dann wird dadurch keine Blätterung mehr definiert, sobald Gleichgewichtspunkte auftauchen, denn diese sind 0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten.
Es ist schwierig, die Äquivalenzklassen so zu definieren, daß die Mannigfaltigkeiten glatt sind und alle dieselbe Dimension besitzen und so daß sie nichttriviale Informationen über das System enthalten.

Zentral in der Theorie der Blätterungen ist das **Frobenius-Theorem**, mit dem häufig die Existenz von Blätterungen bewiesen wird. An dieser Stelle nicht die vollständige Version des Frobenius-Theorem, sondern nur eine wichtige Folgerung, die in diesem Zusammenhang aber ausreicht:

Satz 1.7. *[CC00, S.37] Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine $\mathcal{C}^\infty$-k-dimensionale Distribution $E \subset TM$ ist vollständig integrabel genau dann, wenn $E = T(\mathcal{B})$ für eine $\mathcal{C}^\infty$-Blätterung $\mathcal{B}$ der Kodimension $q = n - k$ gilt.*
*Dabei heißt eine Distribution **vollständig integrabel**, falls durch jeden Punkt $w \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit von E geht, d.h. eine glatt immergierte Untermannigfaltigkeit N von M der Dimension k, so daß $E_x = T_xN$ für alle $x \in N$.*

Bemerkung 1.8. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen in dem Frobenius-Theorem sind so stark, daß es Blätterungen gibt, beispielsweise die stabilen und instabilen Blätterungen eines Anosov-Diffeomorphismus, deren Existenz nicht mit Hilfe dieses Theorems gezeigt werden kann. Es tritt häufig auf, daß die Blätterung weniger glatt ist als ein einziges Blatt, d.h. die Kartenwechsel sind $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen, aber die Abbildung x_α ist $\mathcal{C}^r$, $r \geq k$, bezüglich der Koordinate x_β.

Die Dynamik von Blätterungen wird mit Hilfe der *Holonomie* einer Blätterung beschrieben. Man kann sie als eine verallgemeinerte Form der Poincaré-Abbildung verstehen. Die *totale Holonomie-Gruppe* ist die Gruppe der Diffeomorphismen, die einen transversalen Schnitt an einen Punkt $x \in B$ auf einem Blatt B der Blätterung wieder auf sich abbilden, entlang eines geschlossenen Weges im Blatt.
Nicht alle Blätterungen erlauben globale transversale Schnitte an jedes Blatt. Ist es nur möglich lokale transversale Schnitte zu konstruieren, ist die Holonomie-Gruppe keine Gruppe , sondern eine *Holonomie-Pseudogruppe*. Die genaue Konstruktion der Holonomie-Pseudogruppe ist wie folgt:

Definition 1.9. [CC00, S.56 ff.] Sei $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ein Blätterungsatlas einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Sei γ der zugehörige Holonomie-Kozykel, definiert als

$$\gamma_{\alpha,\beta} := y_\alpha \circ y_\beta^{-1} : y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),\ \alpha, \beta \in \mathcal{A} \text{ mit } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset.$$

Betrachte Platten-Ketten $\mathcal{P} = \{P_0, \dots P_m = P_0\}$, so daß $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ für $0 \leq i \leq m-1$. Ist $P_i \subset U_{\alpha_i}$, dann ist die Abbildung

$$h_\mathcal{P} = \gamma_{\alpha_m, \alpha_{m-1}} \circ \dots \circ \gamma_{\alpha_1, \alpha_0}$$

wohldefiniert und ein Diffeomorphismus von S_{α_0} auf $S_{\alpha_0 = \alpha_m}$. Die Abbildung $h_\mathcal{P}$ heißt **Holonomie-Abbildung**. Die Menge aller Holonomie-Abbildungen wird mit Γ bezeichnet. Γ ist die **Holonomie-Pseudogruppe**.

Bemerkung 1.10.

1. Es handelt sich nur um eine Pseudogruppe, da die Holonomie-Abbildungen nur lokal definiert sind und sich zwei Abbildungen $g, h \in \Gamma$ also nur zu $h \circ g$ verketten lassen, falls der Bildbereich $R(g)$ von g im Definitionsbereich $D(h)$ von h enthalten ist.

2. Bei der Definition der Holonomie-Pseudogruppe wird ausgenutzt, daß der Atlas von M höchstens abzählbar unendlich ist. Dies folgt aus der Annahme, daß die Mannigfaltigkeit M eine abzählbare Basis besitzt. So kann die disjunkte Vereinigung von lokalen, transversalen Schnitten S_α als eine Untermannigfaltigkeit in M eingebettet werden, die transversal zur Blätterung ist.

3. Existiert zu der Blätterung ein Faserbündel, so daß die Blätterung transversal zu den Fasern ist und jede Faser jedes Blatt der Blätterung schneidet, dann bildet die Menge der Holonomie-Abbildungen eine Gruppe, die *totale Holonomie-Gruppe*.

Beispiel 1.11. Sei ϕ_t ein nichtsingulärer, glatter Fluß auf einer Mannigfaltigkeit M. Durch die Orbits wird eine Blätterung definiert. Zu jedem $w \in M$ gibt es einen lokalen transversalen Schnitt S_w. Für festes $a > 0$ sei $\phi_a(w) = z$. Betrachte dann den transversalen Schnitt S_z durch z. Definiere für eine hinreichend kleine Umgebung $V_w \subset S_w$ von w eine glatte Funktion τ, so daß gilt

$$\begin{aligned} \phi_{\tau(u)}(u) &\in S_z \ \forall u \in V_w, \\ \tau(w) &= a. \end{aligned}$$

Der Weg $s(t) = \phi_t(w)$, $0 \leq t \leq a$, liegt in dem Blatt durch w und verbindet w mit z. Die Holonomie $h_s : V_w \to S_z$ wird dann durch $h_s(u) = \phi_{\tau(u)}(u)$ definiert. Kehrt man die Richtung des Flusses um, so erhält man die Inverse h_s^{-1}. Damit ist die Holonomie h_s ein Diffeomorphismus von V_w auf eine Umgebung $V_z \subset S_z$ von z.
Ist s eine geschlossene Kurve, d.h. w liegt auf einem periodischen Orbit, dann ist die Holonomie h_s gerade die Poincaré-Abbildung.

Mit Hilfe der Holonomie-Pseudogruppe lassen sich Aussagen über die Dynamik, d.h. das Verhalten der Blätter unter der Holonomie-Gruppe, formulieren, beispielsweise das Stabilitätstheorem von Reeb:

Satz 1.12. *[CC00, S.67][Reeb-Stabilitätstheorem] Falls ein kompaktes Blatt L triviale Holonomie besitzt, d.h. falls die Holonomie-Gruppe die triviale Gruppe ist, dann gibt es eine Umgebung von L, die eine Vereinigung von Blättern, homöomorph zu L, ist.*

Es sei angemerkt, daß die Blätter einer Blätterung mit trivialer Holonomie-Gruppe generisch sind, vgl. [CC00][S.65]. Mit Hilfe der Blätterung lassen sich folgende Teilmengen der Mannigfaltigkeit M definieren:

Definition 1.13. [CC00, S.65,103,104] Sei $(M, \mathcal{B})$ eine Blätterung über M.

1. $X \subset M$ heißt **$\mathcal{B}$-gesättigt**, falls es eine Vereinigung von Blättern von $\mathcal{B}$ ist.

2. Eine **minimale Menge** $X \subset M$ ist eine abgeschlossene, nichtleere und $\mathcal{B}$-gesättigte Teilmenge, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften besitzt.

3. Eine minimale Menge $X \subset M$ heißt **außergewöhnlich**, falls X weder ein einzelnes abgeschlossenes Blatt ist noch eine Zusammenhangskomponente von M.

Beispiel 1.14.

1. Betrachte erneut das Beispiel 1.5, in dem eine kompakte Mannigfaltigkeit M durch die Lösungskurven eines Vektorfeldes geblättert wird. Jede unter dem Fluß invariante Menge $X \subset M$ ist dann eine $\mathcal{B}$-gesättigte Menge.

2. Jedes abgeschlossene Blatt ist immer eine minimale Menge. Im Beispiel 1.5 sind gerade die ω- und α-Limesmengen minimale Mengen, denn sie sind invariant, also $\mathcal{B}$-gesättigt, nichtleer und abgeschlossen, und enthalten nach Definition keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften.

3. Eine außergewöhnliche Menge des Beispiels 1.5 ist deshalb eine Limesmenge, die weder ein abgeschlossener Orbit, also ein Fixpunkt oder ein periodischer Orbit ist, noch eine Zusammenhangskomponente der Mannigfaltigkeit M.

Beispiel 1.15. Besitzt eine Blätterung über M nur Blätter, die dicht in M sind, dann ist M die einzige minimale Menge. Ein Beispiel hierfür liefern die Anosov-Diffeomorphismen: Die globalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines **Anosov-Diffeomorphismus** $f : M \to M$ bilden zwei Blätterungen auf M.
Sind die periodischen Punkte von f dicht in den nichtwandernden Punkten von f, dann gilt, daß $W^s(x)$ und $W^u(x)$ für alle $x \in M$ dicht in M sind, d.h. bei beiden Blätterungen ist M die einzige minimale Menge. Solche Blätterungen nennt man **minimal**. Solche Blätterungen können somit keine außergewöhnlichen Mengen enthalten.

Beispiel 1.16. [CC00, S.107][Denjoy-Beispiel] Zu jedem $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existiert eine nicht transitive, orientierungserhaltende $\mathcal{C}^1$-Kreisabbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit Rotationszahl ρ, das *Denjoy-Beispiel*. Die Abbildung f ist nicht transitiv und damit nicht zu einer irrationalen Rotation konjugiert. Daraus folgt, daß die ω-Limesmenge jedes Punktes perfekt und nirgendswo dicht und also homöomorph zu einer Standard-Cantormenge ist. Jede ω-Limesmenge ist also eine außergewöhnliche Menge.

1.2 Grundlagen der Funktionalanalysis

Partielle Differentialgleichungen „leben" in unendlichdimensionalen Funktionenräumen, und dort spielt sich auch ihre Dynamik ab. Diese wiederum ist abhängig von den Eigenschaften des Differentialoperators der partiellen Differentialgleichung.
Es gibt einige Unterschiede von unendlichdimensionalen Banachräumen zu vollständigen endlichdimensionalen Vektorräumen, die zu beachten sind: Insbesondere ist die Einheitskugel nicht mehr kompakt. Die Kompaktheit von Teilmengen kann nicht mehr durch Abgeschlossenheit und Beschränktheit charakterisiert werden. Beschränkte Folgen besitzen auch nicht notwendigerweise eine konvergente Teilfolge.
Ein weiterer Unterschied betrifft die Normen der Funktionenräume. Durch die Wahl von Normen in Banachräumen ist der Weg frei für ganz andere Techniken als in endlichdimensionalen Vektorräumen.
Während es für lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen „schöne" Normalformen gibt, die sich angeben lassen, sobald die Eigenwerte bekannt sind, können für lineare, beschränkte Operatoren auf Funktionenräumen solche Darstellungen nicht gefunden werden. Dies liegt insbesondere an der Struktur ihres Spektrums, das im allgemeinen nicht nur aus Eigenwerten besteht.
Da im folgenden aber Differentialoperatoren und die Eigenschaften der Funktionenräume eine große Rolle spielen, seien in diesem Kapitel kurz diejenigen Begriffe und Sätze aus der Funktionalanalysis zusammengestellt, die für das Verständnis der weiteren Kapitel wichtig sind. Die Darstellung folgt dabei im wesentlichen [Alt06], [GGK03] und [Heu92].
In der folgenden Arbeit werden in erster Linie *Differentialoperatoren* untersucht. Diese sind normalerweise unbeschränkt und nicht auf dem ganzen Funktionenraum definiert, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1.17. Betrachte den Differentialoperator

$$\begin{aligned} A : L^2([-\pi, \pi]) &\to L^2([-\pi, \pi]), \\ u(x) &\mapsto \frac{du}{dx}(x). \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich $D(A)$ von A ist nicht der ganze Raum $L^2([-\pi,\pi])$, sondern

$$D(A) := \left\{ f \in L^2([-\pi,\pi]) \mid \frac{d}{dx} f \in L^2([-\pi,\pi]) \right\}.$$

Der Operator A ist zudem auf seinem Definitionsbereich $D(A)$ unbeschränkt, denn für die Folge

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 1, 2, \dots,$$
$$\|\phi_n\| = 1$$

divergiert die Operatornorm $\|A\|$: $\lim_{n\to\infty} \|A\phi_n\| = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Viele Sätze, die für beschränkte Operatoren gelten, lassen sich so abwandeln, daß sie auch für bestimmte unbeschränkte Operatoren gelten. Deshalb werden zunächst einige wichtige Ergebnisse über beschränkte Operatoren zusammenfassend dargestellt.

1.2.1 Funktionenräume und beschränkte Operatoren

Definition 1.18. Eine lineare Abbildung A zwischen zwei Banachräumen X und Y heißt **beschränkt**, falls

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

Bemerkung 1.19. Die Einheitskugel in X wird unter dem beschränkten Operator A in eine Kugel mit Radius $\|A\|$ abgebildet. Ist A beschränkt, so ist A auch stetig. Die Umkehrung gilt ebenfalls, vgl. [Alt06, S.141].

Bemerkung 1.20. In diesem Abschnitt 1.2.1 bezeichne „Operator“ eine beschränkte, lineare Abbildung. Im Folgenden sei mit $N(A)$ der Kern von A und mit $R(A)$ das Bild von A bezeichnet.

Definition 1.21. Ein Banachraum $(H, \| \|_H)$ heißt **Hilbertraum**, falls er ein Skalarprodukt $(x,y) \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in H$ besitzt. Durch das Skalarprodukt wird eine Norm

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$$

auf H induziert, die äquivalent zur ursprünglichen Norm $\| \|_H$ ist. Einen nicht notwendigerweise vollständigen Raum mit Skalarprodukt nennt man **Prä-Hilbertraum**.

Bemerkung 1.22. Es ist in dieser Definition wichtig, daß die vom Skalarprodukt induzierte Norm äquivalent zu der Norm des Raumes H ist, die H zu einem Banachraum macht. Denn betrachte den Lebesgue-Raum L^3 mit der Norm von L^2. Auf L^3 ist durch das Skalarprodukt von L^2 ein Skalarprodukt und eine induzierte Norm definiert; diese ist aber nicht äquivalent zur kanonischen Norm von L^3, bezüglich derer der Raum ein Banachraum ist.

Beispiel 1.23. Der *Lebesgue-Raum*

$$L^2(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $(x,y) := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$ ist ein Hilbertraum.

Beispiel 1.24. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in L^p(\Omega)$. Weiter sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ bezeichne. Dann bezeichne $D^\alpha f = g$ die **schwache Ableitung** von f, falls für jedes $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\phi dx.$$

Durch

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \;\middle|\; D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k \right\}$$

werden mit der Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^k \left| D^j f(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

die *Sobolev-Räume* definiert. Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ sind Hilberträume.

Um die Normen verschiedener Funktionenräume miteinander vergleichen zu können, ist der folgende Einbettungssatz wichtig:

Satz 1.25. *[Tem88, S.44][Einbettungssatz] Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, $p \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine offene, nicht unbedingt beschränkte Menge mit hinreichend glatten Rand.* ***Dann*** *ist*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

und die Einbettung ist stetig:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \;\leq\; c(m, n, p, \Omega) \, \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \, .$$

Ist $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ und Ω beschränkt, dann ist mit $m - \frac{n}{p} = k + \alpha$ und $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$ die Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$$

stetig. Es gilt für alle $x, y \in \Omega$

$$\left| D^k u(x) - D^k u(y) \right| \;\leq\; c(m, n, p, \Omega) \, \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \, |x - y|^\alpha \, .$$

Definition 1.26. [Alt06, S.100] Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt **kompakt**, falls sie eine der drei folgenden, äquivalenten Eigenschaften erfüllt:

1. A ist **überdeckungskompakt**, d.h. jede offene Überdeckung von A enthält eine endliche Teilüberdeckung.

2. A ist **folgenkompakt**, d.h. jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.

3. A ist vollständig und **präkompakt**, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ besitzt A eine endliche Überdeckung mit ϵ-Kugeln.

Bemerkung 1.27. Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ in einem Banachraum ist genau dann kompakt, wenn X endlichdimensional ist [Alt06, S.104].

In endlichdimensionalen Vektorräumen sind gerade die beschränkten, abgeschlossenen Mengen die kompakten Mengen. Dies gilt in unendlichdimensionalen Räumen nicht mehr. Hier spielt der Begriff der Präkompaktheit (totale Beschränktheit) eine entsprechende Rolle:

Definition 1.28. [Yos80, S.5] Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt**, falls der Abschluß $\overline{M}$ kompakt ist.

Präkompakte Teilmengen von X sind genau die relativ kompakten Teilmengen von X, wie folgender Satz garantiert:

Satz 1.29. *[Yos80, S.13] Eine Teilmenge M eines vollständigen, metrischen Raumes X ist genau dann relativ kompakt, wenn M präkompakt (total beschränkt) ist.*

Im Raum der stetigen Funktionen gilt folgendes Kriterium für Kompaktheit:

Satz 1.30. *[Alt06, S.105][Satz von Arzelà-Ascoli] Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset C^0(S, \mathbb{R}^m)$.* ***Dann*** *gilt: Die Menge A ist präkompakt genau dann, wenn A beschränkt und* ***gleichgradig stetig*** *ist, d.h.*

1. $\sup_{f \in A} \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$,

2. $\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \to 0$ *für* $x, y \in S$ *mit* $|x - y| \to 0$.

Die Charakterisierung von kompakten Mengen in L^p-Räumen läßt sich ebenfalls auf den Satz von Arzelà-Ascoli zurückführen, indem man Lebesgue-integrierbare Funktionen durch glatte Funktionen approximiert.

Der bekannte Satz von Weierstraß, der in jedem endlichdimensionalen Vektorraum zu jeder beschränkten Folge die Existenz einer konvergenten Teilfolge garantiert, gilt im Unendlichdimensionalen nicht. In Hilberträumen kann man aber mit Hilfe des schwachen Konvergenzbegriffes eine abgeschwächte Form des Satzes ins Unendlichdimensionale hinüberretten.

Definition 1.31. [Alt06, S.225] Sei X ein Banachraum. Der Raum X' aller stetigen linearen Funktionale $x' : X \to \mathbb{R}$ heißt **Dualraum** von X. Sei $(x, x')_X := x'(x)$ für $x \in X$ und $x' \in X'$.

1. Eine Folge $(x_n) \in H$ heißt **schwach konvergent** gegen x, falls gilt
$$(x_n, x')_X \to (x, x')_X \quad \forall x' \in X'.$$

2. Die Konvergenz bezüglich der Norm nennt man **stark konvergent**.

3. Eine Menge $M \subset X$ heißt **schwach folgenkompakt**, falls jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, deren schwacher Limes in M liegt.

Satz 1.32. *[Alt06, S.234] Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum H besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

Bemerkung 1.33.

1. Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset H$ ist schwach folgenkompakt.

2. Die Voraussetzung eines Hilbertraums im Satz 1.32 läßt sich abschwächen: Es genügt, einen reflexiven Banachraum vorauszusetzen, d.h. einen Banachraum X, der kanonisch isomorph zum Dualraum $(X')'$ des Dualraums X' ist. Durch diese Eigenschaft ist ein reflexiver Banachraum sogar eindeutig charakterisiert: Besitzt jede beschränkte Folge in dem Banachraum X eine schwach konvergente Teilfolge, dann ist X reflexiv (vgl. [Yos80, S.124,S.126]).

Im Falle von linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen gibt es Normalformen, wie die Jordansche Normalform, die auf die gesamte Klasse aller invertierbaren linearen Abbildungen anwendbar ist. Durch Äquivalenztransformationen läßt sich jeder invertierbare Endomorphismus auf eine Jordansche Normalform bringen. Eine solche universelle Normalform gibt es bei linearen Operatoren auf Funktionenräumen nicht. Nur für bestimmte Klassen wie beispielsweise symmetrische Operatoren gibt es vergleichbare Darstellungsmöglichkeiten als Normalform. Im Folgenden werden deshalb einige wichtige Klassen von Operatoren vorgestellt, die sich durch solche „schönen" Eigenschaften auszeichnen.

Definition 1.34. [Heu92, S.194] Sei X Hilbertraum. Ein Operator $A : X \to X$ mit dem Skalarprodukt $(\ ,\ )$ heißt **symmetrisch**, falls gilt

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in X.$$

Bemerkung 1.35. Ein symmetrischer Operator ist durch seine quadratische Form $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ vollständig bestimmt. Jeder Eigenwert von A ist reell und die Eigenfunktionen sind orthogonal zueinander.

Definition 1.36. [Alt06, S.144] Ein Operator $K : X \to Y$ zwischen zwei Banachräumen X, Y heißt **kompakt**, falls das Bild $(Kx_n) \subset Y$ jeder beschränkten Folge $(x_n) \subset X$ eine (stark) konvergente Teilfolge enthält.

Bemerkung 1.37.

1. Diese Definition ist auch für nichtlineare Operatoren gültig. Für lineare Operatoren folgt aus der Kompaktheit immer die Stetigkeit; dies gilt für nichtlineare Operatoren nicht unbedingt.

2. Die Identität ist nur in endlichdimensionalen Räumen kompakt.

3. Die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X)$ ist ein linearer Unterraum des Vektorraums der linearen, beschränkten Operatoren $\mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X. Sie ist sogar ein zweiseitiges, abgeschlossenes Ideal in der Banachalgebra $\mathcal{L}(X)$.

Definition 1.38. [Alt06, S.295] Sei X ein Banachraum, $Y \subset X$ ein Unterraum von X. Ein linearer Operator P heißt **Projektor** oder Projektion auf Y, falls gilt

$$P^2 = P, \text{ sowie } R(P) = Y.$$

Bemerkung 1.39.

1. Ist P eine Projektion, dann läßt sich der Raum X in Bild und Kern der Projektion disjunkt zerlegen: $X = R(P) \oplus N(P)$.

2. Ist P eine Projektion auf $Y \subset X$, so ist $\mathbb{I} - P$ eine Projektion auf $N(P) = R(\mathbb{I} - P)$.

3. Zu jedem Unterraum $Y \subset X$ gibt es eine Projektion P auf Y. Die Projektion P ist in der Regel aber nicht stetig. P ist genau dann auf einen abgeschlossenen Unterraum Y stetig, wenn der Kern $N(P)$ abgeschlossen ist.

4. Ein abgeschlossener Unterraum $E \subset H$ eines Hilbertraums H besitzt ein orthogonales Komplement. Es gibt zudem einen stetigen *Orthogonalprojektor* P auf diesen Unterraum E mit $\|P\| = 1$.

Satz 1.40. *[Heu92, S.202] Ist $A \neq 0$ ein symmetrischer kompakter Operator eines Prä-Hilbertraums X, so gibt es eine Orthonormalfolge von Eigenvektoren u_n und zugehörigen Eigenwerten μ_n von A. Es gilt*

$$Ax = \sum \mu_n (x, u_n) u_n \quad \forall x \in X.$$

Die Folge der Eigenwerte (μ_n) bricht entweder ab oder strebt gegen 0. Ist X ein Hilbertraum und gilt für einen Operator die obige Darstellung mit einer endlichen Folge oder Nullfolge reeller Zahlen (μ_n) und einer Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots)$, so ist A kompakt und symmetrisch.

Sei (μ_n) nun zerlegt in eine monoton fallende Folge positiver Eigenwerte (μ_n^+) und eine monoton wachsende Folge negativer Eigenwerte (μ_n^-).

Satz 1.41. *[Heu92, S.212] Ein Eigenwert μ_r^+ mit $0 < \alpha \leq \mu_r^+$ ist genau dann vorhanden, wenn es einen r-dimensionalen Unterraum von X gibt, auf dem $(Ax, x) \geq \alpha(x, x)$ gilt.*

Satz 1.42. *[Heu92, S.212][Maximum-Minimum-Prinzip] Es gilt*

$$\mu_r^+ = \max_F \min_{0 \neq x \in F} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

wobei F alle r-dimensionalen Unterräume durchläuft, auf denen $(Ax, x) > 0$ gilt.

Satz 1.43. *[Heu92, S.212][Minimum-Maximum-Prinzip] Falls die rechte Seite der folgenden Gleichung positiv ist, gilt*

$$\mu_r^+ = \min_F \sup_{0 \neq x \in F^\perp} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

wobei F alle $(r-1)$-dimensionalen Unterräume von X durchläuft.

Die entsprechenden Sätze gelten auch für die negativen Eigenwerte.

Definition 1.44. [Alt06, S.369] Zu einem Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X heißt die Menge

$$\rho := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; R_\lambda := (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\}$$

Resolventenmenge. Die Abbildung $\lambda \mapsto R_\lambda$ heißt **Resolventenfunktion**; R_λ heißt die **Resolvente**.

Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \neq \emptyset$ heißt **Spektrum** von A. Das Spektrum läßt sich in drei disjunkte Teilmengen zerlegen: das **Punktspektrum** $\sigma_p(A)$, das **kontinuierliche Spektrum** $\sigma_c(A)$ und das **Residualspektrum** $\sigma_r(A)$:

$$\sigma_p(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(\lambda \mathbb{I} - A) \neq \{0\} \right\},$$
$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(\lambda \mathbb{I} - A) = \{0\},\ \overline{(\lambda \mathbb{I} - A) X} = X, (\lambda \mathbb{I} - A) X \neq X \right\},$$
$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(\lambda \mathbb{I} - A) = \{0\},\ \overline{(\lambda \mathbb{I} - A) X} \neq X \right\}.$$

Der **Spektralradius** von A wird durch $r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ definiert.
Eine Teilmenge $\sigma \subset \sigma(A)$ des Spektrums heißt **Spektralmenge**, falls σ eine offene und abgeschlossene Teilmenge des Spektrums ist.

Bemerkung 1.45.

1. Die Resolventenfunktion für beschränkte Operatoren ist eine komplex-analytische Funktion. Ein Punkt λ des Punktspektrums von A mit endlicher Vielfachheit n_λ ist gerade ein hebbarer Pol der Ordnung n_λ der Resolventenfunktion.

2. Das *Spektrum von beschränkten Operatoren* ist kompakt und nichtleer.

3. Das *Spektrum eines kompakten Operators* K besteht nur aus dem Punktspektrum und möglicherweise der Null. Die Eigenwerte bilden entweder eine endliche Menge oder eine Nullfolge. Für jeden Eigenwert μ gilt: $|\mu| \leq \|K\|$.

4. Das *Spektrum eines symmetrischen Operators* A ist reell. Ist $m(A) := \inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$ und $M(A) := \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$, dann gilt
$$\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]\,.$$
Dabei ist $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.
Zudem besitzt A die **Spektraldarstellung**
$$A = \int_{m(A)-0}^{M(A)} \lambda dE_\lambda. \tag{1.1}$$
Seien $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für $n = 1, 2, \ldots, r$ paarweise verschiedene Eigenwerte des Operators A, so daß $m(A) = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r = M(A)$ gilt. Mit E_λ wird die Summe $\sum_{i=1}^{n} P_i$ von Spektralprojektoren P_i auf den Eigenraum von λ_i bezeichnet, dabei ist n so groß gewählt, daß $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$ gilt. Es ist $E_\lambda = 0$, falls $\lambda < m(A)$ ist. Die Projektoren E_λ sind orthogonal und bilden eine **Spektralschar** (E_λ), die monoton wachsend und rechtseitig stetig ist.

5. Ein Beispiel für Spektralmengen sind alle endlichen Familien isolierter Punkte des Spektrums. Das Komplement einer Spektralmenge ist auch eine Spektralmenge.

6. Für den Spektralradius gilt: $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Satz 1.46. *[Heu92, S.489][Zerlegungssatz] Sei X ein komplexer Banachraum und σ eine Spektralmenge des stetigen Operators A. Sei Γ_σ eine $\sigma \subset \sigma(A)$ umschließende Kurve und R_λ die Resolvente von A. Dann erzeugt der Spektralprojektor*
$$P_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} R_\lambda d\lambda$$
eine Zerlegung
$$X = M_\sigma \oplus N_\sigma$$
mit $M_\sigma = P_\sigma(X)$ und $N_\sigma = N(P_\sigma)$. Die Unterräume sind unter A invariant und es gilt
$$\sigma(A|_{M_\sigma}) = \sigma, \quad \sigma(A|_{N_\sigma}) = \sigma(A) \setminus \sigma.$$

Bemerkung 1.47. Der Spektralprojektor ist ein stetiger Projektor.

Bemerkung 1.48. Die Definition von Spektrum und Resolventenmenge sowie der obige Zerlegungssatz 1.46 gelten ebenfalls für die im folgenden Abschnitt definierten abgeschlossenen, unbeschränkten Operatoren.

Dieser Satz über die Existenz invarianter Unterräume von Operatoren ist in dieser Arbeit von Bedeutung, weil es in den folgenden Abschnitten um die Existenz von stabilen und instabilen verallgemeinerten Eigenräumen eines Operators geht, die X zerlegen.

1.2.2 Unbeschränkte Operatoren

Differentialoperatoren sind im allgemeinen unbeschränkte Operatoren. Es stellt sich die Frage, welche zusätzlichen Eigenschaften ein unbeschränkter Operator haben muß, damit man dennoch mit ihm ähnlich wie mit einem beschränkten Operator umgehen kann. Für den Rest der Arbeit bezeichne „Operator“ eine lineare Abbildung zwischen Hilberträumen.

Definition 1.49. [Heu92, S.101] Sei X ein Banachraum. Ein Operator A auf $D(A) \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls der Graph von A in $X \times X$ abgeschlossen ist, d.h. falls für jede Folge $(x_n) \subset D(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ gilt, daß $x \in D(A)$ und $Ax = y$ ist.
Auf dem Banachraum X läßt sich die folgende **Graphen-Norm** definieren:

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\| \quad \forall x \in D(A).$$

Der Raum X ist bezüglich dieser Norm ein Banachraum. Ist X ein Hilbertraum, so bleibt X auch bezüglich des folgenden Skalarprodukts

$$\begin{aligned}(x,y)_A &:= (x,y) + (Ax,Ay) \quad \forall x,y \in D(A),\\ \|x\|_A &:= \sqrt{(x,x)_A}\end{aligned}$$

ein Hilbertraum. Bezüglich dieser Norm ist $A : D(A) \to X$ beschränkt. Damit sieht man bereits, daß man unbeschränkte, aber abgeschlossene Operatoren wie beschränkte Operatoren behandeln kann, wenn die Norm entsprechend angepaßt wird.

Definition 1.50. [Heu92, S.565],[Yos80, S.197] Sei H ein Hilbertraum und $D(A) \subset H$ der Definitionsbereich eines Operators $A : H \to H$.

1. Definiere

$$D(A^*) := \left\{ y \in H \;\middle|\; \exists y^* \in H : \ (Ax,y) = (x,y^*) \ \forall x \in D(A) \right\}.$$

   Die **Adjungierte** A^* von eines Operators A wird durch $A^*y = y^*$ für $y \in D(A^*)$ definiert. Ist $D(A)$ dicht in H, bestimmt jedes $y \in D(A^*)$ ein eindeutiges $y^* \in H$.

2. Ein Operator A auf $D(A) \subset H$ heißt **symmetrisch**, falls $A^* \supset A$ gilt, d.h. falls die Adjungierte A^* eine Fortsetzung von A ist.

3. Ein Operator A auf $D(A) \subset H$ heißt **selbstadjungiert**, falls $A^* = A$ gilt.

Bemerkung 1.51. Ein selbstadjungierter Operator eines Hilbertraums ist immer dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen. Er braucht aber nicht stetig zu sein. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist deshalb reell, aber möglicherweise unbeschränkt. Ein auf ganz H definierter symmetrischer Operator ist beschränkt und selbstadjungiert.

Definition 1.52. [Hen81, S.18] Ein Operator $A : X \to X$ heißt **sektoriell**, falls A abgeschlossen und dicht definiert ist, so daß für ein $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$S_{a,\phi} := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi,\ \lambda \neq a\right\}$$

ist in $\rho(A)$ enthalten und

$$\left\|(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Bemerkung 1.53.

1. Jeder beschränkte Operator ist sektoriell. Ist ein Operator selbstadjungiert, dicht definiert und von unten beschränkt, dann ist er sektoriell.

2. Ist A sektoriell mit kompakter Resolvente, dann besteht das Spektrum $\sigma(A)$ aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit. In diesem Fall ist auch $M_\sigma = P_\sigma(X)$ endlichdimensional, falls P_σ der Spektralprojektor zu einer beschränkten Spektralmenge σ ist.

1.3 Evolutionsgleichungen

Das Konzept des dynamischen Systems bzw. des Flusses läßt sich nicht auf alle partiellen Differentialgleichungen verallgemeinern. Entscheidend dafür ist, daß sich die partielle Ableitung nach der Zeit separieren läßt. Deshalb werden in dieser Arbeit ausschließlich solche partiellen Differentialgleichungen betrachtet, die sich in der Form

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(u(t)) \tag{1.2}$$

schreiben lassen, wobei $\mathcal{F}$ ein nichtlinearer Differentialoperator auf geeigneten Banachräumen ist und $u(t,x) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in einem geeigneten Banachraum E liegt.
Solche partiellen Differentialgleichungen nennt man allgemein *nichtlineare Evolutionsgleichungen*. In diesem Abschnitt werden die Existenzsätze von Lösungen von 4.1 vorgestellt sowie die Definition und die wichtigsten Eigenschaften von Halbgruppen eingeführt, die dann als unendlichdimensionales, stetiges dynamisches System aufgefaßt werden können. Zunächst seien einige einleitende Beispiele von Evolutionsgleichungen vorgestellt, die im Laufe der Arbeit immer wieder auftauchen werden.

Beispiel 1.54. Die **Wärmeleitungsgleichung** beschreibt die Temperaturverteilung in einem Körper (hier in einem „eindimensionalen“ Stab) durch Wärmeleitung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dabei sei $t > 0$ und $0 < x < l$. Die Konstante l bezeichne die Länge des Stabes, und $u(x,t)$ gibt die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t an. Die Konstante K bezeichnet die Wärmeleitfähigkeitskonstante. Die Temperatur sei am Rand zu jeder Zeit Null: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.
Definiere $Af = -K\frac{d^2 f}{dx^2}$ für glatte Funktionen $f : [0,l] \to \mathbb{R}$, die auf dem Rand des Intervalls verschwinden: $f(0) = f(l) = 0$. Dann ist A ein selbstadjungierter Operator, der

auf dem Lebesgue-Raum $L^2(0,l)$ dicht definiert ist. Die Wärmeleitungsgleichung läßt sich dann schreiben als

$$\frac{du}{dt} + Au = 0.$$

Beispiel 1.55. Reaktion-Diffusionsgleichung: Verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung Unter diesen Typ von partieller Differentialgleichung fällt auch die Wärmeleitungsgleichung 1.54:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \Delta u + f(x,u), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.56. Die **Cahn-Hilliard-Gleichung** beschreibt die Dynamik der Musterbildung beim Übergang von einem Aggregatzustand zu einem anderen: Wenn ein flüssiges Gemisch aus zwei Metallen plötzlich abgekühlt wird, trennen sich die Metalle, während sie erstarren, und es entstehen Muster. Sie lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta^2 u - \sum_{j=1}^{2p-1} a_j u^j = 0,$$

wobei $u : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $p \geq 2$. Dabei ist der Leitkoeffizient a_{2p-1} positiv.
Meist wird als nichtlinearer Term $f(u) = -\alpha u + \beta u^3$ mit $\beta > 0$ gewählt. Auf dem Rand von Ω gelte

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

wobei ν den äußeren Einheitsnormalenvektor auf dem Rand von Ω bezeichne.

1.3.1 Existenz von Lösungen und analytische Halbgruppen

Für Evolutionsgleichungen läßt sich das Konzept des diskreten bzw. kontinuierlichen dynamischen Systems, das durch die Zeit-1-Abbildung bzw. den Fluß einer gewöhnlichen Differentialgleichung definiert wird, verallgemeinern. Dafür betrachte zunächst den Fall einer linearen Evolutionsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \ u_0 \in E. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dabei sei A ein linearer Operator eines Banachraums E. Diese Gleichung erinnert an eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, und es liegt nahe, sie ganz analog mit der Exponentialabbildung zu lösen. Die Lösung würde dann lauten:

$$u(t) = e^{-At} u_0, \quad t \in [0,T].$$

Allerdings stellt sich bei Operatoren die Frage, für welche Operatoren die Exponentialfunktion wohldefiniert ist, d.h. wann die Exponentialreihe absolut konvergent ist, und wann e^{-At} stetig differenzierbar ist. Zunächst gilt für alle beschränkten Operatoren, daß durch

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-At)^n}{n!}$$

eine Gruppe stetiger linearer Operatoren definiert wird. Ebenso läßt sich das Konzept der Exponentialfunktion auf unbeschränkte, selbstadjungierte, positiv definite Operatoren übertragen, da diese die Spektraldarstellung 1.1 besitzen:

$$e^{-At} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda, \; t \geq 0.$$

Mit diesen Beispielen ist aber die Klasse von Operatoren nicht erschöpft, für die die Exponentialfunktion wohldefiniert ist. Die folgenden Begriffe der Halbgruppe und ihres infinitesimalen Erzeugers liefern eine Antwort darauf und geben an, für welche Operatoren A Lösungen für die lineare Evolutionsgleichung existieren.

Definition 1.57. [Hen81, S.20] Eine Familie stetiger, linearer Operatoren $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ heißt **analytische Halbgruppe**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \quad T(0) = \mathbb{I}$,
2. $T(t)u \to u$ für $t \to 0$ für alle $u \in E$,
3. $t \mapsto T(t)u$ ist reell analytisch für $0 < t < \infty$ und $u \in E$.

Definition 1.58. [Hen81, S.20] Sei $h > 0$ und $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Sei

$$A_h := \frac{T(h)u - u}{h}$$

und $D(A)$ die Menge der $u \in E$, für die der folgende Grenzwert existiert, dann definiert

$$\begin{aligned} A := D(A) &\to X \\ u &\mapsto \lim_{h\to 0} A_h u \end{aligned}$$

den **infinitesimalen Erzeuger** der Halbgruppe.

Bemerkung 1.59. Der Definitionsbereich $D(A) \subset E$ ist dicht, und A ist ein abgeschlossener Operator auf $D(A)$.

Die Glattheitseigenschaften der Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ bezüglich t hängen ausschließlich von dem erzeugenden Operator A ab. Eine in t gleichmäßig stetige Halbgruppe wird immer von einem beschränkten Operator erzeugt. Ist die Halbgruppe in t stetig, dann ist der erzeugende Operator abgeschlossen.
Einer analytischen Halbgruppe entspricht immer ein sektorieller Erzeuger und umgekehrt. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes:

Satz 1.60. *[,][Satz von Phillips-Yosida] Ist A ein sektorieller Operator,* ***dann*** *ist $-A$ ein infinitesimaler Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit $T(t) = e^{-At}$, wobei*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda \mathbb{I} + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Dabei bezeichne Γ eine Kurve in der Resolventenmenge $\rho(-A)$ mit der Eigenschaft, daß $|\arg \lambda|$ gegen ein $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ konvergiert, falls $|\lambda| \to \infty$.
Ebenso gilt umgekehrt: Ist $-A$ infinitesimaler Erzeuger eine analytischen Halbgruppe, dann ist A sektoriell.

Es gilt dann für die Ableitung

$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At}, \quad \forall t > 0.$$

Damit existiert zu jedem Anfangswert $u_0 \in E$ für die lineare Evolutionsgleichung 1.3 auf einem Intervall $[0, T]$ eine eindeutige Lösung $u(t) = e^{-At}u_0$, die auf dem offenen Intervall $(0, T)$ stetig differenzierbar ist, falls A ein sektorieller Operator ist.

Das inhomogene lineare Problem läßt sich analog zu einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung formulieren und durch Variation der Konstanten lösen:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + Au &= f(t),\ 0 < t < T,\\ u(0) &= u_0.\end{aligned}$$

Dabei sei A wieder sektoriell auf einem Banachraum E, und f sei eine lokal Hölder-stetige Funktion mit $\int_0^\rho \|f(s)\|\,ds < \infty$ für eine Konstante $\rho > 0$. Unter diesen Voraussetzungen existiert zu jedem Anfangswert $u_0 \in E$ eine eindeutige starke Lösung $u(t)$ mit $u(0) = u_0$ und

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds.$$

Die Lösung $u(t)$ heißt stark, weil sie die obige Evolutionsgleichung erfüllt, die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ existiert und stetig ist und das Bild von $u(t)$ im Definitionsbereich $D(A)$ von A enthalten ist.
Beachte, daß hier der nichtlineare Term f nur von t abhängt.
Ist f auch von u abhängig, sind weitere Voraussetzungen notwendig. Doch auch dieses nichtlineare Problem läßt sich lösen, auch wenn es sich dabei um schwache Lösungen handelt. Eine Lösung $u(t)$ heißt *schwach*, falls die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ nur im schwachen Sinne existiert und $u(t)$ die unten stehende Integralgleichung löst.[1] Wichtig für die Formulierung dieses Problems sind *gebrochene Potenzen* des Operators A (vgl. [Hen81, S.24]). Deren Definitionsbereiche, versehen mit der Graphen-Norm, liefern die grundlegende Topologie. Sie sind Unterräume von E, die so gewählt werden, daß der nichtlineare Term f eingeschränkt auf sie die gewünschten Eigenschaften wie Lipschitz-Stetigkeit oder Beschränktheit besitzt, die f i.a. auf ganz E nicht hat.
Sei A weiterhin sektoriell. Definiere $A_1 = A + a\mathbb{I}$, so daß $\Re(\sigma(A_1)) > 0$. Bilde die gebrochene Potenz

$$A_1^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-A_1 t}dt, \quad x \in D(A_1).$$

Der Operator $A_1^{-\alpha}$ ist beschränkt, linear und injektiv auf E für jedes $\alpha > 0$. Definiere A_1^{α} als das Inverse von $A_1^{-\alpha}$. Der Operator A_1^{α} ist abgeschlossen und dicht definiert.
Bezeichne mit E^α den Definitionsbereich $D(A_1^\alpha)$. Versehen mit der Graphen-Norm[2] $\|u\|_\alpha := \|A_1^\alpha u\|$, $u \in E^\alpha$ist E^α ein Banachraum für alle $\alpha > 0$. Der Raum E^α liegt dicht in E^β für alle $\alpha \geq \beta \geq 0$, und die Einbettung ist stetig. Die Einbettung ist sogar kompakt, falls A eine kompakte Resolvente besitzt.
Die analytische Halbgruppe e^{-At} auf E läßt sich zu einer analytischen Halbgruppe auf

[1] Tauchen bei den Randbedingungen Ableitungen von u auf, so werden diese Randbedingungen von schwachen Lösungen auch nur im schwachen Sinne erfüllt.

[2] Diese Graphen-Norm ist äquivalent zu der weiter oben eingeführten Graphen-Norm $\|x\| + \|Ax\|$.

jedem Raum E^α für jedes negative $\alpha \in \mathbb{R}$ fortsetzen. Weiter gelten für die Halbgruppe folgende Abschätzungen für $\alpha \geq 0$:

$$\left\|e^{-At}\right\|_\alpha = \left\|A^\alpha e^{-At}\right\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-at}, \tag{1.4}$$

wobei a so gewählt ist, daß $a < \Re(\sigma(A))$.
Betrachte also

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(u,t), \\ u(t_0) &= u_0, \quad t > t_0, \\ f : U \subset \mathbb{R} \times E^\alpha \to E, &\quad 0 \leq \alpha < 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Funktion f sei lokal Hölder-stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in u.
Dann gibt es zu jedem Anfangswert $(t, u_0) \in U$ ein $T > 0$, so daß durch die Lösung der folgenden Integralgleichung

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, u(s)) ds$$

eine eindeutige (schwache) Lösung von 1.5 auf $(t_0, t_0 + T)$ definiert wird.

Um die Existenz von Lösungen für die allgemeine nichtlineare Evolutionsgleichung 4.1 zu zeigen, zerlegt man den Differentialoperator $\mathcal{F} = A + f$ in einen linearen Anteil A und eine Nichtlinearität f. Man wählt geeignete gebrochene Potenzen α, so daß sich die Lipschitz-Stetigkeit der Nichtlinearität f auf E^α und möglicherweise deren Beschränktheit zeigen lassen.

Satz 1.61. *[Hen81, S.55] Sei A ein sektorieller Operator, $0 \leq \alpha < 1$ und sei $f : U \subset \mathbb{R} \times E^\alpha \to E$ eine auf U lokal in der ersten Komponente Hölder-stetige und lokal in der zweiten Komponente Lipschitz-stetige Funktion. Weiter sei für jede beschränkte Menge $B \subset U$ das Bild $f(B)$ beschränkt in E.* ***Dann*** *gilt für das maximale Existenzintervall $[0, T)$ der Lösung $u(t)$ entweder $T = \infty$, oder es gibt eine Folge (t_n) mit $\lim_{n\to\infty} t_n = T$, so daß $(x(t_n), t_n) \to \partial U$ gilt.*
Daraus folgt:

Satz 1.62. *[Hen81, S.56] Sei A sektoriell und $U = (\tau, \infty) \times E^\alpha$, f sei Hölder-stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in x für $(t, x) \in U$ und es gelte*

$$\|f(t,x)\| \leq K(t) \left(1 + \|x\|_\alpha\right)$$

für alle $(t, x) \in U$, wobei K auf (τ, ∞) stetig sei. Ist $t_0 > \tau$ und $x_0 \in E^\alpha$, ***dann*** *existiert die eindeutige Lösung von 1.5 durch (t_0, x_0) für alle Zeiten $t \geq t_0$.*

Satz 1.63. *[Hen81, S.57] Seien die Voraussetzungen wie für die Gleichung 1.5 erfüllt. Der Operator A besitze zudem eine kompakte Resolvente, und f bilde alle Mengen $\mathbb{R}_+ \times B$, wobei $B \subset E^\alpha$ beschränkt und abgeschlossen ist, in beschränkte Mengen von E ab. Ist $u(t; t_0, u_0)$ eine Lösung der Gleichung 1.5 auf dem Intervall (t_0, ∞), so daß $\|u(t; t_0, u_0)\|_\alpha$ für $t \to \infty$ beschränkt ist,* ***dann*** *ist der positive Halborbit $\{u(t; t_0, u_0)\}_{t > t_0}$ in einer kompakten Menge in E^α enthalten.*

In vielen Anwendungen läßt sich E als Hilbertraum und A als selbstadjungierter, positiv definiter Operator mit kompakter Resolvente definieren. Die Eigenwerte von A seien mit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ bezeichnet, wobei ihre Vielfachheiten mitgezählt werden, und $\{e_1, e_2, \ldots\}$ sei die zugehörige Orthonormalbasis von E aus Eigenfunktionen. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich der Operator A^α für alle $\alpha \geq 0$ wie folgt darstellen:

$$A^\alpha u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, e_i \rangle e_i, \ \forall u \in D(A^\alpha).$$

Der Raum $D(A^\alpha)$ ist selbst ein Hilbertraum mit dem folgenden Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha u_i \overline{v_i}, \ \forall u, v \in D(A^\alpha).$$

Definition 1.64. [Hen81, S.82] Eine Halbgruppe von nichtlinearen Abbildungen $S(t) : E \to E$ auf einem Banachraum E heißt **dynamisches System**, falls sie folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. Für jedes $t \geq 0$ ist $S(t) : E \to E$ stetig;
2. für jedes $u \in E$ ist $t \mapsto S(t)u$ stetig;
3. $S(0) = \mathbb{I}_E$ ist die Identität auf E;
4. $(S(t) \circ S(s))(u) = S(t+s)(u)$ für alle $u \in E$ und $t, s \geq 0$.

Die Lösungshalbgruppe der Evolutionsgleichung 4.1 bildet ein dynamisches System entsprechend der Definition 1.64, falls Lösungen auf einem positiven Zeitintervall eindeutig existieren, d.h. falls folgende Voraussetzungen an die Gleichung erfüllt sind: Sei A sektoriell auf dem Banachraum E, $V \subset E^\alpha$ eine offene Teilmenge mit $0 \leq \alpha < 1$ und $f : V \to E$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Dann besitzt die Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u)$$

eine eindeutige Lösung. Es existiere weiter eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset V$, die für das dynamische System positiv invariant ist. Durch den Operator

$$S(t)u_0 = u(t, u_0), \quad t \geq 0$$

wird dann ein dynamisches System auf C bezüglich der induzierten Topologie von E^α definiert. Für diese unendlichdimensionalen dynamischen Systeme lassen sich viele Begriffe wie in endlichdimensionalen Systemen definieren.
Sie stehen im Mittelpunkt der folgenden Arbeit: Es werden Blätterungen gesucht, die Information über die Dynamik dieser Systeme enthalten. Dafür muß die Blätterung *invariant* unter der Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sein, und jedes Blatt sollte Punkte hinsichtlich ihres asymptotischen Verhaltens unter $\{S(t)\}$ zusammenfassen. Deswegen beschäftige ich mich im folgenden zweiten Kapitel zunächst mit invarianten Mannigfaltigkeiten zu unendlichdimensionalen dynamischen Systemen. Es wird sich zeigen, inwieweit sich aus stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten Blätterungen konstruieren lassen.

Kapitel 2

Invariante Mannigfaltigkeiten

Betrachte im Folgenden partielle Differentialgleichungen der Form

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(u(t)),$$

wobei $\mathcal{F}$ ein nichtlinearer Differentialoperator sei. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ liege die Funktion $u(t) = u(t,x)$ mit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ in einem Banachraum E. Es wird angenommen, daß die Gleichung für jede Anfangsbedingung $u(0) = u_0 \in E$ eine eindeutige Lösung $u(t, u_0)$ für $t \geq 0$ besitzt. Es sei für alle $t \geq 0$ folgender nichtlinearer Lösungsoperator definiert

$$\begin{aligned} S(t) : E &\to E, \\ u_0 &\mapsto u(t, u_0). \end{aligned}$$

Die Familie von Operatoren $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ bildet eine Halbgruppe, falls $\mathcal{F}$ nicht explizit von t abhängt:

$$\begin{aligned} S(0) &= \mathbb{I}_E, \\ S(t+s)u_0 &= S(t)S(s)u_0 \quad \forall t, s \geq 0,\ u_0 \in E. \end{aligned}$$

Die Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sei stetig in $(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times E$. Sie unterscheidet sich vor allem in einer Hinsicht von dem Fluß zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung: Sie ist nur eine *Halb*gruppe, also nur für positive Zeiten definiert. Der Operator $S(t)$ ist möglicherweise für manche $t < 0$ nicht definiert, oder $S(-t)u_0$ ist nicht eindeutig bestimmt, d.h. es gibt mehrere verschiedene Punkte, die zur Zeit t den Punkt u_0 unter der Halbgruppe erreichen. Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Rückwärtseindeutigkeit der Halbgruppe ist die Injektivität von $S(t)$: Es existiert genau dann eine eindeutige Inverse $S(-t)$, falls $S(t)$ für $t \geq 0$ injektiv ist, vgl. [Tem88, S.17].
Bei der Konstruktion von invarianten Mannigfaltigkeiten muß prinzipiell zwischen der Zeit-1-Abbildung $S := S(1)$ und der kontinuierlichen Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ unterschieden werden. Im Folgenden wird zunächst ein Satz über die Existenz lokaler, invarianter Mannigfaltigkeiten von S in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes bewiesen. Es läßt sich dann zeigen, daß man durch Vorwärtsiteration der instabilen Mannigfaltigkeit von S gerade die globale instabile Mannigfaltigkeit von $S(t)$ erhält.

2.1 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten an einen hyperbolischen Fixpunkt

Betrachte also zuerst die Zeit-1-Abbildung $S := S(1)$. Der Punkt $z \in E$ sei ein *Fixpunkt* von S, d.h. $Sz = z$. Der Operator S sei in z *Fréchet-differenzierbar*, d.h. es gibt eine lineare Abbildung $dS := dS(z) : E \to E$, so daß gilt

$$S(z) - S(z') - \frac{dS(z)(z - z')}{\|z - z'\|} \to 0 \quad \text{für } z \to z' \text{ in } \mathcal{O},$$

einer Umgebung von z. Weiter erfülle dS die Hölderbedingung:

$$\|dSu_1 - dSu_2\| \le c_1 \|u_1 - u_2\|^{\alpha} \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{O},\ 0 < \alpha \le 1. \tag{2.1}$$

Der Fixpunkt $z \in E$ sei *hyperbolisch*, d.h.

1. $\sigma(dS(z)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} = \emptyset$,
2. Der lineare invariante Unterraum E_+ zur Spektralmenge $\{\lambda \in \sigma(dS(z)) \mid |\lambda| > 1\}$ besitzt endliche Dimension.

Die Spektralmenge $\sigma_+ := \{\lambda \in \sigma(dS(z)) \mid |\lambda| > 1\}$ erzeugt nach dem Zerlegungssatz 1.46 eine eindeutige Zerlegung von $E = E_- \oplus E_+$ in invariante Unterräume, so daß

$$\sigma(dS_+ := dS \circ P_+) = \sigma_+, \quad \sigma(dS \circ P_-) = \sigma \setminus \sigma_+$$

gilt, wobei P_+ und P_- die zugehörigen Spektralprojektoren bezeichnen. Da damit der Spektralradius $r(dS_+) > 1$ und E_+ endlichdimensional ist, ist dS_+ auf E_+ invertierbar. Die Inverse ist kontrahierend auf dem instabilen Eigenraum.
Definiere die instabile und stabile Mannigfaltigkeit wie folgt:[1]

$$\begin{aligned}
M_+(z) &:= \left\{u_0 \in E \mid \forall p \in \mathbb{N},\ \exists u_p \in E,\ u_0 = S^p(u_p),\ u_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} z\right\},\\
M_-(z) &:= \left\{u_0 \in E \mid \forall p \in \mathbb{N},\ \exists u_p \in E,\ u_0 = S^p(u_p),\ S^n(u_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z\right\}.
\end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich jetzt der folgende Satz über die Existenz von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes formulieren.

Satz 2.1. *[Tem88, S.394],[HP, S.141] Sei $S : E \to E$ Fréchet-differenzierbar und dS erfülle die Hölderbedingung* 2.1*. Seien z ein hyperbolischer Fixpunkt und E_-, E_+ die zugehörigen stabilen und instabilen Unterräume.* ***Dann*** *existieren für $\epsilon > 0$ hinreichend klein zwei Abbildungen g_+, g_-, so daß*

$$\begin{aligned}
&g_+ : \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_+(z) \to E_-(z), \quad g_+(z) = 0,\\
&g_- : \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_-(z) \to E_+(z), \quad g_-(z) = 0, \quad \textit{so daß}\\
&\qquad M_+^\epsilon(z) = \left\{ u \in E \mid u = (u_+, g_+(u_+)),\ u_+ \in \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_+(z) \right\},\\
&\qquad M_-^\epsilon(z) = \left\{ u \in E \mid u = (g_-(u_-), u_-),\ u_- \in \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_-(z) \right\}.
\end{aligned}$$

Die Abbildungen g_+, g_- sind Fréchet-differenzierbar, ihre Ableitungen dg_+, dg_- erfüllen die Hölderbedingung 2.1 *und $dg_-(z) = dg_+(z) = 0$.*
Damit ist $M_+^\epsilon(z)$ eine $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-Mannigfaltigkeit mit $\dim M_+^\epsilon(z) = \dim E_+(z)$.

[1] Es ist im Folgenden noch zu zeigen, daß es sich bei diesen Mengen um Mannigfaltigkeiten handelt.

Beweis: nach [Wel76]: Sei zunächst $\epsilon > 0$ beliebig. Bezeichne mit $R := S - dS$ den nichtlinearen Rest in $\mathcal{O}_\epsilon(z)$. Setze z o.B.d.A. in den Nullpunkt: $z = 0$. Nehme eine Folge $\mathcal{X} = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots) \in c_0(E)$, in dem Banachraum der Nullfolgen $\mathcal{X} = (x_i, y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $(x_i, y_i) \in E = E_+ \oplus E_-$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $|\mathcal{X}| := \sup_{i\in\mathbb{N}} \|(x_i, y_i)\|_E$.
Definiere auf der Umgebung des Nullpunktes $\mathcal{U}_0 = \left\{ \mathcal{X} \;\middle|\; (x_i, y_i) \in \mathcal{O}_\epsilon(z)\ \forall i \right\}$ folgende Abbildung g:

$$
\begin{aligned}
g : \mathcal{U}_0 &\to c_0(E), \\
g &= L + h, \text{ mit} \\
L(\mathcal{X})_i &:= \begin{cases} (0, dS_-(y_1)), & \text{für } i = 0, \\ \left(dS_+^{-1}(x_{i-1}), dS_-(y_{i+1})\right), & \text{für } i \geq 1, \end{cases} \\
h(\mathcal{X})_i &:= \begin{cases} (0, P_- \circ R\,((x_1, y_1))), & \text{für } i = 0, \\ \left(-dS_+^{-1} \circ P_+ \circ R\,(x_i, y_i)\,, P_- \circ R\,(x_{i+1}, y_{i+1})\right), & \text{für } i \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Es läßt sich mit folgendem Lemma zeigen, daß L und h und damit g stetig differenzierbar sind und ihre Ableitungen die Hölderbedingung 2.1 erfüllen, falls dies für S gilt:

Hilfslemma 2.2. [Wel76, S.288] Sei $f(0) = 0$ und $f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(E)$. **Dann** ist die Abbildung

$$
\begin{aligned}
Cf : c_0(E) &\to c_0(E) \\
[Cf(x)]_i &= f(x_i),\ i \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

ebenfalls $\mathcal{C}^{1,\alpha}(c_0(E))$ und die Abbildung $f \mapsto Cf$ ist stetig bezüglich der Supremumsnorm.
Weiter gilt

$$\mathrm{Lip}(g) \leq \max\left(\left\|dS_+^{-1}\right\|(1 + \mathrm{Lip}(R)),\ \|dS_-\| + \mathrm{Lip}(R)\right) < 1.$$

Aufgrund dieser Bedingung muß von dem Rest R vorausgesetzt werden, daß seine Lipschitzkonstante bezüglich der Normen von $\left\|dS_+^{-1}\right\|$ und $\|dS_-\|$ hinreichend klein ist. Genauer muß gelten:

$$\mathrm{Lip}(R) < \min\left(\left\|dS_+^{-1}\right\|^{-1} - 1,\ 1 - \|dS_-\|\right).$$

Wähle $\epsilon > 0$ so klein, damit dies erfüllt ist. Dann gilt auch $\mathrm{Lip}(g) < 1$, und es ist das Umkehrtheorem für Lipschitz-Abbildungen anwendbar, siehe [Wel76]:

Hilfslemma 2.3. [Wel76, S.286] Sei $f : U \to E$, $U \subset E$ Umgebung von 0, eine stetig differenzierbare Abbildung, die die Hölderbedingung mit $0 < \alpha \leq 1$ erfüllt, mit $f(0) = 0$ und sei $T : E \to E$ eine lineare, invertierbare Abbildung, so daß $\mathrm{Lip}(f - T)\left\|T^{-1}\right\| \leq \lambda < 1$. **Dann** ist f ein Homöomorphismus von U auf eine offene Menge $V \subset E$, f^{-1} ist ebenfalls $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Die Abbildung $f \to f^{-1}$ von dem entsprechenden Abbildungsraum ist stetig bezüglich der Supremumsnorm.

Ist nun $T = \mathbb{I}$ und $f = \mathbb{I} - g$, dann ist die Abbildung $G = Id - g$ mit obigem Lemma ein Homöomorphismus von $\mathcal{U}_0$ auf $G(\mathcal{U}_0)$ und G^{-1} ist ebenfalls aus der Klasse $\mathcal{C}^{1,\alpha}$.
Es sei

$$
\begin{aligned}
I_+ : \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_+ &\to c_0(E), \\
I_+(x_0) &= ((x_0, 0), (0, 0), \dots).
\end{aligned}
$$

Definiere eine Nullfolge durch $\mathcal{X}_0 = I_+(x_0)$ und die Vorschrift $\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_0 + g(\mathcal{X}_n)$. Dann ist $\mathcal{X}_n \in \mathcal{U}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$ existiert in $c_0(E)$, denn es ist $\lim \mathcal{X}_n = \sum_{n=0}^{\infty} g^n(\mathcal{X}_0)$ und g ist eine Kontraktion. Es gilt

$$\begin{aligned} G(\mathcal{X}) &= \lim(\mathbb{I} - g)(\mathcal{X}_{n+1}) = \lim(\mathbb{I} - g)(\mathcal{X}_0 + g(\mathcal{X}_n)) \\ &= \mathcal{X}_0 + \lim(g(\mathcal{X}_{n+1}) - g(\mathcal{X}_n)) = \mathcal{X}_0 = I_+(x_0). \end{aligned}$$

Also ist $I_+(x_0) \in R(G)$ im Bild von G, und die Abbildung

$$w(x) = G^{-1} \circ I_+(x)$$

ist auf $\mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_+$ wohldefiniert. Daraus folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} G \circ G^{-1}(I_+(x)) &= I_+(x), \\ G \circ w(x) &= I_+(x), \\ w(x) - g(w(x)) &= I_+(x), \\ w(x) &= I_+(x) + g(w(x)). \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich mit der Definition von g und I_+ wie folgt ausschreiben:

$$\begin{aligned} P_+ \circ w_0(x) &= x + 0, \\ P_- \circ w_0(x) &= dS_-(P_- \circ w_1(x)) + P_- \circ R(w_1(x)), \\ P_+ \circ w_i(x) &= dS_+^{-1}(P_+ \circ w_{i-1}(x)) - dS_+^{-1} \circ P_+ \circ R(w_i(x)), \quad i \geq 1, \\ P_- \circ w_i(x) &= dS_-(P_- \circ w_{i+1}(x)) + P_- \circ R(w_{i+1}(x)), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit $P_+^2 = P_+$ und der Vertauschbarkeit von P_+ und dS_+ für $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_+ \circ w_i(x) &= dS_+^{-1}(P_+ \circ w_{i-1}(x)) - dS_+^{-1} \circ P_+ \circ R(w_i(x)), \\ P_+ \circ w_i(x) &= P_+ \circ dS_+^{-1}(P_+ \circ w_{i-1}(x)) - P_+ \circ dS_+^{-1} \circ P_+ \circ R(w_i(x)), \\ dS_+ \circ P_+ \circ w_i(x) &= P_+ \circ w_{i-1}(x) - P_+ \circ R(w_i(x)), \\ dS_+ \circ P_+ \circ w_i(x) &= P_+ \circ w_{i-1}(x) - P_+ \circ S(w_i(x)) + dS_+ \circ P_+ \circ w_i(x), \\ 0 &= P_+ \circ w_{i-1}(x) - P_+ \circ S(w_i(x)), \\ P_+ \circ w_{i-1}(x) &= P_+ \circ S(w_i(x)),. \end{aligned}$$

Ebenso folgt für die Gleichungen mit P_- für $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_- \circ w_i(x) &= dS_-(P_- \circ w_{i+1}(x)) + P_- \circ R(w_{i+1}(x)), \\ P_- \circ w_i(x) &= dS_-(P_- \circ w_{i+1}(x)) + P_- \circ S(w_{i+1}(x)) - P_- \circ dS_-(P_- \circ w_{i+1}(x)), \\ P_- \circ w_i(x) &= P_- \circ S(w_{i+1}(x)). \end{aligned}$$

Also gilt

$$S(w_{i+1}(x)) = w_i(x), \quad i \geq 1.$$

Es ist $w(x) \in c_0(E)$ nach Konstruktion. Setze $g_+(x) := P_- \circ w_0(x)$. Dann ist $(x, g_+(x)) = w_0(x)$, denn es ist $P_+ \circ w_0(x) = x$. Weiter liegt $w_0(x)$ auf der instabilen Mannigfaltigkeit $M_+(z)$ von z, denn aus $S(w_{i+1}(x)) = w_i(x)$, $i \geq 1$ folgt $S^n(w_n(x)) = w_0(x)$ und $w_n(x) \to_{n\to\infty} 0$.
Sei umgekehrt $(u_+, u_-) \in M_+(z)$ ein Punkt auf der instabilen Mannigfaltigkeit. Dann

gibt es nach Definition eine Folge $u = (u_0, u_1, \dots) \in c_0(E)$, so daß $u_0 = (u_+, u_-)$ und $S^p(u_p) = u_0$, also ist $S(u_p) = u_{p-1},\ \forall p \in \mathbb{N}$. Die Folge u erfüllt also die Bedingung $S(w_{i+1}(x)) = w_i(x),\ i \geq 1$ und damit auch die obigen projezierten Gleichungen, denn dS_+ ist invertierbar. Auch G ist invertierbar, und damit folgt $u = w(x)$ und also $u_- = g_+(u_+)$. Damit läßt sich die instabile Mannigfaltigkeit als Graph der Abbildung g_+ schreiben:

$$M_+(z) = \left\{ \ (u_+, g_+(u_+)) \ \middle| \ u_+ \in \mathcal{O}_\epsilon(z) \cap E_+ \ \right\}.$$

Die Abbildung g_+ ist stetig differenzierbar, und die Ableitung erfüllt die Hölderbedingung 2.1, denn für G^{-1} gilt dies. Der Beweis für $M_-(z)$ geht analog. □

Bemerkung 2.4.

1. Die Differenzierbarkeitseigenschaften von S vererben sich an die Abbildungen g_+, g_-. Ist also beispielsweise $S \in \mathcal{C}^p,\ p \geq 1$, oder S Lipschitz-stetig, so gilt dies auch für g_+ und g_-. Dies garantiert insbesondere das Umkehrtheorem. Es sei darauf hingewiesen, daß der Fixpunkt z dabei immer fest bleibt.

2. Wie groß die Umgebung von z, also $\epsilon > 0$ gewählt werden kann, ist abhängig von den Eigenschaften des nichtlinearen Restes $S - dS$, denn dessen Lipschitzkonstante muß auf der ganzen Umgebung hinreichend klein bleiben. Wie klein, ist abhängig von den Normen von dS_- und dS_+^{-1}. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich, den Rest „abzuschneiden“, so daß dessen Norm auf dem ganzen Raum gleich klein bleibt: Dies ist insbesondere möglich, wenn E ein Hilbertraum ist. Muß die Norm nur in die instabile Richtung klein bleiben, genügt es, daß E_+ endlichdimensional ist.

3. Der Satz läßt sich auf allgemeine invariante Mannigfaltigkeiten ausweiten: dazu muß die Lipschitzkonstante von R entsprechend der Asymptotik auf den Mannigfaltigkeiten angepaßt werden.

Nun betrachte das kontinuierliche dynamische System $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

- z sei ein Fixpunkt: $S(t)z = z$ für $t \geq 0$.
- $u \mapsto S(t)u$ ist Fréchet-differenzierbar für alle $t \geq 0$ auf einer Umgebung $\mathcal{O}$ von z.
- Die Ableitung $dS(t)$ erfüllt für alle $t \in [0, T]$ die Hölderbedingung 2.1.

Weiter sei der Fixpunkt z *hyperbolisch*, d.h.

1. z ist ein hyperbolischer Fixpunkt von $S(t)$ für $t > 0$.
2. E_+, E_-, die entsprechenden invarianten Unterräume zu $dS(t)z$, sind unabhängig von der Zeit t.

Auch für den kontinuierlichen Fall lassen sich analog zu dem diskreten System instabile und stabile Mannigfaltigkeiten definieren:

$$M_+(z) := \left\{ u_0 \in E \ \middle| \ \forall t \leq 0,\ \exists u(t) \in S(-t)^{-1} u_0,\ u(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} z. \right\},$$
$$M_-(z) := \left\{ u_0 \in E \ \middle| \ \forall t \leq 0,\ \exists u(t) \in S(-t)^{-1} u_0,\ S(t)u_0 \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} z. \right\}.$$

Mit der Bezeichnung $W_+(z)$ für die instabile Mannigfaltigkeit des diskreten System gilt nun zunächst das folgende Lemma:

Lemma 2.5. *[Tem88, S.397]*

$$W_+(z) = M_+(z).$$

Beweis: Zeige zunächst $M_+(z) \subset W_+(z)$: Sei $u_0 \in M_+(z)$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein vollständiger Orbit $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, so daß $u_0 = u(0)$ und $u(t) \to z$ für $t \to -\infty$. Betrachte nun den Teilorbit $\{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Also ist $u_0 \in W_+(z)$.
Zeige nun $W_+(z) \subset M_+(z)$. Sei $u_0 \in W_+(z)$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $u_0 = S^n u_n = S(n)u_n$ und $u_n \to z$. Definiere nun einen vollständigen Orbit $\{S(t)u_0\}_{t\in\mathbb{R}}$: Für $t \geq 0$ ist dieser einfach durch die Lösungshalbgruppe definiert, also $S(t)u_0 =: u(t)$. Für $t < 0$ setze $u(-n) := u_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und für $t = -n + \tau$, $0 < \tau < 1$, $n \in \mathbb{N}$, setze $u(t) := S(\tau)u_n$. Es bleibt zu zeigen

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = z.$$

Es gilt bereis $u(-n) = u_n \to z$, da $u_0 \in W_+(z)$ liegt. Also bleibt nur zu zeigen:

$$\sup_{0\leq\tau\leq 1} \|S(\tau)u_n - z\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Die Menge $\{u_n\}_n \cup \{z\}$ ist kompakt. Also ist auch $\{u_n\}_n \cup \{z\} \times [0,1]$ kompakt. Da $S(t)u_0$ in t und u_0 stetig ist, ist sie auf der Menge $\{u_n\}_n \cup \{z\} \times [0,1]$ gleichmäßig stetig. Daraus folgt insbesondere

$$\sup_{0\leq\tau\leq 1,\ \|u_n - z\|\leq\delta} \|S(\tau)u_n - S(\tau)z\| \to 0 \text{ für } \delta \to 0.$$

Da z nach Voraussetzung ein Fixpunkt ist, folgt damit die Behauptung. $\square$

Unter den obigen Voraussetzungen gilt nun der folgende Satz. Dabei bezeichne $W_+^\epsilon(z)$ die lokale instabile Mannigfaltigkeit der Zeit-1-Abbildung S.

Satz 2.6. *[Tem88, S.398] Sei $S(t)$ eine Halbgruppe von Operatoren, die die obigen Voraussetzungen erfüllt.* ***Dann*** *gilt für jedes $\epsilon > 0$ und jede zu $\|\ \|$ auf E äquivalente Norm*

$$M_+(z) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S^k\left(W_+^\epsilon(z)\right).$$

Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ läßt sich $W_+^\epsilon(z)$ als Graph einer differenzierbaren Abbildung g_+ darstellen.

Beweis: Mit U sei die Menge $\bigcup_{k=0}^{\infty} S^k\left(W_+^\epsilon(z)\right)$ bezeichnet. Zeige zunächst $M_+(z) \subset U$. Sei $u_0 \in M_+(z)$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein vollständiger Orbit $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, so daß $u_0 = u(0)$ und $u(t) \to z$ für $t \to -\infty$. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $u(-n) \in \mathcal{O}_\epsilon(z)$ für $n \geq n_0$. Also ist $u(-n_0) \in W_+^\epsilon(z)$ und $u_0 = S^{n_0}u(-n_0) \in U$.
Zeige nun $U \subset M_+(z)$. Sei $v_0 \in U$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $u_0 \in W_+^\epsilon(z)$, so daß $v_0 = S^k u_0$. Aber es gilt mit dem Lemma 2.1 die Gleichheit
$W_+^\epsilon(z) \subset W_+(z) = M_+(z)$. Also ist $v_0 \in S^k(M_+(z))$. Die instabile Mannigfaltilgkeit $M_+(z)$ ist positiv invariant unter $S(t)$ und damit folgt $v_0 \in M_+(z)$. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Die zweite Behauptung ist die Aussage des Satzes 2.1. $\square$

Bemerkung 2.7. $M_+(z)$ muß keine Mannigfaltigkeit sein, denn S ist nicht als injektiv vorausgesetzt, ebensowenig wie dS. Erst wenn S und dS auf allen Punkten $x \in M_+(z)$ injektiv sind, garantiert der folgende Satz, daß $M_+(z)$ eine injektiv immergierte Mannigfaltigkeit derselben Dimension wie $W_+^\epsilon(z)$ ist.

Satz 2.8. *[Hen81, S.154] Sei X Banachraum, U offen in X, $T : U \to X$ sei $\mathcal{C}^r$-Abbildung und S sei eine $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit von U.*
Falls S endlichdimensional ist und lokal negativ invariant, und falls T und $T'(x)$ injektiv für alle $x \in S^+ = \bigcup_{n\geq 0} T^n(S)$ ist, dann ist S^+ eine injektiv immergierte $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit mit derselben Dimension wie S, die positiv invariant ist und lokal negativ invariant.
Falls S endliche Kodimension besitzt und lokal positiv invariant ist, und falls T injektiv und das Bild von $T'(x)$ für jedes $x \in S^- = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(S)$ in X dicht ist, dann ist S^- eine injektiv immergierte $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit in U mit derselben Kodimension wie S, die negativ invariant und lokal positiv invariant ist.

Bemerkung 2.9.

1. Handelt es sich bei T um einen Lösungsoperator einer nichtlinearen Evolutionsgleichung $u_t + Au = f(u)$, dann kann man die Injektivität von der Lösungshalbgruppe $S(t)$ wie folgt zeigen: Gibt es ein $k \in L^2(0,T)$, so daß
$$\|f(S(t)u_0) - f(S(t)v_0)\| \leq k(t)\, \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_\alpha \tag{2.2}$$
gilt, dann folgt aus $S(\tau)u_0 = S(\tau)v_0$ für $0 < \tau < T$ die Gleichheit $S(t)u_0 = S(t)v_0$ auf dem ganzen Intervall $[0,T]$, also die Injektivität von $S(t)$ für $t \geq 0$. Diese Behauptung folgt direkt aus dem Satz 1.62.

2. Um zu zeigen, daß das Bild von $T'(x)$ dicht ist, prüft man, ob die Adjungierte $(T'(x))^*$ injektiv ist.

3. Die Topologie von S^+ bzw. S^- muß nicht mit der Relativ-Topologie von $U \subset X$ übereinstimmen. Die Mannigfaltigkeiten sind im allgemeinen nur immergierte und nicht eingebettete Untermannigfaltigkeiten in X.

2.2 Satz von Chen, Hale und Tan: Invariante Mannigfaltigkeiten und Blätterungen

Mit den bisherigen Sätzen kann die Existenz von invarianten Mannigfaltigkeiten an einen Fixpunkt des dynamischen Systems unter den entsprechenden Voraussetzungen gezeigt werden. Der folgende Satz von Chen, Hale und Tan liefert die Existenz einer Blätterung des Banachraums über die globale invariante (instabile) Mannigfaltigkeit an einen Fixpunkt. Dafür muß die Lipschitz-Konstante des nichtlinearen Restes der Halbgruppe, wenn man diese am Fixpunkt linearisiert, nur hinreichend klein sein.
Leider lassen sich, so wie der Satz formuliert ist, keine weitreichenden Aussagen über das asymptotische Verhalten der Punkte eines Blattes machen.

Satz 2.10. *[CHT97, S.286] Sei $(E, \| \|)$ ein Banachraum, und $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ eine auf $\mathbb{R}^+ \times E$ stetige Halbgruppe. Weiter seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

1. *Es gebe eine Konstante $q > 0$, so daß*
$$\sup_{0\leq t\leq q} \operatorname{Lip}(S(t)) = D < \infty.$$

2. *Es gelte für ein $\tau \in (0,q]$, daß $S(\tau) = L + R$ ist. Dabei ist $L : E \to E$ eine beschränkte, lineare Abbildung, und $R : E \to E$ ist eine globale Lipschitz-Abbildung mit $R(0) = 0$.*

3. *Es gebe eine Zerlegung $E = E_+ \oplus E_-$, so daß L die Zerlegung invariant läßt. Die Abbildungen $L \circ P_- =: L_- : E_- \to E_-$ und $L \circ P_+ =: L_+ : E_+ \to E_+$ auf den invarianten Unterräumen seien wie oben definiert. Es gelte für $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$ und $C_1, C_2 \geq 1$:*

$$\left\|L_+^{-n}\right\| \leq C_1 \alpha_1^{-n},$$
$$\left\|L_-^{n}\right\| \leq C_2 \alpha_2^{n},\ n \geq 0.$$

4. *Für die Lipschitz-Konstante von R gelte folgende Abschätzung:*

$$\frac{(\sqrt{C_1}+\sqrt{C_2})^2}{\alpha_1-\alpha_2}\operatorname{Lip}(R) < 1.$$

Für $\gamma \in (\alpha_2, \alpha_1)$ sei

$$\lambda(\gamma) = \frac{C_1}{\alpha_1-\gamma} + \frac{C_2}{\gamma-\alpha_2}.$$

Es existieren γ_1 und γ_2, so daß $\operatorname{Lip}(R)\lambda(\gamma_1) = \operatorname{Lip}(R)\lambda(\gamma_2) = 1$ gilt und $\operatorname{Lip}(R)\lambda(\gamma) < 1$ für alle $\gamma \in (\gamma_2, \gamma_1)$ ist.

***Dann** gibt es eine globale Lipschitz-Abbildung g, so daß $g : E_+ \to E_-$, $g(0) = 0$ und $G := \{(u, g(u)) : u \in E_+\}$ eine Lipschitz-Untermannigfaltigkeit mit folgenden Eigenschaften ist:*

1. *Die Halbgruppe kann eingeschränkt auf G zu einer Gruppe fortgesetzt werden. Für alle $\xi \in G$ gibt es einen eindeutigen negativen Halborbit $\{u(t)\}_{t\leq 0}$, so daß $u(0) = \xi$. Die Mannigfaltigkeit G ist invariat unter $S(t)$ für alle $t \geq 0$.*

2. *Ist $\{u(t)\}_{t\leq 0} \subset G$, dann gilt:*

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|u(t)\| \leq -\frac{1}{\tau} \ln \gamma_1.$$

Gilt umgekehrt

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|u(t)\| < -\frac{1}{\tau} \ln \gamma_2,$$

dann ist $\{u(t)\}_{t\leq 0} \subset G$.

3. *Es gibt eine stetige Abbildung $h : E \times E_- \to E_+$, so daß für alle $x = (x_1, x_2) \in G$: $h(x, x_2) = x_1$ und*

$$M_x = \{(h(x,v), v) : v \in E_-\},$$

so daß $S(t)(M_x) \subset M_{S(t)x}, n \geq 0$. Es gilt:

$$M_x = \left\{ y \in E \;\Big|\; \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)y\| \;\leq\; \frac{1}{\tau} \ln \gamma_2 \right\}.$$

Die Familie $\{M_x\}$ von Mannigfaltigkeiten bildet eine Blätterung über G.

4. *Weiter gelte:*

$$\left[\min_{\gamma_2\leq\gamma\leq\gamma_1} \frac{C_1C_2\operatorname{Lip}(R)}{(\alpha_1-\gamma)(1-\lambda(\gamma)\operatorname{Lip}(R))}\right] \cdot \left[\min_{\gamma_2\leq\gamma\leq\gamma_1} \frac{\gamma C_1C_2\operatorname{Lip}(R)}{\alpha_1(\gamma-\alpha_2)(1-\lambda(\gamma)\operatorname{Lip}(R))}\right] < 1.$$

Dann besteht der Schnitt $M_\xi \cap G$ für alle $\xi \in E$ aus genau einem Punkt, und es ist

$$M_\xi \cap M_\eta = \emptyset \text{ für } \xi \neq \eta \text{ und } \bigcup_{\xi\in G} M_\xi = E.$$

5. *Ist $S(\tau)$ stetig differenzierbar, so sind g und h in E_--Richtung stetig differenzierbar. Also sind G und M_ξ für jedes $\xi \in G$ stetig differenzierbare Mannigfaltigkeiten für jedes $x \in G$.*

Bemerkung 2.11.

1. Die vierte Voraussetzung des Satzes enthält eine Bedingung an die Spektrallücke $\alpha_1 - \alpha_2$. Umso größer die Lipschitzkonstante der Nichtlinearität R ist, desto größer muß auch die Spektrallücke sein, damit die Voraussetzung erfüllt ist.

2. Die Annahme $R(0) = 0$ setzt voraus, daß es sich bei 0 um einen Gleichgewichtspunkt handelt:

   - Ist 0 ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt, dann kann man $\alpha_2 < 1 < \alpha_1$ wählen, und G ist dann gerade die instabile Mannigfaltigkeit $W^u(0)$, sowie $M_0 = W^s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit an den Nullpunkt.
   - Ist 0 nicht hyperbolisch und $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ mit α_1 dicht an der 1, dann ist $G = W^{cu}(0)$ die zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit.
   - Ist 0 nicht hyperbolisch und $1 < \alpha_2 < \alpha_1$ mit α_2 dicht an der 1, dann ist G die strikt instabile Mannigfaltigkeit.

3. Ist E ein Hilbertraum und L ein selbstadjungierter Operator, dann läßt sich $C_1 = C_2 = 1$ wählen.

4. Es muß nicht vorausgesetzt werden, daß 0 ein Gleichgewichtspunkt ist, also $R(0) = 0$ gilt, falls $\gamma_2 < 1$ gewählt werden kann. Unter diesen Voraussetzungen gilt der Satz ebenfalls, allerdings muß für die Abbildung g nicht unbedingt $g(0) = 0$ gelten.

5. Aus dem Satz läßt sich auch die Existenz einer Inertialmannigfaltigkeit schließen und einer Blätterung über sie, falls die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind. Dazu mehr im Kapitel zu den Inertialmannigfaltigkeiten.

Beweis (Satz 2.10)*:* Der Satz 2.10 wird in zwei Schritten bewiesen: Zunächst wird eine entsprechende Aussage für eine diskrete Halbgruppe einer stetig differenzierbaren Abbildung S gezeigt, die dann auf eine kontinuierliche Halbgruppe verallgemeinert wird.

Hilfslemma 2.12. [CHT97, S.296] Sei $S = L + R$ eine Lipschitz-Abbildung in einem Banachraum E. Die Menge $\{u(n)\}_{n\leq 0} \subset E$ heißt negativer Halborbit von S, falls $S(u(n)) = u(n+1)$, $n \leq -1$ gilt. Definiere für jedes $\gamma \geq 0$ die folgende Menge

$$G(\gamma) := \left\{ u_0 \in E \;\middle|\; \exists \{u(n)\}_{n\leq 0} : u(0) = u_0,\ \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|u(n)\| \leq -\ln\gamma \right\}.$$

und für jedes $x \in E$ die Menge

$$M_x(\gamma) := \left\{ u_0 \in E \;\middle|\; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|S^n u_0 - S^n x\| \leq \ln\gamma \right\}.$$

Die Abbildungen L und R erfüllen die Voraussetzungen (3) und (4) aus dem Satz 2.10 und $R(0) = 0$. **Dann** gilt:

1. Es ist $G(\gamma) = G(\gamma_1)$ für $\gamma_2 < \gamma \leq \gamma_1$. Setze $G := G(\gamma_1)$, dann ist G S-invariant, und $S\big|_G$ ist ein Homöomorphismus mit einer globaler Lipschitz-Inversen. Insbesondere gibt es durch jedes $\xi \in G$ einen eindeutigen negativen Halborbit in G.

2. G ist der Graph einer globalen Lipschitz-Abbildung $g_+ : E_+ \to E_-$. Ist S stetig differenzierbar, so ist auch g_+ stetig differenzierbar.

3. Es ist $M_x(\gamma) = M_x(\gamma_2)$ für $\gamma_2 \leq \gamma < \gamma_1$ und jedes $x \in E$. Setze $M_x = M_x(\gamma_2)$, dann ist M_x der Graph einer globalen Lipschitz-Abbildung $h_x : E_- \to E_+$, die stetig von x abhängt. Ist S stetig differenzierbar, so ist h_x für jedes $x \in E$ stetig differenzierbar.

4. Erfüllt der Rest R eine stärkere Lipschitzbedingung entsprechend des Satzes 2.10, dann gilt weiter, daß die Familie $\{M_x\}_{x \in G}$ von Mannigfaltigkeiten eine Blätterung von E über G bildet.

Beweis (Hilfslemma 2.12)*:* Um das Hilfslemma zu beweisen, zeige zunächst folgende Aussage:

Hilfslemma 2.13. Sei $\{u_n\}_{n\leq 0} \subset E$ eine Menge, die die folgende Abschätzung erfülle

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|u_n\| < -\ln \alpha_2.$$

Dann ist die Menge $\{u_n\}_{n\leq 0}$ genau dann ein negativer Halborbit von S, wenn gilt

$$u_n = L_+ P_+ u_0 - \sum_{n\leq k<0} L_+^{n-k-1} P_+ R(u_k) + \sum_{k<n} L_-^{n-k-1} P_- R(u_k),\ n \leq 0.$$

Beweis (Hilfslemma 2.13)*:* Sei $\{u_n\}_{n\leq 0}$ ein negativer Halborbit, d.h. es ist $Lu_n + R(u_n) = S(u_n) = u_{n+1}$ für alle $n \leq 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
P_+ u_n &= L_+^n - \sum_{n\leq k<0} L_+^{n-k-1} P_+ R(u_k),\\
P_- u_n &= \sum_{k<n} L_-^{n-k-1} P_- R(u_k),\ n \leq 0.
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt zunächst, daß die Reihe aufgrund der Normen von L_- und L_+ und der Abschätzung der Folge $\{u_n\}_{n\leq 0}$ absolut konvergiert. Man erhält dann $u_{n+1} - Lu_n = R(u_n)$, also ist $\{u_n\}_{n\leq 0}$ ein negativer Halborbit von S. Damit ist das Hilfslemma bewiesen. □

Weiter im Beweis des Hilfslemmas 2.12. Zeige nun die Aussagen (1) und (2): Betrachte hierzu die Gleichungen mit festem $y_+ \in E_+$:

$$u_n = L_+ P_+ y_+ - \sum_{n\leq k<0} L_+^{n-k-1} P_+ R(u_k) + \sum_{k<n} L_-^{n-k-1} P_- R(u_k), \quad n \leq 0. \tag{2.3}$$

Gesucht sind die Lösungen $u_n \in E$ dieser Gleichungen 2.3. Durch folgende Umbenennungen wird deutlicher, daß es sich bei ihnen um Lyapunov-Perron-Gleichungen[2] handelt:

[2]Eine kurze Einführung in die Lösungstheorie von Lyapunov-Perron-Gleichungen findet sich im Anhang A.3

Bezeichne mit E_n für $n \in \mathbb{Z}$ Kopien des Banachraums E mit der Norm $|x|_{E_n} := \gamma^{-n} \|x\|_E$ für alle $x \in E$ und ein beliebiges $\gamma \in (\gamma_2, \gamma_1)$.
Definiere die Abbildungen $S_n : E_+ \to E_n$, $R_{k,n} : E_k \times E_+ \to E_n$ durch

$$S_n(y_+) := \begin{cases} 0 & , \ n > 0, \\ L_+^n y_+ \ y_+ \in E_+ & , \ n \leq 0, \end{cases}$$

$$R_{k,n}(a) := \begin{cases} 0 & , \ n > 0 \text{ oder } k \geq 0, \\ -L_+^{n-k-1} P_+ R(a) & , \ n \leq k < 0, \\ L_-^{n-k-1} P_- R(a) & , \ k < n \leq 0. \end{cases}$$

Die Abbildungen S_n sind lineare, beschränkte Operatoren. Die Gleichungen 2.3 lassen sich dann als

$$u_n = S_n y_+ + \sum_k R_{k,n}(u_k) \quad n \in \mathbb{Z}$$

schreiben.
Die Voraussetzungen an S_n und $R_{k,n}$ für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz A.11 von Lösungen von Lyapunov-Perron-Gleichungen lassen sich leicht nachprüfen. Damit kann man zeigen, daß zu jedem $y_+ \in E_+$ eine eindeutige Lösung $\{F_n(y_+)\}_{n \leq 0}$ existiert, so daß F_n für $n \leq 0$ global Lipschitz-stetig ist. Mit Hilfe der Abschätzungen mit γ_1 und γ_2 und dem Hilfslemma 2.13 läßt sich die Aussage (2) des Hilfslemmas 2.12 beweisen.
Nun zum Beweis der Aussage (3) des Hilfslemmas 2.12: Sei $(x, y_-) \in E \times E_-$ gegeben. Gesucht sind die Lösungen v_n der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_n = L_-^n(y_- - P_- x) - \sum_{k \geq n} L_+^{n-k-1} P_+(R(v_k + S^k x) - R(S^k x)) \\ + \sum_{0 \leq k < n} L_-^{n-k-1} P_-(R(v_k + S^k x) - R(S^k x)), \ n \geq 0. \end{aligned}$$

Wie oben handelt es sich bei diesen Gleichungen um Lyapunov-Perron-Gleichungen. Die Voraussetzungen für die Existenz von eindeutigen Lösungen $\{F_n(x, y_-)\}_{n \geq 0}$ zu jedem $(x, y_-) \in E \times E_-$ sind wiederum erfüllt. Die Abbildungen F_n sind stetig und gleichmäßig Lipschitz-stetig in E_--Richtung für $n \geq 0$. Setze $y := (x, F_0(x, y_-))$ und definiere eine Mannigfaltigkeit

$$N_x := \left\{ (x, F_0(x, y_-)) \;\middle|\; y_- \in E_- \right\}.$$

Es läßt sich zeigen: $M_x = N_x$. Durch $h_x(y_-) := P_+ (x, F_0(x, y_-))$ läßt sich eine Abbildung definieren, deren Graph M_x ist.
Die Aussage (4) des Hilfslemmas 2.12 folgt, falls $\operatorname{Lip}(h_x) \operatorname{Lip}(g_+) < 1$ gilt. Denn dann gilt der Satz, daß sich die Graphen zweier global Lipschitz-stetigen Abbildungen genau in einem Punkt schneiden. $\square$

Mit Hilfe der Aussage des Hilfslemmas 2.12 läßt sich nun der Satz 2.10 beweisen, indem die Aussage auf den Fall einer kontinuierlichen Halbgruppe verallgemeinert wird: Setze $S := S(\tau)$ und wende das Lemma 2.12 an. Damit existiert eine Mannigfaltigkeit G, die Graph einer Lipschitz-Abbildung $g : E_+ \to E_-$ ist. Jeder negative Halborbit $\{u(n, u_0)\}_{n \leq 0}$ zu $u_0 \in G$ erfüllt die Abschätzung

$$\limsup_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|u(n, u_0)\| \ \leq \ -\ln \gamma_1$$

und liegt damit ganz in G.
Sei $u_0 \in G$ beliebig, $0 \leq s < \tau$ und $\{S(s)(u(n,u_0))\}_{n\leq 0}$ ein negativer Halborbit für $S := S(\tau)$ durch $S(s)(u_0)$. Die Abbildung $S(s)$ ist nach Voraussetzung des Satzes 2.10 Lipschitz-stetig, d.h. es gilt für alle $n \leq 0$

$$\|S(s)(u(n,u_0))\| \leq D \|u(n,u_0)\|.$$

Damit folgt

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|S(s)(u(n,u_0))\| \;\leq\; -\ln \gamma_1.$$

Dann liegt $S(s)(u_0)$ in G und also folgt $S(s)G \subset G$ für $0 \leq s < \tau$.
Andererseits ist $u(-1,u_0)$ für jedes $u_0 \in G$ in G enthalten wegen der Invarianz von G bezüglich S. Da $S(s)G \subset G$ für $0 \leq s < \tau$ ist, ist $S(\tau - s)(u(-1,u_0))$ wiederum in G enthalten. Daraus folgt

$$S(s)(S(\tau - s)(u(-1,u_0))) = S(\tau)(u(-1,u_0)) = u_0 \in S(s)G.$$

Also ist $G \subset S(s)G$ für $0 \leq s < \tau$. Damit ist die Invarianz von G unter $S(s)$ für $0 \leq s < \tau$ gezeigt, also $G = S(s)G$, und daraus ergibt sich wiederum die Invarianz von G unter der stetigen Abbildung $S(t),\ t \geq 0$.
Setze den Halbfluß nun zu einem Fluß $T(t) : G \to G$ fort: Für $t \geq 0$ setze $T(t) := S(t)$. Für $t < 0$ schreibe $t = n\tau + s$ für alle $-n \in \mathbb{N}$ und setze $T(t) = S(s)(u(n))$ für $0 \leq s < \tau$. Damit ist ein Fluß $T(t) : G \to G$ auf G definiert. Die Aussage (1) des Satzes 4.8 ist damit bewiesen. Nun zum Beweis von Aussage (2): Sei $\{u(t)\}_{t\leq 0}$ ein negativer Halborbit von $S(t)$ auf G. Mit dem Lemma 2.12 folgt dann

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|u(n)\| \leq -\ln \gamma_1.$$

Mit $t = n\tau + s$ ist $S(s)u(n) = u(t)$, und also folgt

$$\frac{1}{|t|} \ln \|u(t)\| \;\leq\; \frac{1}{|t|} \ln(D \|u(n)\|) = \frac{|n|}{|t|} \frac{1}{|n|} \ln \|u(n)\| + \frac{1}{|t|} \ln D.$$

Mit $t \to -\infty$ ergibt sich damit der erste Teil von Aussage (2). Für den zweiten Teil sei $\{u(t)\}_{t\leq 0} \subset E$ ein negativer Halborbit von $S(t)$, so daß

$$-\frac{1}{\tau} \ln \gamma := \limsup_{t\to-\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|u(t)\| \;\leq\; -\ln \gamma_2.$$

Also ist $\{u(n\tau)\}_{n\leq 0} \subset G(\gamma)$. Setze $\gamma' := \min\{\gamma, \gamma_1\}$. Es ist also $\gamma_2 < \gamma' \leq \gamma_1$ und also $G(\gamma) \subset G(\gamma')$. Mit dem Lemma 2.12 folgt $G(\gamma') = G(\gamma_1) = G$. Also ist $u(n\tau) \in G$ für alle $n \leq 0$. Damit ist die Aussage (2) bewiesen.
Die Aussage (3) wird analog mit Hilfe des Lemmas 2.12 bewiesen. Ebenso folgen die Aussagen (4) und (5) direkt aus den entsprechenden Aussagen des Lemmas 2.12.

Beispiel 2.14. Betrachte die nichtlineare Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u), \quad t \geq 0.$$

Sei 0 ein Fixpunkt, also gilt $f(0) = df(0) = 0$. Sei A ein von unten beschränkter, sektorieller Operator. Dann ist e^{-At} eine analytische Halbgruppe in X. Sei $a < \inf \left\{ \Re(\lambda) \;\middle|\; \lambda \in \sigma(A) \right\}$, dann bezeichne $A_1 := A + a\mathbb{I}$ einen positiven, sektoriellen Operator und $E^\alpha := D(A_1^\alpha)$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ die Definitionsbereiche. Es gebe ein $0 \leq \alpha \leq 1$, so daß $f : E^\alpha \to E$ Lipschitz-stetig mit konstanter Lipschitz-Konstante $\mathrm{Lip}(f)$ ist. Dann besitzt die Evolutionsgleichung zu jedem Anfangswert $u_0 \in E$ eine eindeutige Lösung als Lösung der Integralgleichung

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u(s))ds.$$

Damit ist ein dynamisches System $S(t)u_0 = u(t)$ auf E definiert. Für ein $\tau > 0$ läßt sich $S(\tau)$ in

$$L = e^{-A\tau}u_0, \quad R = \int_0^\tau e^{-A(\tau-s)}f(u(s))ds$$

zerlegen. Für L gelten die Abschätzungen 1.4, also $\|L\| \leq Ce^{-a\tau}$. Somit ist L beschränkt. Weiter gebe es Konstanten $\beta_1 > \beta_2$ mit $\beta_2 < 0$, so daß es die folgende Spektralzerlegung von $\sigma(A)$ gibt:

$$\begin{aligned}\sigma_1(A) &= \left\{ \lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \Re(\lambda) \geq \beta_1 \right\}, \\ \sigma_2(A) &= \left\{ \lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \Re(\lambda) \leq \beta_2 \right\} = \sigma(A) \setminus \sigma_1(A).\end{aligned}$$

Dann gibt es auch eine Spektralzerlegung für L mit $\alpha_2 = e^{-\beta_1} \geq 0$ und $\alpha_1 = e^{-\beta_2} > 1$ und eine zugehörige invariante Zerlegung von E. Es läßt sich dann zeigen, daß für eine hinreichend kleine Lipschitz-Konstante $\mathrm{Lip}(f)$ und geeignetes α die Lipschitz-Konstante von R hinreichend klein wird, so daß eine invariante Mannigfaltigkeit existiert und eine invariante Blätterung des Banachraums über diese Mannigfaltigkeit.

In diesem Kapitel wurde dargelegt, unter welchen Bedingungen invariante Mannigfaltigkeiten zu einer (kontinuierlichen oder diskreten) Halbgruppe in einem Banachraum existieren. Im Folgenden sollen diese Mannigfaltigkeiten in Zusammenhang mit der globalen Dynamik einer partiellen Differentialgleichung gebracht werden. Dazu bieten sich globale Attraktoren an, die alle beschränkten Mengen unter Wirkung der Halbgruppe anziehen. Die globale Dynamik der partiellen Differentialgleichung ist bekannt, sobald das Verhalten der Lösungen eingeschränkt auf den Attraktor bekannt ist. Die instabilen Mannigfaltigkeiten sind immer im globalen Attraktor enthalten. Es wird im folgenden Kapitel also zunächst untersucht, inwieweit sich Blätterungen auf dem Attraktor beschreiben lassen.

Kapitel 3

Globale Attraktoren

Ein physikalisches System, in dem Energie beispielsweise durch Wärme verloren geht, nennt man dissipativ. Ebenso wird die zugehörige Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ der partiellen Differentialgleichung, die ein solches System beschreibt, als dissipativ bezeichnet. Auf diese Systeme beschränkt sich das folgende Kapitel. Dissipative Systeme besitzen eine absorbierende Menge, d.h. eine beschränkte Menge, die Lösungen zu allen Anfangswerten unter Wirkung der Lösungshalbgruppe anzieht. Aus der Existenz einer solchen absorbierenden Menge allein folgt aber noch nicht die Existenz eines globalen Attraktors: Dazu muß zusätzlich verlangt werden, daß die positiven Halborbits beschränkter Mengen relativ kompakt sind. Diese Voraussetzung ist beispielsweise erfüllt, falls für $t > t_0 \geq 0$ alle $S(t)$ kompakt sind. Ein globaler Attraktor ist eine kompakte, invariante Menge, meist endlicher fraktaler Dimension, von der alle Orbits angezogen werden. Alle Gleichgewichtspunkte und instabilen Mannigfaltigkeiten liegen vollständig in diesem Attraktor. Besitzt die partielle Differentialgleichung darüber hinaus eine Lyapunov-Funktion, so läßt sich zeigen, daß der Attraktor gerade aus der Vereinigung aller instabilen Mannigfaltigkeiten besteht.
Da alle Orbits nach einer bestimmten Zeit in eine Umgebung des Attraktors eintreten und sie nicht mehr verlassen, läßt sich die Dynamik der partiellen Differentialgleichung annähernd durch die Dynamik auf dem Attraktor beschreiben. Bisher existieren relativ gute Dimensionsabschätzungen für den Attraktor, die angeben, wieviele Freiheitsgrade die Gleichung besitzt (vgl. [Bab06]); wie die Geometrie des Attraktors aussieht ist weniger bekannt.
Besteht die Möglichkeit mit Hilfe der invarianten Mannigfaltigkeiten und Blätterungen die Geometrie des Attraktors besser beschreiben zu können?
Zunächst einmal die grundlegenden Definitionen und Sätze zu globalen Attraktoren von partiellen Differentialgleichungen, die auch für das folgende Kapitel notwendig sind. Danach beschränkt sich die Untersuchung auf die Attraktoren von Gradientensystemen, deren Struktur sich bereits relativ gut beschreiben läßt. Als Beispiel wird die Reaktions-Diffusions-Gleichung allgemein und speziell die Chaffee-Infante-Gleichung ausführlicher behandelt. Dieses Beispiel führt auf die Klasse der Morse-Smale-Systeme, für die sich lokal Blätterungen im Attraktor definieren lassen.

3.1 Existenz von globalen Attraktoren

Auf dem Banachraum E wird im Folgenden der Halbabstand d_E verwendet; dabei sei d der von der Norm induzierte Abstand auf E:

$$d_E(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a), \quad x \in E, A \subset E,$$
$$d_E(A,B) := \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b) = \sup_{a\in A} d_E(a,B), \quad A,B \subset E.$$

Mit diesem Halbabstand lassen sich auch ϵ-Umgebungen von Mengen definieren. Durch die Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sei ein dynamisches System auf E definiert. Es wird keine Rückwärtseindeutigkeit vorausgesetzt, d.h. es kann mehrere Orbits $u_z : \mathbb{R}_- \to E$ mit Anfangswert z geben, die zu einer Zeit $-t$ dann verschiedene Punkte durchqueren.
Zur Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ läßt sich die ω-Limesmenge zu einer Teilmenge $X \subset E$ wie folgt definieren:

$$\omega(X) := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)X}^E .$$

Die ω-Limesmenge $\omega(X)$ ist die Menge aller Punkte u, zu denen eine Folge (t_n) existiert mit $t_n \to \infty$, so daß $S(t_n)x \to u$ für ein $x \in X$ gilt. Es ist eine positiv invariante Menge. Ist die Limesmenge $\omega(X)$ nichtleer, kompakt und zieht sie X an, d.h. gilt

$$d_E(S(t)X, \omega(X)) \to_{t\to\infty} 0,$$

dann ist $\omega(X)$ invariant und zusammenhängend. Ebenso läßt sich die α-Limesmenge definieren, falls sie existiert:

$$\alpha(X) := \bigcap_{s\leq 0} \overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}X}^E .$$

Der globale Attraktor wird als ω-Limesmenge einer geeigneten Teilmenge von E konstruiert. Deshalb stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen die ω-Limesmenge $\omega(X)$ zu einer Teilmenge $X \subset E$ nichtleer, kompakt und anziehend ist.
Im $\mathbb{R}^n$ ist dies immer dann der Fall, wenn der positive Halborbit $\gamma_\tau^+(X) = \bigcup_{t\geq\tau} S(t)X$ für ein $\tau \geq 0$ beschränkt ist. In unendlichdimensionalen Banachräumen muß die stärkere Voraussetzung gemacht werden, daß $\gamma_\tau^+(X)$ relativ kompakt ist. Damit diese Voraussetzung erfüllt wird, werden von der Halbgruppe zusätzliche Eigenschaften verlangt, wie z.B. gleichmäßige Kompaktheit oder asymptotische Glattheit. Diese werden im folgenden definiert.

Definition 3.1. [Tem88, S.23] Eine Halbgruppe $\{S(t)\}$ heißt **gleichmäßig kompakt**, falls zu jeder beschränkten Menge $\mathcal{B}$ ein $\tau = \tau(\mathcal{B}) \geq 0$ existiert, so daß

$$\gamma_\tau^+(\mathcal{B}) \;=\; \bigcup_{t\geq\tau} S(t)\mathcal{B} \;\subset\; E$$

relativ kompakt in E ist.

Satz 3.2. *[Tem88, S.24] Ist $S(t)$ stetig für $t \geq 0$ und die Halbgruppe $\{S(t)\}$ gleichmäßig kompakt, dann ist $\omega(\mathcal{B})$ für jede nichtleere beschränkte Menge $\mathcal{B} \subset E$ nichtleer, kompakt und invariant.*

Beweis: Da $\mathcal{B}$ nichtleer ist, ist auch $\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}$ für jedes $s > 0$ nichtleer. Da $\{S(t)\}$ gleichmäßig kompakt ist, ist

$$\overline{\bigcup_{t>s} S(t)\mathcal{B}} \subset E$$

für alle $s > \tau$ eine kompakte, nichtleere Menge, die mit wachsendem s kleiner wird. Der Schnitt einer abnehmenden Folge kompakter, nichtleerer Mengen ist ebenfalls nichtleer und kompakt, also gilt dies für $\omega(\mathcal{B})$. Es folgt direkt aus der Definition von $\omega(\mathcal{B})$, daß die Menge invariant unter $S(t)$ für $t > 0$ ist: Sei $v_0 \in S(t)\omega(\mathcal{B}),\ t > 0$, dann existiert $u_0 \in \omega(\mathcal{B})$, so daß $v_0 = S(t)u_0$. Es gibt also eine Folge (t_n) mit $t_n \to \infty$ und eine Folge $(u_n) \subset \mathcal{B}$, so daß gilt

$$S(t_n)u_n \to u_0.$$

$$\text{Also folgt } S(t)S(t_n)u_n = S(t + t_n) \to S(t)u_0 = v_0.$$

Damit ist $v_0 \in \omega(\mathcal{B})$.
Umgekehrt sei $u_0 \in \omega(\mathcal{B})$. Dann existieren wieder Folgen (t_n) und (u_n) wie oben. Die Menge $\{S(t_n - t)u_n\}_{t_n \geq t}$ ist relativ kompakt in E, also existiert eine Teilfolge $t_{n_i} \to \infty$ und $v_0 \in E$, so daß

$$S(t_{n_i} - t)u_{n_i} \to v_0 \in E,\ t_{n_i} \to \infty.$$

Es folgt aus der Definition der ω-Limesmenge, daß $v_0 \in \omega(\mathcal{B})$.
Damit folgt

$$S(t)S(t_{n_i} - t)u_{n_i} = S(t_{n_i})u_{n_i} \to S(t)v_0 = u_0.$$

Also ist $u_0 \in S(t)\omega(\mathcal{B})$. □

Definition 3.3. [Rau02, S.896] Eine Halbgruppe $\{S(t)\}$ heißt **asymptotisch glatt**, falls zu allen beschränkten, abgeschlossenen und positiv invarianten Mengen $\mathcal{B} \subset E$ eine kompakte Menge $\mathcal{J}(\mathcal{B})$ existiert, so daß $\mathcal{J}$ die Menge $\mathcal{B}$ anzieht.

Ist $S(t)$ für $t > t_0 \geq 0$ kompakt, dann ist $\{S(t)\}$ asymptotisch glatt. Die Eigenschaften „asymptotisch glatt“ und „asymptotisch kompakt“ sind äquivalent. Der Begriff der asymptotisch kompakten Halbgruppe wird u.a. bei [Bab06] verwendet. Es gilt ein analoger Satz wie der Satz 3.2 für gleichmäßig kompakte Halbgruppen.

Satz 3.4. *[Rau02, S.897] Ist $\{S(t)\}$ asymptotisch glatt auf E und X eine nichtleere Teilmenge von E, so daß $\gamma_\tau^+(X)$ für ein $\tau \geq 0$ beschränkt ist, dann ist $\omega(X)$ nichtleer, kompakt, invariant und zieht X an.*

Definition 3.5. [Bab06, S.990]

- Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset X$ heißt **Attraktor** zu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, falls
  1. $\mathcal{A}$ invariant ist: $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ für $t \geq 0$,
  2. es eine Umgebung U von $\mathcal{A}$ gibt, so daß für alle $u_0 \in U$ gilt:

  $$d_E(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

- Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset X$ heißt ein **globaler Attraktor**, falls $\mathcal{A}$ ein kompakter Attraktor ist, der alle beschränkten Mengen $\mathcal{B}$ von X anzieht, d.h.

  $$d_E\left(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}\right) \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

Bemerkung 3.6. Ein globaler Attraktor ist *maximal* unter allen invarianten, beschränkten Mengen und *minimal* unter den Mengen, die alle beschränkten Mengen in E anziehen. Damit ist der globale Attraktor $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt. Ein kompakter globaler Attraktor $\mathcal{A}$ ist auch immer zusammenhängend.

Definition 3.7. [Rau02, S.902] Eine Halbgruppe $\{S(t)\}$ heißt **punktdissipativ** auf E, falls eine beschränkte Menge $\mathcal{B}_0 \subset E$ existiert, die jeden Punkt von E anzieht. Sie heißt **beschränkt dissipativ** auf E, falls sie jede beschränkte Menge von E anzieht.

Bemerkung 3.8. Die beschränkte Menge $\mathcal{B}_0$ nennt man dann auch eine *absorbierende Menge*. Besitzt die Halbgruppe $\{S(t)\}$ einen globalen Attraktor, so ist die Halbgruppe beschränkt dissipativ. Als absorbierende Menge läßt sich eine Umgebung des Attraktors wählen.

Satz 3.9. *[Rau02, S.904] Die Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ besitzt einen kompakten, globalen Attraktor $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$*

1. *$\{S(t)\}$ ist asymptotisch glatt.*
2. *$\{S(t)\}$ ist punkt dissipativ.*
3. *Für alle beschränkten Mengen $\mathcal{B} \subset E$ existiert ein $\tau > 0$, so daß $\gamma_\tau^+(\mathcal{B})$ beschränkt ist und gilt:*
$$\mathcal{A} = \bigcup \left\{ \omega\left(\mathcal{B}\right) \;\middle|\; \mathcal{B} \subset E \text{ beschränkt} \right\}.$$

$\mathcal{A}$ ist zusammenhängend.

Beweis: Für den Beweis des Satzes 3.9 sei zunächst das folgende Hilfslemma bewiesen:

Hilfslemma 3.10. [Rau02, S.904] Sei $\{S(t)\}$ punkt dissipativ auf E und zu jeder beschränkten Menge $\mathcal{B}$ existiere $\tau \geq 0$, so daß $\gamma_\tau^+(\mathcal{B}) := \bigcup_{t\geq\tau} S(t)\mathcal{B}$ beschränkt ist. **Dann** gibt es eine beschränkte Menge $\mathcal{B}_1$, so daß zu jeder kompakten Menge $K \subset E$ ein $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ und eine Zeit $t_1 = t_1(K) \geq 0$ existieren, so daß

$$S(t)\left(U_E(K,\epsilon)\right) \subset B_1 \;\forall t \geq t_1(K).$$

Beweis (Hilfslemma 3.10)*:* Die Halbgruppe $\{S(t)\}$ ist punkt dissipativ, also existiert eine offene, beschränkte Menge $\mathcal{B}_0$, so daß für jedes $x \in E$ ein Zeitpunkt $t_0(x) \geq 0$ existiert, so daß

$$S(t)x \;\subset\; \mathcal{B}_0, \quad t \geq t_0(x).$$

$S(t_0)$ ist stetig, also findet man $\epsilon > 0$, so daß

$$S(t_0)\left(U_E(x,\epsilon)\right) \;\subset\; \mathcal{B}_0,$$

Da $\mathcal{B}_0$ beschränkt ist, gibt es nach Voraussetzung ein τ, so daß $\gamma_\tau^+(\mathcal{B}_0)$ beschränkt ist. Für alle $s \geq \tau$ gilt damit:

$$S(s+t_0)\left(U_E(x,\epsilon)\right) \;\subset\; \gamma_\tau^+(\mathcal{B}_0) \equiv \mathcal{B}_1.$$

Sei K eine beliebige kompakte Menge. Dann gibt es eine Überdeckung von K aus endlich vielen Umgebungen $U_E(x_i,\epsilon_i), 1 \leq i \leq k$, mit $x_i \in K$. Es gibt ein $\epsilon(K)$, so daß $K \subset U_E(K,\epsilon(K)) \subset \bigcup_{i=1}^k U_E(x_i,\epsilon_i)$. Setze $t_1(K) := \max_{1\leq i\leq k}(\tau + t_0(x_i))$, und damit gilt:

$$S(t)\left(U_E(K,\epsilon(K))\right) \subset \mathcal{B}_1, \;\forall t \geq t_1.$$

Weiter im Beweis des Satzes 3.9: Die Hinrichtung ist klar. Für die Rückrichtung sei $\mathcal{B}_1$ die im Hilfslemma 3.10 konstruierte beschränkte Menge. Setze $\mathcal{A} := \omega(\mathcal{B}_1)$. Damit ist $\mathcal{A}$ nichtleer, kompakt, invariant und zieht $\mathcal{B}_1$ an. Insbesondere ist jede ω-Limesmenge $\omega(\mathcal{B})$ einer beschränkten Menge $\mathcal{B}$ wegen Voraussetzung (3) des Satzes 3.9 nichtleer, kompakt und zieht $\mathcal{B}$ an. Setze $K := \omega(\mathcal{B})$. Zu der kompakten Menge K existiert dann mit dem Hilfslemma 3.10 ein hinreichend kleines $\epsilon(K) > 0$. Wähle $\epsilon > 0$, so daß $0 < \epsilon < \epsilon(K)$. Da K als ω-Limesmenge die Menge $\mathcal{B}$ anzieht, gibt es ein $t_0 > 0$, so daß gilt

$$S(t)\mathcal{B} \ \subset \ U_E(K, \epsilon) \text{ für } t \geq t_0.$$

Also folgt für $t \geq 0$:

$$S(t)S(t_1(K) + t_0)\mathcal{B} \ \subset \ S(t)S\left(t_1(K)\right)U_E(K, \epsilon) \ \subset \ S(t)\mathcal{B}_1.$$

Da $\mathcal{A}$ als ω-Limesmenge die Menge $\mathcal{B}_1$ anzieht, zieht es also auch die Menge $\mathcal{B}$ an. Also handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen globalen Attraktor. Der Attraktor $\mathcal{A}$ enthält jede beschränkte, invariante Teilmenge von E und so insbesondere ω-Limesmenge für jede beschränkte Menge $\mathcal{B}$. Also folgt

$$\mathcal{A} = \bigcup \left\{\omega\left(\mathcal{B}\right) \ \middle| \ \mathcal{B} \subset E \right\}.$$

□

Satz 3.11. *[Tem88, S.23] Sei $\{S(t)\}$ eine für $t \geq 0$ stetige und gleichmäßig kompakte Halbgruppe. Weiter sei $\{S(t)\}$ beschränkt dissipativ, d.h. es existiert eine absorbierende Menge $\mathcal{B}$.* ***Dann*** *ist $\omega(\mathcal{B}) =: \mathcal{A}$ ein kompakter globaler Attraktor.*

Beweis: Da $\{S(t)\}$ gleichmäßig kompakt ist, gilt Satz 3.2: Also ist $\omega(\mathcal{B})$ nichtleer, kompakt und invariant. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A} := \omega(\mathcal{B})$ ein globaler Attraktor ist, der alle beschränkten Mengen anzieht. Hierzu nehme an, es existiere eine beschränkte Menge $\mathcal{B}_0$ und ein $\delta > 0$ und eine Folge $t_n \to \infty$, so daß gilt

$$d_E(S(t_n)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \ \geq \ \delta > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $b_n \in \mathcal{B}_0$, so daß gilt

$$d_E(S(t_n)b_n, \mathcal{A}) \ \geq \ \frac{\delta}{2} > 0, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\mathcal{B}$ absorbierend ist, existiert ein $t_1(\mathcal{B}_0) > 0$ und damit ein $n_0 > 0$, so daß $t_{n_0} \geq t_1$, so daß $S(t_n)b_n \subset \mathcal{B}$ für alle $t_n > t_{n_0} \geq t_1(\mathcal{B}_0)$. Wegen der gleichmäßigen Kompaktheit ist die Menge $\{S(t_n)b_n\}_{n \geq n_0}$ relativ kompakt und besitzt zumindest einen Häufungspunkt β:

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)b_{n_i}.$$

Da $S(t_1)b_{n_i} \in \mathcal{B}$, so gilt $\beta \in \mathcal{A}$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Besitzt eine Halbgruppe einen globalen Attraktor, sind alle instabilen Mannigfaltigkeiten an die Fixpunkte in ihm enthalten.

Satz 3.12. *[Tem88, S.399] Sei $S(t)$ wie im Satz 2.6. Weiter besitze $\{S(t)\}$ einen globalen Attraktor $\mathcal{A}$, und $z \in \mathcal{A}$ sei ein hyperbolischer Fixpunkt.* ***Dann*** *gilt*

$$\mathcal{A} \supset M_+(z) \supset W_+^\epsilon(z),$$

und für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist $W_+^\epsilon(z)$ eine $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim W_+^\epsilon(z) \ = \ \dim E_+(z)$. *Die Mannigfaltigkeit $W_+^\epsilon(z)$ ist für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ kompakt.*

Satz 3.13. *[Tem88, S.403] Sei $\{S(t)\}$ eine auf $\mathbb{R}_+ \times E$ stetige Halbgruppe, sei z ein hyperbolischer Fixpunkt und $dS(t)$ erfülle auf einer Umgebung $\mathcal{O}$ von z die Hölder-Bedingung* 2.1. *Es gelte:*

- $S(t)\big|_{M_+(z)}$ *sei eine Bijektion für $t > 0$.*
- $(S(t))^{-1}$ *sei stetig auf $M_+(z)$.*
- $dS(t)u_0$ *sei für $u_0 \in M_+(z)$ injektiv.*

Dann *ist $M_+(z)$ eine endlichdimensionale $\mathcal{C}^1$-immergierte Mannigfaltigkeit von E der Dimension* $\dim M_+(z) \;=\; \dim E_+(z)$.

Beweis: Die Zeit-1-Abbildung $S(1)$ ist nach Voraussetzung stetig differenzierbar in $u_0 \in E$. Weiter ist nach Satz 2.1 die lokale instabile Mannigfaltigkeit $W_+^\epsilon(z)$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ eine $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit. Weiter gilt nach Satz 2.6, daß gilt

$$M_+(z) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S(1)^k(W_+^\epsilon(z)).$$

Nach den Voraussetzungen des Satzes sind $S(1)$ und $dS(1)u_0$ für alle $u_0 \in M_+(z)$ injektiv. Dann gilt mit dem Satz 2.8, daß $M_+(z)$ eine injektiv immergierte $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M_+(z) = \dim W_+^\epsilon(z) = \dim E_+(z)$ ist, die positiv invariant ist. $\square$

Bemerkung 3.14. Analog kann man mit dem Satz 2.8 gezeigt werden, daß die stabile Menge

$$M_-(z) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S^{-k}(1)(W_-^\epsilon(z))$$

eine injektiv immergierte $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit ist, falls S injektiv ist und das Bild von $dS(y)$ für jedes $y \in M_-(z)$ dicht ist. Es gilt dann $\operatorname{codim} M_-(z) = \operatorname{codim} E_-(z)$.

Auch die instabilen Mengen von kompakten, invarianten Mengen sind im globalen Attraktor enthalten. Definiere dazu die *instabile Menge* von einer $S(t)$-invarianten $X \subset E$ als

$$M_+(X) := \left\{ u \in E \;\middle|\; u \in \{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \;:\; d_E(u(t), X) \to_{t\to-\infty} 0 \right\}.$$

Die instabile Menge einer invarianten Menge X ist ebenfalls invariant unter $S(t)$ für $t \geq 0$. Es gilt dann folgender Satz:

Satz 3.15. *[Tem88, S.400] Sei $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe in einem Banachraum E, die auf $\mathbb{R}_+ \times E$ stetig ist und einen globalen Attraktor $\mathcal{A}$ besitzt. Sei X eine kompakte, invariante Menge von $S(t)$.* ***Dann*** *gilt*

$$\begin{aligned} M_+(X) \;&\subset\; \mathcal{A} \text{ und für } X = \mathcal{A} \\ M_+(\mathcal{A}) \;&=\; \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $u \in M_+(X)$ und bezeichne $O := \{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ den vollständigen Orbit, der u enthält. Sei $u = u(0)$. Der Orbit O ist beschränkt, denn für $t \to -\infty$ nähert er sich X an, also gilt $d(u(t), X) \;\to\; 0$. Für $t \to \infty$ muß der Orbit $\mathcal{O}$ sich als beschränkte Menge dem globalen Attraktor nähern, also gilt $d(u(t), \mathcal{A}) \;\to\; 0$. Da die Halbgruppe stetig ist, ist die

Menge $\{u(t) \mid |t| \le T\}$ für jedes $T > 0$ beschränkt. Der globale Attraktor zieht aber alle beschränkten Mengen an, also gilt

$$d(S(t)O, \mathcal{A}) \to 0 \quad t \to \infty.$$

Da der Orbit invariant ist, folgt

$$d(O, \mathcal{A}) = 0.$$

Also ist $O \subset \mathcal{A}$ und damit folgt die erste Aussage $M_+(X) \subset \mathcal{A}$.
Für die zweite Aussage bleibt $\mathcal{A} \subset M_+(\mathcal{A})$ zu zeigen: Sei $u \in \mathcal{A}$, dann gehört u zu einem vollständigen Orbit O mit $u = u(0)$ als Anfangswert. Für positive Zeiten ist dieser Orbit eindeutig bestimmt, für negative Zeiten ist dies nur der Fall, falls $S(t)$ injektiv ist. Es gilt aber $d(u(t), \mathcal{A}) = 0$ für alle $t < 0$, denn der Orbit ist in $\mathcal{A}$ enthalten. Damit ist aber gerade die Definition der instabilen Menge für u erfüllt, also $u \in M_+(\mathcal{A})$. □

3.2 Attraktoren von Gradientensystemen

Die Attraktoren von Gradientensystemen, d.h. von Systemen mit einem Lyapunov-Funktional, lassen sich als Vereinigung globaler instabiler Mannigfaltigkeiten schreiben. Durch die maximale Dimension dieser instabilen Mannigfaltigkeiten läßt sich die Hausdorff-Dimension des globalen Attraktors von unten abschätzen.

Definition 3.16. [Tem88, S.401] Ein stetiges Funktional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ heißt **Lyapunov-Funktional**, falls gilt

$$\Phi\left(S(t)u\right) \le \Phi(u) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in E.$$

Es heißt **striktes Lyapunov-Funktional**, falls gilt:

$$\Phi(S(t)u) = \Phi(u)\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow u \text{ ist Gleichgewichtspunkt.}$$

Die Menge der Gleichgewichtspunkte $\mathcal{E} := \{z \in X \mid S(t)z = z\ \forall t \ge 0\}$ ist invariant und abgeschlossen.

Für die Theorie der Gradientensysteme ist der folgende Satz von LaSalle wichtig:

Satz 3.17 (Invarianzprinzip von LaSalle)**.** *[Rau02, S.937] Sei $\{S(t)\}$ ein Gradientensystem auf E mit einem Lyapunov-Funktional Φ.*

1. *Ist $z \in E$ ein Punkt, so daß $\gamma_\tau^+(z)$ relativ kompakt in X ist,* ***dann*** *gilt: Der Grenzwert $l = \lim_{t\to\infty} \Phi(S(t)z)$ existiert und $\Phi(v) = l$ für jedes $l \in \omega(z)$, und die Limesmenge $\omega(z)$ ist in der Menge der Gleichgewichtspunkte $\mathcal{E}$ enthalten; insbesondere gilt dadurch: $d_E(S(t)z, \mathcal{E}) \to_{t\to\infty} 0$.*

2. *Sei u_z ein negativer Halborbit durch $z \in E$. Ist $u_z(\mathbb{R}_-)$ relativ kompakt,* ***dann*** *ist die Menge $\alpha_{u_z}(z)$ nichtleer, kompakt, invariant und besteht nur aus Gleichgewichtspunkten: $\alpha_{u_z}(z) \subset \mathcal{E}$ und $d_E(u_z(-t), \alpha_{u_z}(z)) \to_{t\to\infty} 0$. Weiter ist die α-Limesmenge zusammenhängend.*

Bemerkung 3.18. Ist die Menge der Gleichgewichtspunkte $\mathcal{E}$ diskret, dann folgt aus dem Satz 3.17, daß jeder Punkt z gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergiert, falls der positive Halborbit von z relativ kompakt ist. Der Orbit durch z ist also konvergent. Für gleichmäßig kompakte Halbgruppen mit einem Lyapunov-Funktional sind die Voraussetzungen von (1) also immer erfüllt.

Es gilt dann der folgende Satz über globale Attraktoren von Gradientensystemen.

Satz 3.19. *[Tem88, S.401] Sei $\{S(t)\}$ eine auf $\mathbb{R}_+ \times E$ stetige Halbgruppe, die ein Lyapunov-Funktional F besitzt, das auf $\mathcal{F} \subset E$ definiert und stetig ist, und einen globalen Attraktor $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.* ***Dann*** *ist*

$$\mathcal{A} = M_+(\mathcal{E}).$$

Ist $\mathcal{E}$ diskret und beschränkt, so ist $\mathcal{E}$ endlich und

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} M_+(z).$$

Bemerkung 3.20. Entscheidend und restriktiv ist die Voraussetzung eines auf $\mathcal{F} \subset E$ *stetigen*, globalen Funktionals. Es gibt Fälle, in denen eine Halbgruppe zwar ein globales Lyapunov-Funktional besitzt, aber dieses nicht auf dem Definitionsgebiet der Halbgruppe stetig ist. Ebenso ist wichtig, daß es relativ kompakte positive (bzw. negative) Halborbits $\gamma_\tau^+(z)$ in E gibt, so daß dann unter Anwendung des Invarianz-Prinzips von LaSalle 3.17 der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} \Phi(S(t)z)$ existiert und $\omega(z) \subset \mathcal{E}$ gefolgert werden kann (bzw. $\alpha(z) \subset \mathcal{E}$).

Beweis: Zeige zunächst $M_+(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Es gilt natürlich $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, da alle Fixpunkte im Attraktor liegen. $\mathcal{E}$ ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Es folgt nun mit Satz 3.15, daß die instabile Menge $M_+(\mathcal{E})$ im Attraktor enthalten ist.
Zeige nun $\mathcal{A} \subset M_+(\mathcal{E})$. Sei $u_0 \in \mathcal{A}$. Dann gehört u_0 gehört zu einem vollständigen Orbit $\{u(t)\} \subset \mathcal{A}$. Da $S(t)u_0$ in t und u_0 stetig ist, ist die Menge

$$\gamma = \bigcap_{s<0} \overline{\{u(t),\ t < s\}}$$

nichtleer, kompakt, zusammenhängend und invariant: Es gilt $\gamma \subset \alpha(u_0)$. Die Mengen $\overline{\{u(t),\ t < s\}}$ sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathcal{A}$ und damit kompakt. Sie bilden für $s < 0$ eine absteigende Folge von kompakten Mengen, und damit ist γ kompakt und nichtleer. Die einzelnen Mengen sind wegen der Stetigkeit der Halbgruppe zusammenhängend, und damit ist es auch der Schnitt. Die Invarianz ist aufgrund der Definition klar.
Das Lyapunov-Funktional F ist konstant auf γ, denn es gilt

$$F|_\gamma = \lim_{t \to -\infty} F(u(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} F(u(t)).$$

Das Funktional F ist entlang der Orbits monoton fallend und als stetige Funktion auf dem kompakten Attraktor nach oben beschränkt. Also existiert der obige Grenzwert $\lim_{t \to -\infty} F(u(t))$. Jeder Punkt $u_1 \in \gamma$ ist so der Grenzwert einer Folge $u(t_n)$ mit $t_n \to -\infty$, und somit folgt $F|_\gamma = \lim_{t \to -\infty} F(u(t))$.
Aus der Invarianz $S(t)\gamma = \gamma$ für $t \geq 0$ und aus $F(S(t)u_1) = F(u_1) = \lim_{t \to -\infty} F(u(t))$ für alle $u_1 \in \gamma$ folgt, daß u_1 ein Fixpunkt ist, da das Lyapunov-Funktional F strikt ist. Damit besteht γ nur aus Fixpunkten, also gilt: $\gamma \subset \mathcal{E}$. Es folgt $u_0 \in M_+(\mathcal{E})$ und also $\mathcal{A} \subset M_+(\mathcal{E})$.

Ist $\mathcal{E}$ diskret, dann folgt aus der Stetigkeit des Lyapunov-Funktionals, daß γ nur aus einem Fixpunkt z bestehen kann und $u(t) \to z$ für $t \to -\infty$. Damit ist $u_0 \in M_+(z)$. Es folgt $\mathcal{A} \subset \bigcup_{z \in \mathcal{E}} M_+(z)$.
Es läßt sich analog wie oben zeigen, daß die ω-Limesmenge $\omega(u_0)$ ebenfalls nur aus einem einzigen Fixpunkt z' bestehen kann. Der Punkt u_0 liegt in $M_+(z)$ und damit auch wegen der Invarianz das gesamte positive Halborbit $\{u(t)\}_{t \geq 0}$ in der instabilen Mannigfaltaigkeit. Also besteht der Attraktor gerade aus Fixpunkten und sie verbindende heteroklinen Orbits. □

Die instabilen und stabilen Mannigfaltigkeiten von Gradientensystemen sind immer eingebettete Untermannigfaltigkeiten, sofern sie global existieren. Dies zeigt der folgende Satz von Henry:

Satz 3.21. *[Hen81, S.156] Sei $S : U \subset E \to E$ eine injektive $\mathcal{C}^r$-Abbildung auf einen Banachraum E. An einen hyperbolischen Fixpunkt $z \in U$ gebe es eine instabile und eine stabile Mannigfaltigkeit $W^u_{loc}(z)$ und $W^s_{loc}(z)$, die sich zu $\mathcal{C}^r$-immergierten Mannigfaltigkeiten $W^u(z)$ und $W^s(z)$ nach Satz 2.8 fortsetzen lassen. Es existiere weiter ein striktes, stetiges Lyapunovfunktional $\Phi : U \to \mathbb{R}$.* ***Dann*** *sind die Mannigfaltigkeiten $W^s(z)$ und $W^u(z)$ eingebettete Untermannigfaltigkeiten in U, die sich nur in z schneiden.*

Besitzt eine Halbgruppe ein globales Lyapunov-Funktional, ist ihre Fixpunktmenge $\mathcal{E}$ endlich und jeder Fixpunkt hyperbolisch, dann nennt man den dazugehörigen Attraktor *regulär*. Ein regulärer Attraktor läßt sich noch genauer mit Hilfe der instabilen Mannigfaltigkeiten an die Fixpunkte beschreiben. Er ist die disjunkte Vereinigung der instabilen Mannigfaltigkeiten an die Fixpunkte. Diese sind stetig differenzierbare Mannigfaltigkeiten endlicher Dimension. Die Hausdorff-Dimension des Attraktors ist dann gleich der maximalen Dimension der instabilen Mannigfaltigkeiten. Zur Veranschaulichung der Struktur regulärer Attraktoren diskutiere ich im Folgenden ausführlicher den Fall der *Reaktions-Diffusions-Gleichung.*

3.2.1 Die Reaktions-Diffusions-Gleichung

Die Reaktions-Diffusions-Gleichung ist ein Beispiel für ein Gradientensystem, an dem sich - insbesondere im Eindimensionalen - die Struktur des Attraktors gut beschreiben läßt. Die Darstellung folgt größtenteils [Rau02, S.948 ff.]. Sei

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) + g(x), \quad t > 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion sei und $g \in L^2(\Omega) =: E$. Es sei $A := -\Delta$, dann ist $E^\alpha = D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_0(\Omega)$. Es gelte für die Funktion f die Abschätzung

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq C_0(1 + |y_1|^\alpha + |y_2|^\alpha)\,|y_1 - y_2|\,, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ C_0, \alpha > 0;\ (n-2)\alpha < 2.$$

Die Abbildung $u \in E^\alpha \mapsto f(u)$ ist damit Lipschitz-stetig auf beschränkten Mengen. Betrachte nun die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -Au(t) + f(u(t)) + g, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da A ein positiv definiter, selbstadjungierter und damit sektorieller Operator ist und f Lipschitz-stetig auf E^α ist, existiert eine eindeutige Lösung zu jedem Anfangswert $u_0 \in E^\alpha$. Man setze weiter voraus, daß

$$yf(y) \leq C_2 + \mu y^2, \quad F(y) := \int_0^y f(s)ds \leq C_2 + \frac{1}{2}\mu y^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

gilt, wobei $\mu < \lambda_1$ gewählt sei; dabei ist λ_1 der kleinste Eigenwert von A. Damit sind alle Lösungen gleichmäßig beschränkt.
Das Lyapunov-Funktional lautet

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\Delta u|^2 - F(u) - g(x)u(x) \right) dx.$$

Dieses ist sogar ein striktes Lyapunov-Funktional. Mit Hilfe von Φ läßt sich zeigen, daß die Lösungen global existieren und Orbits von beschränkten Mengen beschränkt sind. Damit ist die Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ auf ganz E^α definiert und injektiv. Da A eine kompakte Resolvente besitzt und die Bilder von beschränkten Mengen unter f beschränkt sind, gilt mit dem Satz 1.63, daß jeder positive Halborbit in einer kompakten Menge in E^α enthalten ist. Damit ist $S(t)$ für $t > 0$ kompakt und die Voraussetzungen des Satzes 3.11 für die Existenz eines globalen Attraktors sind erfüllt.
Die Menge der Gleichgewichtspunkte

$$\mathcal{E} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \;\middle|\; \Delta u + f(u) + g = 0 \right\}$$

ist in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt.
Damit gilt weiter mit dem Satz 3.19, daß der globale Attraktor in $H_0^1(\Omega) = E^\alpha$ folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{A} = M_+(\mathcal{E}).$$

Erfüllt die Nichtlinearität f höhere Differenzierbarkeitsvorausstzungen, dann läßt sich zeigen, daß die Gleichgewichtspunkte $z \in \mathcal{E}$ für $g \in L^2(\Omega)$ generischerweise hyperbolisch sind. Sind alle Gleichgewichtspunkte hyperbolisch, gilt

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z\in\mathcal{E}} M_+(z).$$

Die Dimension des Attraktors ist dann gerade die maximale Dimension der instabilen Mannigfaltigkeiten:

$$\dim_H \mathcal{A} = \max_{z\in\mathcal{E}} \dim M_+(z).$$

Die invarianten Mannigfaltigkeiten $M_+(z)$ und $M_-(z)$ sind $\mathcal{C}^1$-eingebettete Untermannigfaltigkeiten der Dimension bzw. Kodimension gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte des Operators $A - d_u f(z)$. Für $\Omega \subset \mathbb{R}$ schneiden sich die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten immer transversal, und jedes Orbit $S(t)u_0$ ist konvergent für $t \to \infty$. Im Höherdimensionalen ist im Allgemeinen nicht bekannt, wann sich die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten transversal schneiden. An folgendem Beispiel einer eindimensionalen Reaktions-Diffusions-Gleichung läßt sich die Struktur des Attraktors noch genauer mit Hilfe der invarianten Mannigfaltigkeiten beschreiben.

Beispiel 3.22. [Hen81, S.118ff.],[Bab06, S.1017] Das *Chaffee-Infante-Problem* lautet

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda(u - au^3),\ a > 0,\ \lambda \geq 0,\\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0,\\ u(x,0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

Sei $E = L^2(0,\pi)$, $A\phi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$ für glattes ϕ mit $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$. Der Operator A läßt sich zu einem positiv definiten, selbstadjungierten Operator auf E fortsetzen:

$$\begin{aligned}(A\phi,\phi) &= -\int_0^\pi \phi''(x)\phi(x)dx\\ &= \int_0^\pi \phi'(x)^2 dx \geq 0,\ \text{für } \phi \in H_0^1(0,\pi),\ \text{und}\\ (A\phi,\psi) &= (A\psi,\phi),\ \text{für } \phi,\psi \in H_0^1(0,\pi).\end{aligned}$$

Dann gilt für den Definitionsbereich $D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ und $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(0,\pi)$. Der Operator A besitzt eine kompakte Resolvente, und sein Spektrum $\sigma(A)$ besteht aus den einfachen Eigenwerten n^2 mit $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(u) = u - au^3$ ist Lipschitz-stetig in $E^{\frac{1}{2}} = E^\alpha$, denn für $\|\phi\|_\alpha \leq \rho$ und $\|\psi\|_\alpha \leq \rho$ gilt $\|f(\phi) - f(\psi)\|_\alpha \leq L(\rho)\|\phi - \psi\|_\alpha$, wobei L eine stetige Funktion ist. Die Chaffee-Infante-Gleichung definiert also ein dynamisches System $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ auf E^α, und mit der Gleichung 2.2 folgt sogar die Injektivität von $S(t)$ für $t > 0$.
Für jedes λ ist die triviale Lösung 0 eine Gleichgewichtslösung. Die Linearisierung in einer Umgebung des Nullpunkts lautet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda v.$$

Das Spektrum von $\sigma(A - \lambda\mathbb{I}) = \{n^2 - \lambda\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ ergibt, daß $u = 0$ nur dann ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht in E^α ist, falls $\lambda < 1$, denn dann sind alle Eigenwerte strikt positiv. Ansonsten ist $u = 0$ instabil. Für $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ gibt es dann genau n Eigenwerte, die negativ sind.
Das System besitzt folgendes Lyapunov-Funktional:

$$V(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}u'(x)^2 - \lambda\int_0^{u(x)} f(v)dv\right)dx,\ u \in H_0^1(0,\pi) = E^\alpha.$$

Ist u eine Lösung, dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\dot{V}(u) &= \int_0^\pi \partial_x u \partial_{xt} u - \lambda f(u)\partial_t u dx,\\ &= -\int_0^\pi (\partial_{xx} u + \lambda f(u))\,\partial_t u dx,\\ &= -\int_0^\pi \partial_t u^2 dx\\ &= -\|\partial_t u\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Das Lyapunov-Funktional ist also sogar strikt, denn $\dot{V}(t) = 0$ genau dann, wenn $\partial_t u = 0$ ist, also wenn $u(t)$ eine Gleichgewichtslösung ist. Das Funktional V fällt also monoton entlang der Orbits:

$$V(u(0)) \geq V(u(t)).$$

Weiter ist V nach unten beschränkt, denn zu jedem ϵ existiert eine Konstante C_ϵ, so daß

$$uf(u) \leq \epsilon u^2 + C_\epsilon.$$

Damit läßt sich dann V wie folgt für $0 < \epsilon \leq \frac{\lambda}{4}$ und mit $\int_0^\pi \phi'(x)^2 \geq \int_0^\pi \phi(x)^2$ nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} V(\phi) &\geq \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\phi'(x)^2 - \lambda \int_0^\pi \epsilon\phi(x)^2 \right) dx - \pi\lambda C_\epsilon, \text{ mit} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\lambda \right) \int_0^\pi \phi'(x)^2 dx - \pi\lambda C_\epsilon \\ &\geq \frac{1}{4} \|\phi\|_{\frac{1}{2}}^2 - \pi\lambda C_\epsilon. \end{aligned}$$

Also ist ein Orbit nach oben beschränkt für $t > 0$

$$\|u(t)\|_{\frac{1}{2}}^2 \leq 4 \left(\pi\lambda C_\epsilon + V(u(0)) \right),$$

und damit existiert die Lösung für alle Zeiten in $H_0^1(0, \pi)$ und ist beschränkt und sogar präkompakt nach dem Satz 1.63. Damit ist $S(t)$ für $t > 0$ kompakt, also auch gleichmäßig kompakt. Es läßt sich dann der Satz 3.2 anwenden: Die ω-Limesmenge zu jeder Anfangsbedingung $u(0)$ ist nichtleer, kompakt und zusammenhängend. Sie ist nach dem Satz 3.17 in der Menge aller Gleichgewichtspunkte $\mathcal{E} = \left\{ \phi \mid \dot{V}(\phi) = 0 \right\}$ enthalten.

$$\dot{V}(\phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi''(x) + \lambda f(\phi(x)) = 0, \ \phi(0) = \phi(\pi) = 0.$$

Die Gleichgewichtslösungen sind also gerade diejenigen Lösungen $\phi(x)$, für die das Lyapunov-Funktional konstant ist:

$$\frac{1}{2}\phi'(x)^2 - \lambda \int_0^{\phi(x)} f(v)dv = c.$$

Mit der Bezeichnung $F(\phi) := \int_0^\phi f(v)dv$ kann man die Gleichung wie folgt nach $\phi'(x)$ auflösen:

$$\phi'(x) = \pm\sqrt{2(c - \lambda F(\phi))}.$$

Es gibt genau dann eine Lösung ϕ mit $\phi'(0) = \pm\sqrt{2c}$, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\pi = n(l_+(c) + l_-(c)) + d$ gilt, wobei $d = 0$, $d = l_+(c)$ oder $d = l_-(c)$ ist. Denn ϕ ist auf dem Intervall von $[0, \pi]$ definiert, und es gilt $\phi(0) = 0 = \phi(\pi)$. Bezeichne also $l_+(c)$ den Intervall, den ϕ benötigt, um von 0 bis zu $m_+(c)$ die Kurve zu durchlaufen, so daß $F(m_+(c) = \phi(l_+(c))) = \frac{c}{\lambda}$ gilt. Verfahre analog mit $l_-(c)$. Dann muß es eine ganze Anzahl dieser Umläufe des Nullpunkts geben, damit ϕ bei π wieder auf $\phi(\pi) = 0$ ankommt. Die Länge dieses Intervalls läßt sich durch Lösen der obigen Differentialgleichung mit Trennung der Variablen berechnen:

$$\int_0^{m_+(c)} \frac{d\phi}{\sqrt{2(c - \lambda F(\phi))}} = \int_0^{l_+(c)} dx = l_+(c).$$

Das Integral läßt sich mit dem Arkus-Sinus ausrechnen:

$$l_+(c) = \frac{2\sqrt{2}}{(4c - \lambda)\sqrt{\lambda}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{4c - \lambda}\sqrt{\lambda}}{2} (\phi^2(x) - 1) \right) \Big|_0^{m_+(c)}.$$

Aus diesen Überlegungen folgt, daß es zu jedem $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ genau $2n+1$ Gleichgewichtslösungen gibt, nämlich $\phi_0 = 0$ und $\phi_k^{\pm}$ mit $k = 1, \dots, n$. Jedes dieser $\phi_k^{\pm}$ hat genau $(k-1)$ Nullstellen auf dem Intervall $(0, \pi)$, und die Ableitung im Nullpunkt ist positiv $\frac{d}{dx}\phi_k^+(0) > 0$ bzw. negativ $\frac{d}{dx}\phi_k^-(0) < 0$.
Die Lösungen $\phi_1^{\pm}$ sind stabil für $\lambda > 1$ und schneiden die x-Achse kein einziges Mal, deshalb ist $\phi_1^+ > 0$. Definiere für $\phi := \phi_1^+$ die folgende Funktion:

$$z(x) := -(\lambda\phi'(0))^{-1}\phi''(x) = (\phi'(0))^{-1} f(\phi(x)).$$

Dann ist $z(x) > 0$ für $0 < x < \pi$ und $z(0) = 0, z(\pi) = 0$ und $z'(0) = 1$. Für $0 < x < \pi$ gilt wegen $f''(\phi) = -6\phi < 0$:

$$z''(x) + \lambda f'(\phi(x))z(x) = \frac{f''(\phi(x))(\phi'(x))^2}{\phi'(0)} < 0.$$

Die am Gleichgewichtspunkt ϕ linearisierte Gleichung lautet

$$\psi''(x) + \lambda f'(\phi)\psi(x) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

und damit folgt mit einem Vergleichstheorem von Henry [Hen81, S.123], daß $\psi(x) > z(x) > 0$ für $0 < x < \pi$ ist. Damit ist jede Lösung der an ϕ linearisierten Gleichung auf dem ganzen Intervall positiv. Also ist ϕ_1^+ asymptotisch stabil. Ebenso läßt sich die asymptotische Stabilität von ϕ_1^- zeigen. Die übrigen Gleichgewichtspunkte sind alle instabil.
Damit liegt die Vermutung nahe, daß sich fast alle Lösungen den asymptotisch stabilen Gleichgewichtslösungen $\phi_1^{\pm}$ annähern werden. Dies ist im folgenden zu zeigen:
Es läßt sich zeigen, daß die Menge $\mathcal{E}$ ausschließlich aus hyperbolischen Gleichgewichtspunkten besteht, d.h. daß das Spektrum von

$$A - \lambda\frac{df}{du}(\phi) = A - \lambda(1 - 3a\phi^2)$$

nicht die imaginäre Achse schneidet. Dabei ist ϕ eine Gleichgewichtslösung. Mit dem Satz über implizite Funktionen kann man weiter zeigen – da $f \in \mathcal{C}^2$ ist –, daß $\mathcal{E}$ diskret und somit kompakt ist. Es gilt dann

$$E = \bigcup_{\phi\in\mathcal{E}} W^s(\phi),$$

und jede stabile Mannigfaltigkeit ist eine $\mathcal{C}^1$-eingebettete Untermannigfaltigkeit von E. Da für $\lambda > 1$ die Gleichgewichtslösungen $\phi_1^{\pm}$ stabil sind, ist die Kodimension von der stabilen Mannigfaltigkeiten $W^s(\phi_1^{\pm})$ gleich null, also ist $W^s(\phi_1^+) \cup W^s(\phi_1^-)$ eine dichte Menge in $H_0^1(0, \pi)$.
Die Lösungshalbgruppe ist beschränkt dissipativ und besitzt deshalb eine absorbierende Menge B_λ. Wegen der Kompaktheit der Lösungshalbgruppe existiert nach Satz 3.11 ein globaler Attraktor $\mathcal{A}_\lambda = \omega(B_\lambda)$. Es läßt sich zeigen, daß

$$\mathcal{A}_\lambda = \bigcup_{\phi\in\mathcal{E}} W^u(\phi) = \overline{W^u(0)}$$

den globalen Attraktor des Chafee-Infante-Problems darstellt. Dies folgt aus dem Satz 3.19 über die Attraktoren von Gradientensystemen. Es gilt: $\dim \mathcal{A}_\lambda = \max_{\phi\in\mathcal{E}} \dim W^u(\phi)$. Die Gleichgewichtslösung $\phi_0 \equiv 0$ besitzt eine genau n-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit $W^u(0)$, falls $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ gilt. Betrachte für jede weitere Gleichgewichtslösung

die linearisierte Gleichung und die zugehörigen Eigenwerte $n^2 - \lambda(1 - 3a\phi_k^2)$. Der letzte Summand ist immer positiv und verringert deshalb die Anzahl der negativen Eigenwerte, also gilt: $\dim W^u(\phi) < n$ für alle $\phi \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$. Der globale Attraktor ist also n-dimensional, und es ist $\mathcal{A}_\lambda = \overline{W^u(0)}$.
Sei $1 < \lambda < 4$, dann gibt es nur die Gleichgewichtslösungen 0, ϕ_1^+ und ϕ_1^-. $W^u(0)$ besteht aus 0 und einem eindeutigen Orbit von 0 nach ϕ_1^+ und einem eindeutigen Orbit von 0 nach ϕ_1^- und ist also eindimensional.
Sei $4 < \lambda < 9$, dann gibt es zusätzlich die Gleichgewichtslösungen $\phi_2^\pm$, und $\mathcal{A}_\lambda$ ist zweidimensional. Betrachte die Schnitte $W^u(0) \cap W^s(\phi_1^\pm)$. Sie sind nichtleere, in $W^u(0)$ offene Mengen, die aber nicht ganz $W^u(0)$ enthalten können, weil $W^u(0)$ zusammenhängend ist. Also gibt es einen nichtkonstanten Orbit $u(t) \to 0$ für $t \to -\infty$, der für $t \to \infty$ aber nicht gegen $\phi_1^\pm$ strebt. Er muß aber gegen einen Gleichgewichtspunkt streben, weil die Limesmengen kompakte zusammenhängende Mengen in der diskreten Fixpunktmenge $\mathcal{E}$ sind und also jeweils nur aus einem Gleichgewichtspunkt bestehen können. Sei also $u(t) \to \phi_2^+$. Dann ist $u(\pi - x, t)$ ebenfalls eine Lösung, die für $t \to \infty$ gegen ϕ_2^- strebt. Da die instabilen Mannigfaltigkeiten $W^u(\phi_2^\pm)$ eindimensional sind, gibt es eine Lösung $v(t) \to \phi_2^+$ für $t \to -\infty$ und $v(t) \to \phi_1^+$ für $t \to \infty$. Die gespiegelte Lösung $v(\pi - x, t)$ verbindet dann ϕ_1^- und ϕ_2^- miteinander. In diesem Fall gibt es immer dann heterokline Orbits, die zwei Gleichgewichtslösungen $\phi \to \psi$ verbinden, falls $\dim W^u(\phi) > \dim W^u(\psi)$, also $V(\phi) > V(\psi)$. Allgemein gibt es für $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ immer dann einen heteroklinen Orbit zwischen $\phi_k^\pm$ und $\phi_j^\pm$, falls $1 \leq j < k$ gilt und immer zu den stabilen Gleichgewichten $\phi_1\pm$.

Das Chaffee-Infante-Problem besitzt also einen regulären Attraktor, der sich durch heterokline Orbits zwischen Gleichgewichtspunkten beschreiben läßt. Ein regulärer Attraktor wird wie folgt genau definiert:

Definition 3.23. [Bab06, S.1017] Ein Attraktor $\mathcal{A}$ heißt **regulärer Attraktor**, falls

$$\mathcal{A} = M_N = \bigcup_{j=1}^{N} W^u(z_j).$$

gilt. Dabei bezeichnen $z_1, \ldots, z_N$ hyperbolische Gleichgewichtspunkte, so numeriert, daß $\Phi(z_1) \leq \cdots \leq \Phi(z_N)$ gilt, wobei Φ das globale Lyapunov-Funktional bezeichne. Es gelten die folgenden Aussagen für $1 \leq k \leq N$:

1. M_k ist abgeschlossen und kompakt in E.
2. Für $t \geq 0$ ist M_k invariant: $S(t)M_k = M_k$.
3. M_k ist eine stabile Menge.
4. Der Rand $\partial W^u(z_k)$ ist invariant und $\partial W^u(z_k) \subset M_{k-1}$.
5. $S(t)\partial W^u(z_k) = W^u(z_k)$ für alle $t \geq 0$.
6. Jede kompakte Menge $K \subset M_k \setminus \{z_k\}$ wird von M_{k-1} angezogen.
7. $W^u(z_k) \cap W^u(z_j) = \emptyset$, falls $j \neq k$.
8. $W^u(z_k)$ ist eine $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit endlicher Dimension n_k. Die Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zum $\mathbb{R}^{n_k}$, und sie ist lokal $\mathcal{C}^1$-eingebettet in E.

Bemerkung 3.24. Wird die Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ von einer Evolutionsgleichung $u_t + Au + f(u) = 0$ erzeugt, dann entspricht die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(z)$ gerade der Anzahl der Eigenwerte mit positiven Realteil von $A + d_u f(z)$.

3.3 Morse-Smale-Systeme

Bei dem Chaffee-Infante-Problem handelt es sich um ein Morse-Smale-System. Morse-Smale-Systeme erzeugen strukturstabile Systeme. Um die Strukturstabilität von dissipativen dynamischen Systemen im Unendlichdimensionalen zu untersuchen, betrachtet man sie eingeschränkt auf eine kompakte, invariante Menge, zumeist den Attraktor. Dissipative Systeme, die ein Lyapunov-Funktional besitzen, sogenannte Gradientensysteme, sind strukturstabil, falls alle ihre Gleichgewichtspunkte hyperbolisch sind und sich ihre stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten transversal schneiden.
Sei $S : E \to E$ eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung mit $r \geq 1$ auf einem Banachraum E. Mit $J(S)$ sei die maximale, beschränkte, invariante Menge der Abbildung S bezeichnet. Besitzt S einen globalen Attraktor $\mathcal{A}$, so ist $J(S) = \mathcal{A}$. Die Menge der nichtwandernden Punkte heiße $\Omega(S)$.

Definition 3.25. [HMO84, S.124] Eine beschränkte $\mathcal{C}^r$-Abbildung $S : E \to E$ heißt **Morse-Smale-Abbildung**, falls gilt:

1. $J(S)$ ist kompakt.
2. S und dS sind auf $J(S)$ injektiv.
3. $\Omega(S)$ ist endlich, und damit ist $\Omega(S) = \mathrm{Per}(S)$ gerade die Menge der periodischen Punkte.
4. Jeder periodische Punkt x_0 ist hyperbolisch, und $M_+(x_0)$ ist endlichdimensional.
5. $M_+(x_0)$ ist transversal zu $M_-^{loc}(x_1)$, für je zwei $x_0, x_1 \in \mathrm{Per}(S)$.

Bemerkung 3.26. Ist S auf der Menge $J(S)$ injektiv, dann wird durch $\{S^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Gruppe auf $J(S)$ definiert. Da die Ableitung dS ebenfalls injektiv ist, lassen sich lokale instabile Mannigfaltigkeiten nach dem Satz 2.8 globalisieren. Sie sind wegen der Invarianz von $J(S)$ ganz in $J(S)$ enthalten.

Für eine Morse-Smale-Abbildung S gilt:

$$J(S) = \bigcup_{x_0 \in \mathrm{Per}(S)} M_+(x_0).$$

Es gibt eine **instabile Blätterung** der Umgebung jedes periodischen Punktes, [HMO84, S.132]: Sei $U = V \cap J(S)$, V Umgebung von $x_0 \in Per(S)$, dann existiert eine stetige Blätterung

$$\mathcal{B}^u(x_0) : x \in U \mapsto \mathcal{B}^u_x(x_0)$$

so daß gilt:

1. Die Blätter sind $\mathcal{C}^1$-Scheiben, die sich stetig in der $\mathcal{C}^1$-Topologie verändern und $\mathcal{B}^u_{x_0}(x_0) = M_+(x_0) \cap U$.
2. Jedes Blatt $\mathcal{B}^u_x(x_0)$, $x \in U$, ist in U enthalten.

3. Die Blätterung $\mathcal{B}^u(x_0)$ ist S-invariant: d.h.

$$S(\mathcal{B}^u_x(x_0) \supset \mathcal{B}^u_{S(x)}(x_0) \text{ für alle } x,\ S(x) \in U.$$

Die Blätterung kann globalisiert werden, indem die Injektivität von S und dS ausgenutzt wird und die Blätter $\mathcal{B}^u_x(x_0)$ zu globalen Mannigfaltigkeiten durch S iteriert werden. Man kann auf der Menge der periodischen Punkte $\mathrm{Per}(S)$ eine Ordnung einführen: Zwei Punkte $x, \hat{x} \in \mathrm{Per}(S)$ sind $x \leq \hat{x}$ genau dann, wenn $\overline{M_+(\hat{x})} \cap M_+(x) \neq \emptyset$. Ist $x \leq \hat{x}$, dann gibt es eine endliche Folge von periodischen Punkten $x = x_1, \ldots x_n = \hat{x}$, so daß
$M_+(x_{i+1}) \cap M^{loc}_-(x_i) \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq n-1$.
Man erhält mit Hilfe dieser Halbordnung ein kompatibles System von globalen instabilen Blätterungen $\mathcal{B}^u(x_1), \ldots, \mathcal{B}^u(x_n)$ für jede maximale Kette $(x_1, \ldots, x_n) \in Per(S)$ mit $x_i \leq x_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$. Falls ein Blatt $B \in \mathcal{B}^u(x_k)$ ein Blatt $\tilde{B} \in \mathcal{B}^u(x_l)$, $k < l \leq n$ schneidet, dann gilt $B \supset \tilde{B}$. Die Einschränkung von $\mathcal{B}^u(x_l)$ auf ein Blatt von $\mathcal{B}^u(x_k)$ ist sogar eine $\mathcal{C}^1$-Blätterung. Das kompatible System von Blätterungen hilft beim Beweis der strukturellen Stabilität der Morse-Smale-Systeme.

Beispiel 3.27. Beim Chaffee-Infante-Problem ist der Attraktor gerade der Abschluß der instabilen Mannigfaltigkeit an den Nullpunkt:

$$\mathcal{A} = \overline{M_+(0)}.$$

Damit gilt dann $\overline{M_+(0)} \cap M_+(\phi_k^{\pm}) \neq \emptyset$ für alle $2 \leq k \leq n$. Also gilt mit obiger Notation $\phi_k^{\pm} \leq 0$ für $2 \leq k \leq n$, und es gibt eine Kette von Gleichgewichtspunkten $\phi_k = x_1, \ldots, x_l = 0$, so daß $M_+(x_{i+1}) \cap M^{loc}_-(x_i) \neq \emptyset$. Man kann also von jedem Gleichgewichtspunkt entlang der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten den Nullpunkt erreichen.
Es gibt zwei maximale Ketten mit $\phi_1^{\pm} < \cdots < \phi_k^{\pm} < \cdots < 0$. Die Blätterungen an die Gleichgewichtspunkte einer maximalen Kette sind miteinander kompatibel.

3.4 Blätterungen bei globalen Attraktoren

Ein Attraktor eines Morse-Smale-Systems ist *keine hyperbolische Menge*: Jeder Punkt $x_0 \in \mathcal{A}$ liegt zwar auf einer instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(\phi)$ an einen hyperbolischen Fixpunkt ϕ und besitzt damit eine instabile und stabile Mannigfaltigkeit, nämlich gerade $W^u(\phi)$ und $W^s(\phi')$, falls $\phi' = \omega(x_0)$ gilt. Aber ϕ' liegt nicht auf der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(\phi)$ und besitzt eine instabile Mannigfaltigkeit möglicherweise anderer Dimension; an diesen Stellen ist also eine Unstetigkeit der Wachstumsschranken der Lösungshalbgruppe. Lokal ist der Attraktor also hyperbolisch, und deshalb lassen sich auch so lokal Blätterungen definieren. Global funktioniert das aber nicht, da die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte nicht auf dem ganzen Attraktor dieselbe ist. Dies liegt auch an der endlichen Anzahl von Gleichgewichtspunkten. Um diese Unstetigkeitsstellen auszuschalten und auf einer ganzen Menge dieselben Wachstumsschranken für die Lösungshalbgruppe vorzufinden, wendet sich die Arbeit im Folgenden der Inertialmannigfaltigkeit zu.
Eine andere Möglichkeit, eine Blätterung im Zusammenhang mit dem Attraktor zu definieren, ist eine Blätterung über den Parameterraum und den Hilbertraum E^α: Ein Blatt wäre dann gerade der Attraktor $\mathcal{A}_\lambda$, er ist der Abschluß der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(0)$ und damit eine Mannigfaltigkeit. Der Attraktor hängt aber nicht auf dem ganzen Parameterraum $[1, \infty)$ stetig vom Parameter λ ab. Aber die interessante Eigenschaft

des Chaffee-Infante-Systems ist es ja gerade, daß sich die Dimension des Attraktors in Abhängigkeit vom Parameter λ verändert. Deshalb ließe sich zwar ein Blätterung über $E^\alpha \times \left(n^2, (n+1)^2\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ definieren. Aber damit könnte man gerade nicht die Veränderung der Dimension des Attraktors in Abhängigkeit vom Parameter erfassen. Es existiert aber eine Blätterung von $E^\alpha \times [1, \infty)$ durch die stabile Mannigfaltigkeit $W^s_\lambda(\phi_1^+)$ in Abhängigkeit von λ. Denn ϕ_1^+ ist immer ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Mit Hilfe der Dynamik der Blätterungen ließe sich dann untersuchen, wie sich die stabile Mannigfaltigkeit an ϕ_1^+ in Abhängigkeit vom Parameter λ verändert.

Kapitel 4

Inertialmannigfaltigkeiten

4.1 Existenz von Inertialmannigfaltigkeiten

Durch das asymptotische Verhalten der Lösungen auf dem globalen Attraktor eines dissipativen Systems ist die globale Asymptotik des Systems bestimmt: Die Lösung zu jedem Anfangswert tritt nach einer bestimmten Zeit in eine Umgebung des Attraktors ein und verläßt diese nicht mehr. Für bestimmte Klassen von dissipativen Systemen existieren endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten, die den Attraktor enthalten: sogenannte *Inertialmannigfaltigkeiten*. Sie besitzen gegenüber Attraktoren die Vorteile, daß sie eine reguläre, mindestens Lipschitz-stetige Struktur besitzen und alle Orbits exponentiell anziehen. Außerdem sind sie meistens robust gegenüber kleinen Störungen des Systems.
Man kann sie als verallgemeinerte, globale, instabile Mannigfaltigkeiten auffassen. Ihre Existenz ist insbesondere abhängig von der Struktur des Spektrums des linearisierten Differentialoperators der partiellen Differentialgleichung.
In der Umgebung und auf Inertialmannigfaltigkeiten lassen sich Blätterungen beschreiben. Deshalb werden im Folgenden zunächst die Existenzvoraussetzungen sowie die normale Hyperbolizität von Inertialmannigfaltigkeiten diskutiert. Dann werden Blätterungen auf Inertialmannigfaltigkeiten beschrieben.

Es sei auf einem Banachraum E durch

$$\begin{aligned} S(t) : E &\to E \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

eine Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ definiert. Diese sei auf $\mathbb{R}^+ \times E$ stetig, und die Abbildung $S(t)$ sei für jedes $t \geq 0$ in $u_0 \in E$ stetig differenzierbar.

Definition 4.1. Eine endlichdimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in E heißt **Inertialmannigfaltigkeit**, falls gilt:

1. $\mathcal{M}$ ist invariant unter $S(t)$: $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}\ \forall t \geq 0$.
2. $\mathcal{M}$ zieht alle Orbits exponentiell an, d.h. es gibt eine Konstante k, so daß für jedes $u_0 \in E$ ein $t_0 \geq 0$ existiert und eine Konstante $c > 0$, so daß für $t \geq t_0$ gilt:

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq ce^{-kt}$$

Die Inertialmannigfaltigkeit wird als Graph einer Lipschitz-Abbildung über einen endlichdimensionalen, invarianten Unterraum konstruiert. Die Lipschitz-Abbildung wird zumeist mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes als Fixpunkt einer strikten Kontraktion zwischen geeigneten Funktionenräumen gefunden.

Betrachte die folgende Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt} + Au + f(u) = 0, \ t > 0. \tag{4.1}$$

Als invarianter Unterraum, auf dem die Lipschitz-Abbildung konstruiert wird, bietet sich der verallgemeinerte Eigenraum zu einer beschränkten Spektralmenge

$$\sigma_1(A) = \left\{ \lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \Re(\lambda) < \beta_1 \right\}$$

von A an. Dieser Unterraum muß nun allerdings unter der Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ der Evolutionsgleichung invariant bleiben. Wenn man die Gleichung 4.1 an der Stelle $u(t, u_0) = S(t)u_0$ linearisiert, erhält man die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} + Av + d_u f(u(t))v = 0,$$

deren Lösung $v(t) = u_1(t) - u(t)$ durch die Differenz zweier Lösungen $u(t, u_0)$ und $u_1(t)$ der Gleichung 4.1 gegeben ist. Der Abstand zwischen $\sigma_1(A)$ und $\sigma(A) \setminus \sigma_1(A)$, die Spektrallücke, muß deshalb so groß sein, daß das Spektrum des linearisierten Operators $\sigma(t) = \sigma(A + d_u f(u(t))$ immer noch in zwei disjunkte Spektralmengen $\sigma_1(t)$ und $\sigma(t) \setminus \sigma_1(t)$ zerfällt, so daß

$$\sup \Re\left(\sigma_1(t)\right) \ < \ \inf \Re\left(\sigma(A) \setminus \sigma_1(A)\right)$$

gilt. Die Größe der Spektrallücke ist deshalb abhängig von der Nichtlinearität f, genauer von der Lipschitz-Konstante von f und der gewählten Potenz $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß f in E^α global Lipschitz-stetig und beschränkt ist. Entscheidende Kriterien für die Existenz von Inertialmannigfaltigkeiten sind die *Spektrallückenbedingung* und das *Kegelkriterium.* Diese Kriterien werden im Folgenden kurz zusammen mit dem Existenzsatz von Inertialmannigfaltigkeiten vorgestellt. Danach zeige ich die Existenz einer Inertialmannigfaltigkeit mit Hilfe des Satzes 2.10.

4.1.1 Kegelbedingung

Kegelkriterien sind einfacher anzuwenden als Spektrallückenbedingungen und deswegen haben sich insbesondere Mallet-Paret und Sell in [MPS88] bemüht, Existenzvoraussetzungen für die Inertialmannigfaltigkeit aufzustellen, die nur von Kegelbedingungen abhängen. Die Spektrallückenbedingung impliziert dabbei das Kegelkriterium. Im Folgenden sei es zunächst allgemein formuliert, ohne direkten Bezug auf die Evolutionsgleichung 4.1.
Sei P ein orthogonaler Projektor auf einen Unterraum eines Hilbertraums E, so daß $E = PE \oplus QE$ mit $Q = \mathbb{I} - P$. Sei $u : \mathbb{R}_+ \to E$ stetig, setze $p := Pu$ und $q := Qu$. Mit diesen Bezeichnungen gelte:

1. Ist $u(t_0) = 0$ für $t_0 \geq 0$, dann folgt $u(t) = 0$ für $t \geq t_0$.

2. Im Falle $\|q(t)\| \geq \gamma \|p(t)\|$ gelten die folgenden Abschätzungen mit den positiven

Konstanten $\Lambda, \lambda, \mu_1, \mu_2$ und γ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|p\right\|^2 &\geq -\lambda \left\|p\right\|^2 - \mu_1 \left\|p\right\| \left\|q\right\|, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|q\right\|^2 &\leq -\Lambda \left\|q\right\|^2 + \mu_2 \left\|p\right\| \left\|q\right\|, \\ \Lambda - \lambda &> \frac{\mu_1\gamma^2 + \mu_2}{\gamma}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dann lassen sich wie folgt Kegel definieren:

$$K_\gamma = \left\{ v \in E \;\middle|\; \left\|Qv\right\| \leq \gamma \left\|Pv\right\| \right\}.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz:

Satz 4.2. *[Tem88, S.410] Seien die Voraussetzungen des Abschnitts 4.1.1 und die Gleichungen* 4.2 *erfüllt.* ***Dann*** *gilt*

1. *Ist $u(0) \in K_\gamma$, dann ist $u(t) \in K_\gamma$, $t \geq 0$.*

2. *Ist $u(0) \notin K_\gamma$, dann existiert entweder ein $t_0 > 0$, so daß $u(t_0) \in K_\gamma$ gilt und Fall (1) zur Anwendung kommt,*
oder es ist $u(t) \notin K_\gamma$ für alle $t \geq 0$, dann fällt $u(t)$ exponentiell gegen 0, d.h. es gibt ein $\nu = \Lambda - \frac{\mu_2}{\gamma} > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \left\|Qu(t)\right\| &\leq \left\|Qu(0)\right\| e^{-\nu t},\ t > 0, \\ \left\|u(t)\right\| &\leq \frac{\left(1+\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} \left\|u(0)\right\| e^{-\nu t} \end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung 4.3.

1. Dieser Satz wird zumeist auf die Lösung $u(t)$ einer Evolutionsgleichung $\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(u)$ mit Anfangswert $u(0) = u_0$ angewendet. Die erste Bedingung ist dann trivial, wenn die Gleichung zu jedem Anfangswert $u_0 \in E$ eine eindeutige Lösung besitzt.

2. Die Abschätzung des Abstandes $\Lambda - \lambda$ in der Gleichung 4.2 bedeutet dann, daß es eine Lücke im Spektrum des linearen Anteils A von $\mathcal{F}$ gibt, die diese Abschätzung erfüllt.

4.1.2 Spektrallückenbedingung

Betrachte erneut die bereits bekannte Evolutionsgleichung in einem Hilbertraum E

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + f(u(t)) = 0,\ t > 0,\ u(0) = u_0 \in E^\alpha,\ \alpha \in [0,1).$$

Der Operator A sei selbstadjungiert und von unten beschränkt.[1] Sein Spektrum besteht dann aus einer Folge wachsender, reeller Eigenwerte $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$. Die Eigenfunktionen

[1] Diese Bedingung läßt sich allgemeiner für sektorielle Operatoren mit kompakter Resolvente formulieren, doch lassen sich in diesem Fall die Bedingungen nicht so einfach aufschreiben, weil nicht alle Eigenwerte als reell vorausgesetzt werden können.

$w_n, n \in \mathbb{N}$, bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums E. Für geeignete Exponenten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha, \beta < 1$ und $\beta + \alpha = \frac{1}{2}$ sei $f : E^\alpha \to E^\beta$ Lipschitz-stetig auf beschränkten Mengen in E^α. Es existiere eine eindeutige Lösung $u(t)$ für $t \geq 0$ zu jedem Anfangswert $u_0 \in E^\alpha$. Der Lösungsoperator $S(t) : E^\alpha \to E^\alpha,\ u_0 \mapsto u(t)$ ist für alle $t \geq 0$ stetig. Weiter besitze $\{S(t)\}$ eine absorbierende Menge $\mathcal{B}_0$, so daß der Attraktor $\mathcal{A}$ gerade die ω-Limesmenge $\omega(\mathcal{B}_0)$ ist.
Um eine global Lipschitz-stetige und beschränkte Abbildung f zu erhalten, muß diese außerhalb einer hinreichend großen Kugel um den Nullpunkt abgeändert werden. Sei $m : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, so daß gilt:

$$\begin{aligned} m(y) &= 1, \quad y \in [0,1] \\ m(y) &= 0, \quad y \geq 2. \end{aligned}$$

Eine Funktion m mit diesen Eigenschaften nennt man Abschneide-Funktion oder „Cut-off"-Funktion. Betrachte nun

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f_m(u(t))$$

mit $f_m(u) = m\left(\frac{\|u\|_\alpha}{r}\right) f(u)$, wobei $r > 0$ so gewählt ist, daß die absorbierende Menge $\mathcal{B}_0$ ganz im Abschluß einer Kugel $\overline{B_{E^\alpha}(0, \frac{r}{2})}$mit Radius $\frac{r}{2}$ um den Nullpunkt enthalten ist. $f_m : E^\alpha \to E^\beta$ ist global Lipschitz-stetig und beschränkt, und die Gleichung definiert eine stetige Halbgruppe auf E^α: $\{S_m(t)\}$. Für alle $u_0 \in \mathcal{B}_0$ stimmt $\{S_m(t)\}$ mit $\{S(t)\}$ überein.
Mit $P := P_N$ sei der Operator auf den von den ersten N Eigenfunktionen aufgespannten Raum $\langle w_1, \ldots, w_N \rangle$ bezeichnet. Setze $Q := Q_N = \mathbb{I} - P_N$.
Die Inertialmannigfaltigkeit ist der Graph einer Lipschitz-Abbildung. Diese Lipschitz-Abbildung wird als Fixpunkt einer Kontraktion auf geeigneten Funktionenräumen konstruiert. Dazu bezeichne $\mathcal{F}$ den Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen $\Phi : PE^\alpha \to QE^\alpha$ mit den folgenden Eigenschaften zu gegebenen Konstanten $b, l > 0$:

1. Der Träger von Φ sei in einer Kugel mit Radius $2r$ enthalten:

$$\operatorname{supp} \Phi \subset \left\{ p \in PE^\alpha \;\middle|\; \|p\|_\alpha \leq 2r \right\},$$

2. Die Abbildung Φ sei global beschränkt:

$$\|\Phi(p)\|_\alpha \leq b \;\forall p \in PE^\alpha,$$

3. Die Abbildung Φ sei global Lipschitz-stetig:

$$\|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)\|_\alpha \leq l \,\|p_1 - p_2\|_\alpha \;\forall p_1, p_2 \in PE^\alpha.$$

Der Raum $\mathcal{F}$ ist der Metrik $d(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{p \in PE^\alpha} \|\Phi_1(p) - \Phi_2(p)\|_\alpha$ ein vollständiger Funktionenraum bezüglich.
Nun ist der Raum PE^α endlichdimensional und die Abbildung $p \mapsto f_m(p + \Phi(p))$ Lipschitz-stetig. Daraus folgt zu jedem $\Phi \in \mathcal{F}$ und zu jedem $p_0 = p(0) \in PE^\alpha$ die Existenz einer eindeutigen Lösung $p(t)$ als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} + Ap + Pf_m(p + \Phi(p)) = 0.$$

Es läßt sich weiter zeigen, daß die Gleichung

$$\frac{dq}{dt} + Aq + Qf_m(p + \Phi(p)) = 0$$

ebenfalls zu jedem $q_0 = q(0) \in QE^\alpha$ eine eindeutige, stetige und beschränkte Lösung $q : \mathbb{R} \to QE^\alpha$ besitzt. Damit konstruiere nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &: \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \\ p_0(\Phi) &\mapsto q(0; p_0, \Phi). \end{aligned}$$

Die Abbildung läßt sich für $p_0 \in PE^\alpha$ und $\Phi \in \mathcal{F}$ direkt angeben als

$$\mathcal{T}\Phi(p_0) = -\int_{-\infty}^{0} e^{At} Q f_m \left(p(t) + \Phi(p(t))\right) dt.$$

Es ist im folgenden zu zeigen, daß $\mathcal{T}$ eine strikte Kontraktion auf $\mathcal{F}$ ist und der Graph des Fixpunktes Φ eine Inertialmannigfaltigkeit für die Halbgruppen $\{S_m(t)\}$ und $\{S(t)\}$ definiert. Für diesen Beweis müssen die Eigenwerte von A folgende Abschätzungen für hinreichend großes N erfüllen. Dabei bezeichne κ eine absolute Konstante und $0 < l \leq \frac{1}{8}$ die Konstante aus der Definition des Funktionenraums $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} &> \operatorname{Lip}(f_m)^2 \left(\frac{1+l}{l} + 4\kappa + 11\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_{N+1} - \lambda_N &> 2\operatorname{Lip}(f_m)\frac{1+l}{l}\left(\lambda_N^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

Satz 4.4. *[Tem88, S.423] Unter den Voraussetzungen des Abschnittes 4.1.2 und für l, so daß die Gleichungen* 4.3 *erfüllt sind, gibt es ein $b > 0$, so daß*

1. *$\mathcal{T}$ eine strikte Kontraktion von $\mathcal{F}$ auf sich selbst ist und damit einen eindeutigen Fixpunkt $\Phi \in \mathcal{F}$ besitzt und*
2. *der Graph $\mathcal{M} := \{p + \Phi(p) \mid p \in PE^\alpha\}$ eine Inertialmannigfaltigkeit für die Halbgruppen $\{S_m(t)\}$ und $\{S(t)\}$ definiert.*

Beweis: Die Beweisschritte seien hier nur skizziert:

1. Zeige zunächst, daß $\mathcal{T}\Phi \in \mathcal{F}$ für jedes $\Phi \in \mathcal{F}$ liegt. Dafür weise nach, daß $\mathcal{T}\Phi$ eine global beschränkte und Lipschitz-stetige Abbildung von PE^α nach QE^α ist, deren Träger in einer Kugel mit Radius $2r$ enthalten ist. Um die Lipschitz-Stetigkeit von $\mathcal{T}\Phi$ zu zeigen, wird die Kegelbedingung 4.2 benötigt, die von der Spektrallückenbedingung 4.3 impliziert wird.

2. Zeige weiter, daß die Abbildung $\mathcal{T}$ eine strikte Kontraktion auf $\mathcal{F}$ ist. Damit existiert dann ein eindeutiger Fixpunkt $\Phi \in \mathcal{F}$.

3. Zeige dann, daß es sich bei dem Graph $\mathcal{M}$ von Φ um eine Inertialmannigfaltigkeit der Halbgruppe $\{S_m(t)\}_{t\geq 0}$ handelt. Aufgrund der Konstruktion ist $\mathcal{M}$ invariant unter $\{S_m(t)\}$. Es ist noch zu zeigen, daß der Graph $\mathcal{M}$ alle Orbits von $\{S_m(t)u_0\}$ exponentiell anzieht.

4. Zeige zuletzt, daß der Graph $\mathcal{M}$ auch eine Inertialmannigfaltigkeit für die ursprüngliche Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ definiert.

Beispiel 4.5. Betrachte die eindimensionale *Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung*[2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,&\\ \frac{\partial^j u}{\partial x^j}\left(-\frac{L}{2}\right)=\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\left(\frac{L}{2}\right),\ j=0,1,2,3,&\end{aligned}\tag{4.4}$$

wobei $u\in E:=\left\{v\in L^2\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)\ \mid\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}v(x)dx=0\right\}$. Bezeichne mit A den Differentialoperator $\frac{d^4}{dx^4}$. Dann ist der Definitionsbereich $D(A)\ =\ E\ \cap\ \dot{H}^4_{per}\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$, wobei

$$\dot{H}^4_{per}\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)=\left\{v\in H^4\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)\ \mid v(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v_k e^{2i\pi k\frac{x}{L}}\ v_0=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}v(x)dx=0\right\}.$$

Der Operator A ist selbstadjungiert und positiv definit. Er besitzt die Eigenwerte $\lambda_n=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^4$ für $n\in\mathbb{N}$. Als geeignete gebrochene Potenz von A wähle $\alpha=\frac{1}{4}$. Dann ist $E^\alpha=D(A^\alpha)=\dot{H}^1_{per}\cap E$. Der nichtlineare Term $u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ besitzt ebenfalls noch einen linearen Anteil $R(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit den Eigenwerten $\mu_n=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$ für $n\in\mathbb{N}$. Der lineare Anteil $\nu A+R$ der Gleichung 4.4 besitzt also die Eigenwerte

$$\nu\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^4-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\left(\nu\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2-1\right).$$

Sie sind alle positiv, falls

$$\frac{L}{2\pi\sqrt{\nu}}<1,$$

also ν hinreichend groß gegenüber L ist. Die Gleichung 4.4 ist also instabil, wenn der nichtlineare Anteil fehlt und die obige Ungleichung nicht erfüllt ist. Der nichtlineare Anteil spielt also eine wichtige Rolle dabei, ob die Lösungen der Gleichung 4.4 beschränkt bleiben. Es läßt sich aber zeigen, daß die Gleichung 4.4 einen globalen Attraktor besitzt, der maximal, zusammenhängend und kompakt in E^α ist (vgl. [Tem88, S.137]).

Satz 4.6. *[Tem88, S.438] Die Kegelbedingung* 4.2 *wird von der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung* 4.4 *auf* $E^{\frac{1}{4}}$ *mit der* H^1*-Norm erfüllt, wenn man sie auf die Differenz zweier Lösungen anwendet.*
Die Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung besitzt dann eine Inertialmannigfaltigkeit wie im Satz 4.4 angegeben.

Beweis: Es sind alle Voraussetzungen des Satzes zu überprüfen. Zunächst läßt sich festhalten, daß der nichtlineare Anteil $f(u)=u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ eine beschränkte Abbildung von E^α in

[2] Die ursprüngliche Form der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung besitzt den nichtlinearen Term $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. Differenziert man diesen Term nach x erhält man den hier verwendeten nichtlinearen Term. Die Randbedingungen bleiben unverändert. Es gilt dann $u_0=\frac{dv_0}{dx}$, wobei v_0 die Anfangsbedingung der ursprünglichen Gleichung bezeichne. Aus den Randbedingungen folgt dann $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}u(x,t)dx=0$. So ergeben sich die unten definierten Funktionenräumen.

sich ist. Es gilt zunächst:

$$
\begin{aligned}
(f(u), v) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \right) dx \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} v - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx, \\
\|(f(u), v)\| &\leq |u|_{L^4} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| |v|_{L^4} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|.
\end{aligned}
$$

Da $E^\alpha \subset H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \subset L^4\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ stetig in $L^4\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ nach dem Einbettungssatz 1.25 eingebettet ist, läßt sich die Norm auf E^α durch die L^4-Norm von unten abschätzen. Es gibt also eine positive Konstante c_1, so daß gilt

$$
\begin{aligned}
\|(f(u), v)\| &\leq c_1 \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha (1 + \|u\|_\alpha), \\
\|f(u)\|_\alpha &\leq c_1 \|u\|_\alpha (1 + \|u\|_\alpha).
\end{aligned}
$$

Die nichtlineare Abbildung f ist also eine beschränkte Abbildung. Ebenso läßt sich zeigen, daß f auf beschränkten Mengen Lipschitz-stetig ist. Für die Eigenwerte $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$ des Operators A gilt $\lambda_n = \lambda_1 n^4$. Damit ist die Kegelbedingung 4.2 für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ im Raum E^α für die Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung erfüllt. Die Gleichung besitzt dann unter Anwendung des Satzes 4.4 eine Inertialmannigfaltigkeit.

Beispiel 4.7. Betrachte die *Reaktions-Diffusions-Gleichung*

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu \Delta u + f(x, u),\ u \in \mathbb{R}^d,\ x \in \Omega = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}, \\
u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$ des Operators $-\nu\Delta$ sind alle reell, positiv und proportional zu n^2. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die Spektrallückenbedingung erfüllt ist, denn der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ wird für wachsendes n beliebig groß. Die zugehörige Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}$ ist punkt dissipativ, falls die Funktion f die folgende Vorzeichen-Bedingung

$$
uf(x, u) < 0, \quad \forall x \in \Omega,\ \|u\| > R, \tag{4.5}
$$

für ein $R > 0$ erfüllt.
Die Gleichung besitzt dann wie im Abschnitt 3.2.1 einen globalen Attraktor. Sie besitzt dann auch eine Inertialmannigfaltigkeit. In [MPS88] und [MPSS93] wird gezeigt, daß die Reaktions-Diffusions-Gleichung auch auf den zweidimensionalen Gebieten $(0, 2\pi)^2$ und $(0, \frac{2\pi}{a_1}) \times (0, \frac{2\pi}{a_2})$, $a_1, a_2 > 0$ und auf einem dreidimensionalen Gebiet $(0, 2\pi)^3$ für die Dirichlet-, Neumann- und periodische Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= 0\ x \in \partial\Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0\ x \in \partial\Omega,\ n \text{ äußerer Normaleneinheitsvektor}, \\
u(x + 2k\pi, t) &= u(x, t)\ k \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

eine $\mathcal{C}^1$-Inertialmannigfaltigkeit besitzt, falls die Nichtlinearität f auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ aus der Klasse $\mathcal{C}^3$ ist und die Bedingung 4.5 erfüllt. Die Inertialmannigfaltigkeit ist dann normal hyperbolisch. In dem Aufsatz [MPSS93] zeigen die Autoren weiter, daß die Reaktions-Diffusions-Gleichung auf höherdimensionalen Gebieten keine Inertialmannigfaltigkeit mehr besitzt:

Sie wäre, wenn sie existierte, normal hyperbolisch. Es läßt sich aber zeigen, daß an den Gleichgewichtslösungen keine Aufspaltung des Tangentialraums in einen stabilen und einen zentruminstabilen Teilraum möglich ist.

Auch mit Hilfe des Satzes 2.10 läßt sich eine Inertialmannigfaltigkeit wie folgt konstruieren. Dafür muß die Evolutionsgleichung 4.1 die folgenden Voraussetzungen erfüllen: Der Operator A sei sektoriell in einem Banachraum E. Die Gleichung 4.1 besitze einen globalen Attraktor $\mathcal{A}$. Es wird angenommen, daß man den nichtlinearen Anteil f in einer Umgebung des Attraktors $\mathcal{A}$ so abändern kann, daß $f : E^\alpha \to E^\beta$ auf geeigneten Räumen E^α, E^β eine Lipschitzabbildung ist mit einer globalen Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(f)$. Die Gleichung erzeugt dann eine Lösungs-Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ auf E^α, die man für jedes $t \geq 0$ in einen linearen und nichtlinearen Anteil zerlegen kann:

$$\begin{aligned} S(t)u_0 &= L(t)u_0 + R(t,u_0), \\ L(t)u_0 = e^{-At}u_0, \quad R(t,u_0) &= -\int_0^t e^{-A(t-s)}F(u(s))ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Auf diese Halbgruppe läßt sich nun der Satz 2.10 anwenden. Dazu muß insbesondere die Lipschitz-Konstante von $R(t)$ auf einem Intervall $(0,\tau)$ bestimmte Abschätzungen erfüllen, die von der Größe der Spektrallücke von A abhängen.
Seien $\beta_1 < \beta_2,\ \beta_2 > 0$ zwei Konstanten, so daß das Spektrum $\sigma(A)$ von A in zwei disjunkte Spektralmengen zerfällt:

$$\sigma_1(A) := \left\{\lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \Re(\lambda) < \beta_1\right\}, \quad \sigma_2(A) :== \left\{\lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \Re(\lambda) > \beta_2\right\} = \sigma(A) \setminus \sigma_1(A).$$

Bezeichne P die Spektralprojektion auf $\sigma_1(A)$. Mit dieser Notation gilt dann folgender Satz über die Existenz von Inertialmannigfaltigkeiten:

Satz 4.8. *[CHT97, S.314][3] Sei* $\dim PE^\alpha < \infty$ *und* $\beta_2 > \frac{1}{\tau}$. *Es gebe eine Konstante* M, *so daß* $|L(t)| \leq M$ *für* $0 \leq t \leq 1$ *gilt, und eine Konstante* $C \geq 1$, *so daß* $\left\|\left(e^{-At}P\right)^{-1}\right\| \leq Ce^{\beta_1 t}$ *und* $\left\|e^{-At}\left(\mathbb{I} - P\right)\right\| \leq Ce^{-\beta_2 t}$ *gilt. Es gelte für die Spektrallücke die Abschätzung*

$$\beta_2 - \beta_1 > \frac{48M^2C\,\mathrm{Lip}(f)}{1-(\alpha-\beta)}\beta_2^{\alpha-\beta}.$$

Dann *besitzt die Lösungshalbgruppe 4.6 eine Inertialmannigfaltigkeit.*
Beweis: Es sind die Voraussetzungen des Satzes 2.10 zu überprüfen:
Die Stetigkeit der Lösungshalbgruppe auf $\mathbb{R}_+ \times E$ folgt direkt daraus, daß sie Lösungshalbgruppe einer nichtlinearen Evolutionsgleichung mit einer Lipschitz-stetigen Nichtlinearität und einem sektoriellen Operator ist (s. Abschnitt 1.3).
Prüfe so zunächst die Lipschitz-Stetigkeit der Halbgruppe auf einem Intervall $0 \leq t \leq q$:
Als Norm wird $\| \quad \|_\alpha$ verwendet. Sei $t \in [0,\tau]$, $\tau < 1$:

$$\begin{aligned} \|S(t)u_1 - S(t)u_2\|_\alpha &= \left\|e^{-At}A^\alpha(u_1-u_2) + \int_0^t A^{\alpha-\beta}e^{-A(t-s)}A^\beta(F(S(s)u_1) - F(S(s)u_2)ds\right\| \\ &\leq M\|u_1-u_2\|_\alpha + \mathrm{Lip}(F)M\int_0^t (t-s)^{-(\alpha-\beta)}\|S(s)u_1 - S(s)u_2\|_\alpha ds \\ &\leq M\|u_1-u_2\|_\alpha + \frac{\mathrm{Lip}(F)M}{1-(\alpha-\beta)}t^{1-(\alpha-\beta)}\|u_1-u_2\|_{\sup}. \end{aligned}$$

[3] Bei [CHT97, S.314] heißt es C^2 in der Abschätzung.

Dabei bezeichne

$$\|u_1 - u_2\|_{\sup} := \sup_{0 \le t \le \tau} \|S(t)u_1 - S(t)u_2\|_\alpha .$$

Wähle als Zeit

$$\tau = \min\left\{1, \left(\frac{1-(\alpha-\beta)}{2\,\mathrm{Lip}(F)M}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha-\beta)}}\right\}.$$

Damit folgt aus der obigen Abschätzung

$$\|u_1 - u_2\| \le 2M \|u_1 - u_2\|_\alpha .$$

Somit besitzt die Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ auf dem Intervall $[0,\tau]$ eine endliche Lipschitzkonstante. Damit ist die erste Voraussetzung erfüllt.
Der Lösungsoperator $S(t)$ kann weiter zerlegt werden in den linearen Operator $L(t)$ und den Rest $R(t)$. Wenn man die obigen Umformungen betrachtet, ist sofort ersichtlich, daß $R(t)$ für $t \in (0,\tau)$ eine globale Lipschitzabbildung ist, denn es folgt:

$$\|R(t,u_1) - R(t,u_2)\|_\alpha \le \frac{2\,\mathrm{Lip}(F)M^2}{1-(\alpha-\beta)} t^{1-(\alpha-\beta)} \|u_1 - u_2\|_\alpha .$$

Damit ist die zweite Voraussetzung erfüllt.
Mit obigen Annahmen lassen sich zwei Konstanten $\beta_1 < \beta_2$ finden, so daß das Spektrum $\sigma(A)$ in zwei disjunkte Spektralmengen zerlegt werden kann. Nach dem Zerlegungssatz 1.46 existiert zu einer disjunkten Zerlegung des Spektrums auch eine disjunkte invariante Zerlegung des Raumes $E = E_1 \oplus E_2$ mit zugehörigen Spektralprojektoren P und $Q := \mathbb{I} - P$. Es gelten dann folgende Abschätzungen mit $C \ge 1$, die sich aus dem Zerlegungssatz 1.46 und den Abschätzungen 1.4 ergeben:

$$\begin{aligned} \left\|\left(e^{-At}P\right)^{-1}\right\| &\le Ce^{\beta_1 t}, \\ \left\|e^{-At}Q\right\| &\le Ce^{-\beta_2 t}. \end{aligned}$$

Setze also $e^{-\beta_1} =: \alpha_1$ und $e^{-\beta_2} =: \alpha_2$. Sei nun $t := \frac{1}{\beta_2}$, $\Delta := \beta_2 - \beta_1$ und betrachte

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Delta}{\beta_2}} - 1 &= \frac{\Delta}{\beta_2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Delta}{\beta_2}\right)^k \\ &> \frac{\Delta}{\beta_2} \qquad > \frac{48M^2C^2\,\mathrm{Lip}(F)}{1-(\alpha-\beta)}\beta_2^{(\alpha-\beta)-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt für die Lipschitzkonstante und die Spektrallücke die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Lip}(R(t))4C}{\alpha_1 - \alpha_2} &= \frac{\mathrm{Lip}(R(t))4C}{e^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} - e^{-1}} \\ &< \frac{e\,\mathrm{Lip}(R(t))4C}{e^{\frac{\Delta}{\beta_2}} - 1} \\ &< \left(\frac{e2\,\mathrm{Lip}(F)M^2 4C}{1-(\alpha-\beta)} t^{1-(\alpha-\beta)}\right) * \left(\frac{1-(\alpha-\beta)}{48M^2C2\,\mathrm{Lip}(F)}\beta_2^{1-(\alpha-\beta)}\right) \\ &= \frac{e}{12} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beachte, daß $\alpha_2 < 1$ ist, da $\beta_2 > 0$ vorausgesetzt wurde. Deshalb kann auch $\gamma_2 < 1$ gewählt werden, und es wird nicht vorausgesetzt werden, daß der Nullpunkt ein Fixpunkt ist. Damit folgt mit Satz 2.10 die Existenz einer endlichdimensionalen, invarianten Lipschitz-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. □

Bemerkung 4.9. Der globale Attraktor $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{M}$ enthalten, denn sei $\hat{u} \in \mathcal{A}$, dann existiert zu jedem $t > 0$ ein u^t, so daß $S(t)u^t = \hat{u}$. Da sich alle Orbits exponentiell der Inertialmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ annähern, gibt es $c, \eta > 0$, so daß gilt

$$\operatorname{dist}(\hat{u}, \mathcal{M}) \ = \ \operatorname{dist}(S(t)u^t, \mathcal{M}) \ \leq \ c \operatorname{dist}(u^t, \mathcal{M}) e^{-\eta t}.$$

Da der Attraktor $\mathcal{A}$ beschränkt ist, gilt $\operatorname{dist}(\hat{u}, \mathcal{M}) = 0$ für $t \to +\infty$, also ist $\hat{u} \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist. Damit sind alle Fixpunkte und die instabilen Mannigfaltigkeiten an mögliche hyperbolische Fixpunkte ebenfalls in der Inertialmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ enthalten.

Mit dem Satz 2.10 wird auch unter strengeren Voraussetzungen an die Lipschitz-Konstante von R die Existenz einer Blätterung $\{M_\xi\}_{\xi \in \mathcal{M}}$ des Hilbertraums E bewiesen:

$$E = \bigcup_{\xi \in \mathcal{M}} M_\xi.$$

Diese Blätterung ist unter der Halbgruppe $S(t)$ invariant, d.h. $S(t)M_\xi \subset M_{S(t)\xi}$ für $t \geq 0$. Jedes Blatt ist sogar eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, falls $S(\tau)$ stetig differenzierbar ist. Da jeder Orbit von der Inertialmannigfaltigkeit exponentiell angezogen wird, muß zudem gelten, daß für jedes Blatt M_ξ der Abstand $\operatorname{dist}(S(t)M_\xi, \mathcal{M}) \to_{t \to +\infty} 0$ gegen 0 konvergiert. Genauer nähern sich alle Punkte $x \in M_\xi$ unter $S(t)$ dem Orbit $S(t)\xi$ exponentiell an. Denn sei $x \in M_\xi$, dann ist $S(t)x \in M_{S(t)\xi}$ für alle $t \geq 0$ und gleichzeitig gilt $\operatorname{dist}(S(t)x, \mathcal{M}) \to 0$, d.h. $\|S(t)x - S(t)\xi\| \to 0$. Das Blatt an ξ enthält also gerade die Punkte, die sich unter dem Halbfluß $S(t)$ exponentiell dem Orbit von ξ annähern. Die Mannigfaltigkeit M_ξ ist also die stabile Mannigfaltigkeit an den Punkt $\xi \in \mathcal{M}$. Im folgenden wird dies noch genauer ausgeführt werden und am Beispiel der Cahn-Hilliard-Gleichung angewendet werden.

4.2 Normale Hyperbolizität und stabile Blätterung

Sei E ein Banachraum und $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ eine Halbgruppe auf E, die auf $\mathbb{R}^+ \times E$ stetig und für jedes $t \geq 0$ stetig differenzierbar ist. Es existiere eine kompakte und zusammenhängende $\mathcal{C}^2$-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, die unter der Halbgruppe invariant bleibt. Das Tangentialbündel von E, eingeschränkt auf $\mathcal{M}$, zerfalle in drei stetige, $dS(t)$-invariante Tangentialbündel

$$TE\big|_{\mathcal{M}} = E^c \oplus E^s \oplus E^u,$$

wobei das zentrale Unterbündel E^c gerade das Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ sei. Es seien genauer folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. Für alle $m \in \mathcal{M}$ für $t \geq 0$ gilt mit $m_1 = S(t)(m)$:

$$dS(t)(m)|_{E^\alpha_m} : E^\alpha_m \to E^\alpha_{m_1}, \quad \alpha = c, u, s$$

   Die Abbildung $dS(t)(m)|_{E^\alpha_m}$ ist ein Isomorphismus von E^α_m nach $E^\alpha_{m_1}$.

2. Es gibt ein $t_0 \geq 0$ und $\lambda < 1$, so daß für alle $t \geq t_0$ und $m \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\lambda \inf \left\{ \|dS(t)(m)x^u\| \;\middle|\; x^u \in E^u_m,\ \|x^u\| = 1 \right\} > \max \left\{ 1,\ \left\| dS(t)(m)\big|_{E^c_m} \right\| \right\}$$
$$\lambda \min \left\{ 1,\ \inf \left\{ \|dS(t)(m)x^c\| \;\middle|\; x^c \in E^c_m,\ \|x^c\| = 1 \right\} \right\} > \left\| dS(t)(m)\big|_{E^s_m} \right\|$$

3. Die Abbildung

$$M \subset E \to \mathcal{L}(E)$$
$$m \mapsto \Pi^\alpha_m$$

ist $\mathcal{C}^1$ für $\alpha = c, u, s$, dabei ist Π^α_m die Projektion von E auf E^α_m.[4]

Bemerkung 4.10. Eine kompakte, zusammenhängende $\mathcal{C}^2$-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ heißt **normal hyperbolisch** bezüglich der Halbgruppe $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, falls die obigen Voraussetzungen erfüllt sind. Die Voraussetzung (2) bedeutet, daß $dS(t)$ eingeschränkt auf E^u zu einem stärkeren Grad expandiert als entlang $T\mathcal{M}$, sowie daß $dS(t)$ eingeschränkt auf E^s zu einem stärkeren Grad kontrahiert als entlang $T\mathcal{M}$.

Für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ kann die Umgebung $E^s(\epsilon) \oplus E^u(\epsilon)$ mit

$$E^\alpha(\epsilon) := \left\{ (m, x^\alpha) \;\middle|\; x^\alpha \in E^\alpha_m, m \in \mathcal{M}, \|x^\alpha\| < \epsilon \right\}$$

für $\alpha = u, s$ mit einer Schlauchumgebung $\theta(\epsilon)$ von $\mathcal{M}$ identifiziert werden.

Satz 4.11. *[BLZ00, S.4645] Sei $t_1 > t_0$ und $\epsilon > 0$. Unter den obigen Voraussetzungen 1., 2. und 3. existiert in einer ϵ-Umgebung $\theta(\epsilon)$ eine eindeutige $\mathcal{C}^1$-zentrumstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs}(\epsilon)$ und eine $\mathcal{C}^1$-zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit $W^{cu}(\epsilon)$ für $S(t)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist gerade der Schnitt $W^{cs}(\epsilon) \cap W^{cu}(\epsilon)$ der zentrumstabilen und -instabilen Mannigfaltigkeiten.*
   Für alle $m \in M$ gilt $T_m W^{cs}(\epsilon) = E^s_m \oplus T_m\mathcal{M}$ und $T_m W^{cu}(\epsilon) = E^u_m \oplus T_m\mathcal{M}$.

2. *Die zentrumstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs}(\epsilon)$ nähert sich unter Wirkung der Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ an, d.h. $S(t)W^{cs}(\epsilon) \to \mathcal{M}$ für $t \to \infty$.*
   $W^{cs}(\epsilon) = \left\{ x \in \theta(\epsilon) \;\middle|\; S(kt_1)x \in \theta(\epsilon) \text{ für } k > 0 \right\}$ für $t_1 > t_0$.

3. *Ebenso läßt sich die zentruminstabile Mannigfaltigkeit $W^{cu}(\epsilon)$ charakterisieren:*
   $W^{cu}(\epsilon) = \left\{ x \in \theta(\epsilon) \;\middle|\; \text{Für } k > 0: \text{ existiert } y_k \in \theta(\epsilon), \text{ so daß} S(kt_1)y_k = x \right\}$.

4. *Auf der zentrumsinstabilen Mannigfaltigkeit kann die Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ eindeutig zu einer Gruppe $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ fortgesetzt werden. Die zentruminstabile Mannigfaltigkeit $W^{cu}(\epsilon)$ nähert sich unter Wirkung der Lösungshalbgruppe $\{S(t)\}_{t \leq 0}$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ an, d.h. $S_{-t}W^{cu}(\epsilon) \to \mathcal{M}$ für $t \to \infty$.*

Bemerkung 4.12.

[4] Diese Voraussetzung kann nach [BLZ00] weggelassen werden, falls die Bündel nicht als glatt vorausgesetzt werden. Dann kann auch die Voraussetzung von $\mathcal{C}^2$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ abgeschwächt werden.

1. Die Mannigfaltigkeiten $W^{cs}(\epsilon)$ und $W^{cu}(\epsilon)$ sind invariant unter S_{t_1}. Die zentrumin-stabile Mannigfaltaigkeit $W^{cu}(\epsilon)$ enthält alle Punkte in der Umgebung von $\mathcal{M}$, deren negative Halborbits existieren, in der Umgebung $\theta(\epsilon)$ von $\mathcal{M}$ liegen und sich $\mathcal{M}$ für negative Zeit annähern. Entsprechend enthält die zentrumstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs}(\epsilon)$ alle Punkte in der Umgebung $\theta(\epsilon)$, deren positive Halborbits in der Umgebung bleiben und sich für positive Zeiten $\mathcal{M}$ annähern. Durch die zentrumstabile und -instabile Mannigfaltigkeit ist so das asymptotische Verhalten der Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ in der Umgebung $\theta(\epsilon)$ bestimmt.

2. Ist $\mathcal{M}$ ein hyperbolischer Fixpunkt, dann reduziert sich der Satz auf die Existenz von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten an einen hyperbolischen Fixpunkt.

Die Dynamik in der Umgebung von $\mathcal{M}$ ist durch die Dynamik auf den invarianten Mannigfaltigkeiten vollständig bestimmt und vollzieht sich in drei Richtungen: die zentrale, stabile und instabile Richtung. In der stabilen Richtung nähert sich ein Orbit der Halbgruppe für positive Zeiten exponentiell der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ an. In der instabilen Richtung nähert sich ein Orbit der Halbgruppe für negative Zeiten exponentiell der Mannigfaltigkeit an. Deshalb wird die Dynamik insbesondere durch die zentrale Richtung charakterisiert: Für jeden Punkt $x \in W^{cs}(\epsilon)$ gibt es ein $m \in \mathcal{M}$, so daß $S(t)x$ und $S(t)m$ dasselbe asymptotische Verhalten besitzen. Demnach kann die zentrumstabile Mannigfaltigkeit in disjunkte Untermannigfaltigkeiten entsprechend des asymptotischen Verhaltens zerlegt werden. Es läßt sich also eine Blätterung auf ihr definieren. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 4.13. *[BLZ00, S.4646] Zu einem hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ gibt es eine eindeutige Familie von $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten $\{W_m^{ss}(\epsilon)\}_{m\in\mathcal{M}}$ der zentruminstabilen Mannigfaltigkeit $W^{cs}(\epsilon)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $m \in \mathcal{M}$ schneidet die Untermannigfaltigkeit $W_m^{ss}(\epsilon)$ die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in genau einem Punkt, nämlich in m.*
   Für den Tangentialraum an jedem Punkt $m \in \mathcal{M}$ gilt: $T_m W_m^{ss}(\epsilon) = E_m^s$.
   Die Familie $\{W_m^{ss}(\epsilon)\}_{m\in\mathcal{M}}$ ist stetig in m.

2. *Je zwei Untermannigfaltigkeit $W_{m_1}^{ss}$ und $W_{m_2}^{ss}$ sind für $m_1 \neq m_2$ disjunkt.*
   Die zentrumstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs}(\epsilon)$ ist gerade die Vereinigung $\bigcup_m W_m^{ss}(\epsilon)$ aller Untermannigfaltigkeiten.
   Die Familie $\{W_m^{ss}(\epsilon)\}_{m\in\mathcal{M}}$ ist invariant unter $S(t_1)$. Es gilt $S(t_1)(W_m^{ss}(\epsilon)) \subset W_{S(t_1)(m)}^{ss}(\epsilon)$ für alle $m \in \mathcal{M}$. Für $t > 0$ gilt die Invarianz eingeschränkt auf die Umgebung $\theta(\epsilon)$: $S(t)(W_m^{ss}(\epsilon)) \cap \theta(\epsilon) \subset W_{S(t)(m)}^{ss}(\epsilon)$.

3. *Für $x \in W_m^{ss}(\epsilon)$ und $m_1 \neq m \in \mathcal{M}$ gilt:*

$$\frac{\|S(t)x - S(t)m\|}{\|S(t)x - S(t)m_1\|} \to 0 \text{ exponentiell für } t \to \infty.$$

4. *Für alle $x, y \in W_m^{ss}(\epsilon)$ gilt: $\|S(t)x - S(t)y\| \to 0$, für $t \to \infty$.*

Die Familie $\{W_m^{ss}(\epsilon)\}$ bilden dann eine invariante stabile Blätterung auf $W^{cs}(\epsilon)$.

Ein analoger Satz läßt sich für die zentruminstabile Mannigfaltigkeit $W^{cu}(\epsilon)$ zeigen. Sie läßt sich durch instabile Untermannigfaltigkeiten blättern. Es läßt sich weiter zeigen, daß ein $\epsilon_1 > 0$ existiert, so daß für alle $\epsilon < \epsilon_1$ eine eindeutig als Graph einer Lipschitz-stetigen Abbildung darstellbare, $S(t)$-invariante Blätterung von $W^{cs}(\epsilon)$ existiert. Jedes

Blatt $W^{ss}(m)$ hängt stetig von $m \in \mathcal{M}$ ab. Es läßt sich sogar zeigen, daß jedes Blatt der stabilen Blätterung $\mathcal{C}^1$ ist.

Bemerkung 4.14. Man erinnere sich an den Satz 2.10 von Chen, Hale und Tan. In ihm wird die Existenz einer globalen invarianten Mannigfaltigkeit gezeigt, über den es eine Blätterung des Banachraums gibt. Der Satz enthielt nicht die Aussage, daß die Blätter jeweils stabile Mannigfaltgkeiten sind. In dem Satz 4.13 besteht die entsprechende Blätterung über die normal hyperbolische Mannigfaltigkeit aus stabilen Blättern.
Läßt sich zeigen, daß die im Satz 2.10 konstruierte Inertialmannigfaltigkeit normal hyperbolisch ist und die Voraussetzungen des Satzes 4.13 erfüllt sind, dann folgt, daß es eine Blätterung über die Inertialmannigfaltigkeit gibt, die die Inertialmannigfaltigkeit in genau einem Punkt schneidet und aus stabilen Blättern besteht.

Anwendung auf die Inertialmannigfaltigkeit

Korollar 4.15. *Sei E ein Hilbertraum und seien die Voraussetzungen von Satz 4.8 für die Evolutionsgleichung 4.1 erfüllt. Weiter sei insbesondere die Bedingung an die Lipschitz-Konstante von R so, daß eine Blätterung über E^α existiert. Sei $\{S(t)\}$ für jedes $t \geq 0$ stetig differenzierbar nach u.* ***Dann*** *besitzt die Evolutionsgleichung eine normal hyperbolische Inertialmannigfaltigkeit mit einer transversalen, stabilen Blätterung.*

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß die Voraussetzungen von 4.11 und 4.13 erfüllt sind.
Dann ist die Inertialmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit, da $S(t)$ stetig differenzierbar ist für jedes $t \geq 0$. Die Inertialmannigfaltigkeit sei n-dimensional. Sie ist im allgemeinen nicht kompakt, aber vollständig. Denn die Halbgruppe $\{S(t)\}$ läßt sich auf $\mathcal{M}$ zu einer Gruppe fortsetzen. Es existiert also zu jedem Anfangswert $u_0 \in \mathcal{M}$ ein vollständiger Orbit $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}$. Also ist das reduzierte System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf der Inertialmannigfaltigkeit vollständig integrabel. Die Vollständigkeit von $\mathcal{M}$ genügt aber nach [Pes04, S.55], um den Satz 4.11 zu beweisen.
Zeige dann, daß die in Satz 4.8 konstruierte Inertialmannigfaltigkeit normal hyperbolisch ist: Für alle $m \in \mathcal{M}$ ist zu zeigen, daß

$$E^\alpha = T_m\mathcal{M} \oplus E_m^s$$

gilt. Zu $m \in \mathcal{M}$ betrachte den linearisierten Differentialoperator $A + d_u f(m)$. Es gibt ein $u_0 \in \mathcal{M}$ und ein t, so daß $m = S(t)u_0$. Dann gibt es einen n-dimensionalen Spektraloperator $P(t)$ auf den von $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ aufgespannten Teilraum von E^α. Dabei sind $v_i(t)$ die Lösungen des linearisierten Systems

$$\frac{dv_i}{dt} + Av_i + d_u f(u(t)),$$
$$v_i(0) = v_i^0.$$

Dann ist $m + \langle v_1(t), \ldots, v_n(t)\rangle$ ein invarianter Tangentialraum an m und gleich $T_m\mathcal{M}$. Durch $(\mathbb{I} - P(t))E^\alpha$ wird der komplementäre, stabile Tangentialraum E_m^s konstruiert.
Es ist nun zu zeigen, daß die Wachstumsraten von $dS(t)$ entlang des stabilen Tangentialraums kleiner sind als entlang des Tangentialraums an die Inertialmannigfaltgkeit. Aus der Existenz der Inertialmannigfaltigkeit folgt bereits, daß die Spektrallücke von A so groß ist, daß diese nicht durch die Störungen $d_u f(u(t))$ übertreten wird. Der Spektralprojektor ist ein stetiger Operator und hängt stetig von t ab, denn f ist nach Voraussetzung stetig differenzierbar. Es gilt mit $\beta_1 < \beta_2$ und $\beta_2 > \frac{1}{\tau}$ die Abschätzung

$$\left\|(e^{-At}P)^{-1}\right\| \leq Ce^{\beta_1 t}, \ \left\|e^{-At}(\mathbb{I} - P)\right\| \leq Ce^{-\beta_2 t}.$$

Damit ist das Wachstum von $dS(t)$ entlang $P(t)E^\alpha$ ebenfalls durch $C'e^{-\beta_1 t}$ nach unten beschränkt, und es ist auf jeden Fall stärker als das Wachstum von $dS(t)$ entlang $Q(t) = (\mathbb{I} - P(t))E^\alpha$, denn $\beta_1 < \beta_2$.
Diese Wachstumsschranken gelten für alle $m \in \mathcal{M}$, so daß es für jeden Punkt $m \in \mathcal{M}$ eine invariante Zerlegung des Tangentialraums gibt: $E^\alpha = P(t)E^\alpha \oplus Q(t)E^\alpha$.

Nach dem Satz 2.10 gibt es eine Blätterung über die Inertialmannigfaltigkeit: Es ist zu zeigen, daß es sich hierbei um die stabile Blätterung aus 4.13 handelt.
Sei M_m ein Blatt an einen beliebigen Punkt $m \in \mathcal{M}$, dann gilt mit 2.10, daß für alle $x \in M_m$ gilt:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)m\| \leq \frac{1}{\tau} \ln \gamma_2, \ \gamma_2 < 1.$$

Gleichzeitig wird der Orbit von x exponentiell von der Inertialmannigfaltigkeit angezogen, d.h. es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein T_1, so daß für $t > T_1$ gilt:

$$d_E(S(t)x, \mathcal{M}) < \epsilon.$$

Aus der Invarianz der Blätterung folgt, daß $S(t)x \in M_{S(t)m}$ für $t \geq 0$ liegt. Angenommen, $S(t)x$ näherte sich dem Orbit von $m_1 \neq m \in \mathcal{M}$ schneller an als dem Orbit von m, dann gäbe es ein $T_2 > 0$, so daß für $t \geq T_2$ folgte:

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - S(t)m\| &> \|S(t)x - S(t)m_1\| \\
\frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)m\| &> \frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)m_1\| \\
\sup_{t\geq T_2} \frac{1}{t_2} \ln \|S(t)x - S(t)m\| &> \sup_{t\geq T_2} \frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)m_1\| \\
\frac{1}{\tau} \ln \gamma_2 &> \lim_{t\to\infty} \sup_{t\geq T_2} \frac{1}{t} \ln \|S(t)x - S(t)m_1\|.
\end{aligned}$$

Damit folgt $m = m_1$, denn die Blätter M_m und M_{m_1} sind für $m \neq m_1$ disjunkt und eindeutig durch die obere Wachstumsschranke des Limes superiors charakterisiert.
Es folgt also, daß sich der Orbit von x dem Orbit von m schneller annähert, als jedem anderen Orbit auf $\mathcal{M}$. Damit folgen die Eigenschaften (3) und (4) aus dem Satz 4.13. □

4.3 Existenz von Blätterungen auf der Inertialmannigfaltigkeit

Neben der – zur Inertialmannigfaltigkeit – transversalen Blätterung des Hilbertraums E, die aus stabilen Blättern besteht, lassen sich auch Blätterungen der Inertialmannigfaltigkeit selbst konstruieren, die in Bezug auf das reduzierte System auf der Inertialmannigfaltigkeit invariant sind.
Dazu sei der Operator A der Evolutionsgleichung 4.1 selbstadjungiert mit kompakter Resolvente. Die Eigenwerte λ_n, $n \in \mathbb{N}$, aufsteigender Größe nach geordnet, sind damit alle reell und von endlicher Vielfachheit. Weiter sei $f : E^\alpha \to E^\beta$ mit $0 \leq \alpha - \beta < 1$ eine Lipschitz-stetige, beschränkte Abbildung mit globaler Lipschitzkonstante. Zu hinreichend großem $N \in \mathbb{N}$ bezeichne P den Spektralprojektor zur Spektralmenge $\sigma_1(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \lambda \leq \lambda_N\}$. Durch $\mathcal{M} = \{p + \Phi(p) \mid p \in PE^\alpha\}$ sei die Inertialmannigfaltigkeit definiert. Dann läßt sich die Evolutionsgleichung 4.1 auf die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} + Ap(t) + Pf(p + \Phi(p(t)) = 0, \quad p \in PE^\alpha \tag{4.7}$$

auf der endlichdimensionalen Inertialmannigfaltigkeit reduzieren. Nun zur Konstruktion der invarianten Blätterungen auf der Inertialmannigfaltigkeit.

Satz 4.16. *[BL94, S.129 ff.] Sei* $\mathrm{Lip}(f)$ *hinreichend klein in Abhängigkeit von* λ_N*, der Größe der Spektrallücke und* α*.* ***Dann*** *gibt es zu jedem* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < N$*, eine invariante Blätterung für das reduzierte System 4.7. Jedes Blatt ist bestimmt durch*

$$B_{k+1}^{N,N}(p_0) := \left\{ h_{k+1}^{N,N}(\eta, p_0) + \eta \;\middle|\; \eta \in E_{k+1}^N \right\}, \quad p_0 \in PE^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei bezeichne $E_{k+1}^N = P_{k+1}^N E^\alpha$*, wobei* P_{k+1}^N *der Spektralprojektor zur Spektralmenge* $\sigma_{k+1}^N = \left\{ \lambda \in \sigma(A) \;\middle|\; \lambda_{k+1} \leq \lambda \leq \lambda_N \right\}$ *ist.*
Die Abbildung $h_{k+1}^{N,N} : E_{k+1}^N \times PE^\alpha \to E_1^k$ *ist stetig in beiden Variablen und stetig differenzierbar in* $\eta \in E_{k+1}^N$*.*
Jedes Blatt $B_{k+1}^{N,N}(p_0)$ *schneidet* $M_1^{k,N}$ *in einem einzigen Punkt, der eindeutig durch* p_0 *bestimmt ist und stetig von diesem abhängt.*

Satz 4.17. *[BL94, S.130] Durch* $W_{k+1}^{N,N}(p_0 + \Phi(p_0)) = \left\{ p + \Phi(p) \;\middle|\; p \in B_{k+1}^{N,N}(p_0) \right\}$ *wird eine Blätterung der Inertialmannigfaltigkeit* $\mathcal{M}$ *definiert.*

Satz 4.18. *[BL94, S.130] Sei* $\mathrm{Lip}(f)$ *hinreichend klein.* ***Dann*** *existiert zu jedem* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < N$*, eine invariante Blätterung für das reduzierte System 4.7, so daß*

$$PE^\alpha = \bigcup_{p_0 \in PE^\alpha} B_1^{k,N}(p_0)$$

eine stetige Blätterung ist. Jedes Blatt ist durch

$$B_1^{k,N}(p_0) = \left\{ h_1^{k,N}(\xi, p_0) + \xi \;\middle|\; \xi \in E_1^k \right\}$$

gegeben. Der Punkt p_0 *liegt in* PE^α*, und die Abbildung* $h_1^{k,N} : E_1^k \times PE^\alpha \to E_{k+1}^N$ *eine stetige Abbildung, die in* $\xi \in E_1^k$ *Lipschitz-stetig ist.*
Jedes Blatt $B_1^{k,n}(p_0)$ *schneidet* $M_{k+1}^{N,N}$ *in einem Punkt, der eindeutig von* p_0 *bestimmt ist und stetig von* p_0 *abhängt. Es gibt ein* $c(\lambda_k)$*, so daß*

$$B_1^{k,N}(p_0) = \left\{ \hat{p}_0 \in \mathcal{M} \;\middle|\; \sup_{t \leq 0} \left\| c e^{\lambda_k t} (p(t, p_0) - p(t, \hat{p}_0) \right\|_\alpha < \infty \right\}$$

gilt, wobei $p(t, p_0)$ *die Lösung der Gleichung 4.7 zum Anfangswert* $p(0) = p_0$ *bezeichne.*

Beweis (Skizze)*:* Sei $p(t, p_0)$ eine Lösung der reduzierten Gleichung 4.7 auf der Inertialmannigfaltigkeit und definiere die Menge

$$B_1^{k,N}(p_0) = \left\{ \hat{p}_0 \in \mathcal{M} \;\middle|\; \sup_{t \leq 0} \left\| c e^{(\lambda_k + \epsilon_k) t} (p(t, p_0) - p(t, \hat{p}_0) \right\|_\alpha < \infty \right\},$$

dabei hängt $\epsilon_k > 0$ von der Differenz der benachbarten Eigenwerte $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ und $\lambda_k - \lambda_{k-1}$ ab. Setze $w(t) = p(t, p_0) - p(t, \hat{p}_0)$. Es ist zu zeigen, daß $\hat{p}_0 \in B_1^{k,N}(p_0)$ genau dann gilt, wenn

$$\sup_{t \leq 0} \left\| e^{(\lambda_k + \epsilon_k) t} w(t) \right\| < \infty$$

gilt und folgende Gleichung erfüllt ist:

$$w(t) = e^{-A_1^k t}\xi + \int_0^t e^{-A_1^k(t-s)} P_1^k(F^n(w+p(s,p_0)) - F^n(p(s,p_0)))ds$$
$$+ \int_{-\infty}^t e^{-A_{k+1}^n(t-s)} P_{k+1}^n(F^n(w+p(s,p_0)) - F^n(p(s,p_0)))ds,$$

wobei $F^n(p) = P_1^n(F(p+h_1^n(p))$ und $\xi = P_1^k w(0)$ sind. Definiere nun eine Abbildung J_k^n, die w zu jedem $\xi \in E_k^1$ auf die rechte Seite der obigen Gleichung abbildet. Es muß nun gezeigt werden, daß diese Abbildung J_k^n für eine hinreichend kleine Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(F)$ eine Kontraktion ist. Dann existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz zu jedem $\xi \in E_k^1$ ein eindeutiger Fixpunkt $w(t,\xi,p_0)$. Damit läßt sich nun die Abbildung $h_1^{k,N}$ definieren.

4.4 Eine Anwendung für Blätterungen: Das Theorem von Hartman-Grobman für die Cahn-Hilliard-Gleichung

Die eindimensionale Cahn-Hilliard-Gleichung beschreibt das Verhalten von einem flüssigen Gemisch aus zwei Metallen bei plötzlicher Abkühlung. Beim Übergang vom flüssigen zum festen Aggregatszustand trennt sich das Gemisch in seine beiden Bestandteile. Die Gleichung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W'(u)\right) \quad 0 < x < \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x = 0,\ x = \pi. \tag{4.8}$$

Dabei ist $W(u) = \frac{(1-u^2)^2}{4}$, und die Funktion $u(x,t)$ bezeichnet die skalierte Konzentration eines Metalls zu einem bestimmten Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort x. Es wird angenommen, daß die Masse von u erhalten bleibt: Also gelte $\int_0^\pi u dx = \int_0^\pi \overline{u} dx$, wobei $\overline{u}$ eine stationäre Lösung mit $\overline{u}_t = 0$ bezeichne.

Durch Integration der Gleichung 4.8 von 0 bis x und Umbezeichnung läßt sie sich als folgende Evolutionsgleichung in dem Hilbertraum $E = L^2(0,\pi)$ auffassen:

$$\frac{dw}{dt} + Aw = F(w),$$
$$Aw = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(W''(\overline{u})\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$F(w) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(W'(\overline{u}) + W''(\overline{u})\frac{\partial w}{\partial x} - W'\left(\overline{u} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right). \tag{4.9}$$

Der Operator A ist selbstadjungiert, von unten beschränkt und mit kompakter Resolvente. Der Definitionsbereich $D(A)$ ist $\{v \in W^{4,2}(0,\pi); w(0,t) = w(\pi,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(\pi,t) = 0\}$. Es gibt also ein $a > 0$, so daß der Operator $A + a\mathbb{I}$ positiv definit ist. Der Raum $E^{\frac{1}{2}} := D((A+a\mathbb{I})^{\frac{1}{2}})$ ist bezüglich der Graphen-Norm $\|\ \|_{\frac{1}{2}}$ ein Hilbertraum. Die Gleichung 4.9 ist ein Gradientensystem und besitzt einen globalen Attraktor. Die Abbildung F ist unter den obigen Bedingungen von $E^{\frac{1}{2}}$ nach E stetig differenzierbar mit $F(0) = 0$ und $DF(0) = 0$. Da die Gleichung 4.9 einen globalen Attraktor besitzt, kann angenommen werden, daß F global beschränkt ist. Denn wenn dies nicht der Fall ist, kann F außerhalb einer Umgebung des globalen Attraktors durch eine cut-off-Funktion so verändert werden,

daß sie global beschränkt ist.
Das Spektrum von A besteht nur aus den Eigenwerten $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

und es gilt $\lambda_n = n^4 + \mathcal{O}(n^2),\ n \to \infty$. Die entsprechenden Eigenfunktionen $w_1, w_2 \ldots$ bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums. Es läßt sich dann $N \in \mathbb{N}$ so groß wählen, daß die Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(F)$ hinreichend klein ist, so daß eine Inertialmannigfaltigkeit existiert: $\mathcal{M} = \left\{ p + \Phi(p) \mid p \in PE^{\frac{1}{2}} \right\}$. Dabei ist P die entsprechende Projektion auf den Eigenraum zu den ersten N Eigenwerten. Die Abbildung Φ ist stetig differenzierbar, da F stetig differenzierbar ist. Es gilt dann:

Satz 4.19. *[BL94, S.112] Wähle N hinreichend groß. Dann ist die Gleichung* 4.9 *topologisch konjugiert zu dem System*

$$\begin{aligned} \dot{p} + Ap &= PF(p + \Phi(p)), \quad p \in PE^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{q} + Aq &= 0, \quad q \in QE^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Der Fluß auf der Inertialmannigfaltigkeit ist endlichdimensional. Also gilt hier das Theorem von Hartman-Grobman: Es gibt eine Umgebung des hyperbolischen Fixpunktes, so daß der Fluß auf dieser Umgebung zu dem linearisierten Fluß konjugiert ist. Damit ergibt sich mit dem obigen Satz:

Satz 4.20. *[BL94, S.113] Der Fluß der eindimensionalen Cahn-Hilliard-Gleichung ist in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes topologisch konjugiert zum linearen Fluß.*

Der Fluß ist also in der Nähe hyperbolischer Gleichgewichtspunkte strukturstabil.
Zum Beweis dieses Satzes konstruieren Bates und Lu eine Familie von Blätterungen auf der Inertialmannigfaltigkeit sowie eine Blätterung, deren Blätter jeweils transversal zu der Inertialmannigfaltigkeit sind. Mit Hilfe der eindeutigen Schnittpunkte dieser Blätterungen wird ein Homöomorphismus konstruiert, der jeden Orbit des Systems auf einen Orbit des reduzierten Systems auf der Inertialmannigfaltigkeit abbildet. Dieses endlichdimensionale System ist wiederum topologisch konjugiert zu dem linearisierten System. So gilt diese Aussage auch für die ursprüngliche Gleichung.
Es bezeichne nun P_n den Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert λ_n. Setze dann $E_n = P_n E^\alpha$. Konstruiere nun zu jedem $u \in E$ ein geeignetes $v_n \in E_n$. Zu jedem Punkt $u \in E$ gibt es nach dem Satz 2.10 einen Punkt $\xi = p + \Phi(p) \in \mathcal{M}$ mit $p \in PE^\alpha$ auf der Inertialmannigfaltigkeit, so daß u auf dm stabilen Blatt M_ξ von ξ liegt. Der Schnittpunkt $\xi \in \mathcal{M}$ ist durch u eindeutig bestimmt. Es gibt zum Punkt ξ dann wiederum ein eindeutiges Blatt $W_1^{N,N}(p+\Phi(p))$, das die invariante Mannigfaltigkeit M_n in einem eindeutigen Punkt $v_n + h_n(v_n)$ schneidet. E_n ist der Eigenraum zum Eigenwert λ_n von A; dann entsteht durch die Störung f die Mannigfaltigkeit M_n auf E_n. Definiere den Homöomorphismus Ψ durch

$$\Psi(u) := \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Es muß gezeigt werden, daß die Reihe konvergiert und Ψ in u stetig, bijektiv und die Inverse ebenfalls stetig ist.

Ausblick

In dieser Arbeit bin ich der Frage nachgegangen, inwieweit Blätterungen im Zusammenhang von partiellen Differentialgleichungen auftreten. Ihre Existenz läßt sich für eine Klasse von dissipativen Evolutionsgleichungen im Zusammenhang mit einer Inertialmannigfaltigkeit oder an einen hyperbolischen Fixpunkt nachweisen. Derzeit wird ihre Existenz vor allem benutzt, um die Strukturstabilität eines Systems nachzuweisen.

Darüber hinaus hat mich die Frage beschäftigt, ob sich die Dynamik von Blätterungen für das Verständnis von unendlichdimensionalen dynamischen Systemen ausnutzen läßt. Insbesonders habe ich mich gefragt, ob geometrische Strukturen in Blätterungen - beispielsweise die Existenz außergewöhnlicher Mengen - mit einem bestimmten dynamischen Verhalten einer partiellen Differentialgleichung - etwa chaotischem Verhalten - korreliert sind. Zur Beantwortung dieser Frage war zunächst zu klären, ob Blätterungen im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen existieren. Damit sie als Indikatoren des dynamischen Verhaltens dienen können, sollten die Blätterungen aus Äquivalenzklassen eines bestimmten asymptotischen Verhaltens bestehen und vor allem invariant unter dem Halbfluß der partiellen Differentialgleichung sein. Deshalb boten sich als Kandidaten für Blätter die invarianten stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten an. Es ist aus der Theorie der partiell hyperbolischen (endlichdimensionalen) dynamischen Systeme bekannt, daß es stabile, instabile und zentrale Blätterungen gibt, die kurz im Anhang vorgestellt werden. Dieses Konzept ist aber nicht direkt auf die partiellen Differentialgleichungen übertragbar, denn entscheidend dafür ist, daß an jedem Punkt einer Menge dieselben Wachstumschranken für die Ableitung des Differentialoperators gelten. So besteht der reguläre Attraktor von Gradientensystemen zwar nur aus instabilen Mannigfaltigkeiten und sieht lokal „hyperbolisch“ aus, aber durch die unterschiedliche Stabilität der Gleichgewichtspunkte ändern sich die Wachstumsschranken des Flusses unstetig. Deshalb besitzt jede Mannigfaltigkeit auch jeweils eine andere Dimension.
Aus diesen Gründen hat sich die Inertialmannigfaltigkeit zur weiteren Untersuchung angeboten, weil sie erstens eine invariante, endlichdimensionale Mannigfaltigkeit ist und zweitens für alle ihre Punkte dieselbe Wachstumsschranke gilt. Ein Nachteil der Inertialmannigfaltigkeit ist allerdings, daß die Voraussetzungen für ihre Existenz, insbesondere die große Spektrallücke, sehr restriktiv sind, so daß nur für wenige, vor allem niedrigdimensionale partielle Differentialgleichungen Inertialmannigfaltigkeiten nachgewiesen werden können.
Transversal zur und auf der Inertialmannigfaltigkeit können Blätterungen konstruiert werden. Diese werden aber - soweit ich gesehen habe - zum Beweis der Robustheit der Inertialmannigfaltigkeit verwendet. So bleiben meine Fragen größtenteils offen:

1. Betrachte den Schnitt eines transversalen Schnitts Σ der Blätterung mit einem Blatt einer Blätterung B. Ist der Abschluß des Schnitts $\overline{B \cap \Sigma}$ eine perfekte Menge mit

nichtleerem Inneren, dann ist B ein außergewöhnliches Blatt. Die invariante, hyperbolische Menge des linearen Hufeisens ist homöomorph zum Cantorstaub, also perfekt und nirgendswo dicht. Sie besteht aus den Schnittpunkten der stabilen und instabilen Blätterungen. Schnittpunkte von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten erzeugen heterokline Orbits und homokline Orbits. Ihr Auftreten wiederum ist ein Zeichen für Chaos. Deshalb ist das Auftreten von Hufeisen in einem zweidimensionalen dynamischen System auch ausreichend, um die Dynamik des gesamten Systems zu verstehen. *Läßt sich ein höherdimensionales Analogon zum Hufeisen, etwa eine außergewöhnliche Menge einer Blätterung, auch für partielle Differentialgleichungen finden?*

2. Die Holonomie-Pseudogruppe auf einer Blätterung kann als ein dynamisches System aufgefaßt werden, für das dynamische Begriffe definiert werden können, beispielsweise die Entropie. *Kann man der Holonomie-Pseudogruppe in der Theorie der partiellen Differentialgleichung eine Bedeutung geben und Konzepte aus der Theorie der Blätterungen auf die partiellen Differentialgleichungen übertragen?* Weiter gefragt: Läßt sich die Dynamik einer Blätterung direkt mit der Dynamik einer partiellen Differentialgleichung in Beziehung setzen?

3. In der Theorie der partiell hyperbolischen Systeme wird die absolute Stetigkeit der Holonomie-Abbildung untersucht: Die stabilen und instabilen Distributionen sind (eindeutig) integrabel und die zugehörigen stabilen und instabilen Blätterungen sind absolut stetig. Anders die zentrale Distribution: Pesin hat gezeigt, daß aus der Integrabilität der zentralen Distribution zu einer zentralen Blätterung mit kompakten Blättern folgt, daß diese Blätterung nicht absolut stetig ist. Diese nicht-absolute Stetigkeit der zentralen Blätterung ist sogar ein generisches Phänomen. Dies zeigt, daß die Theorie der Blätterungen im engen Rahmen bereits zur Untersuchung dynamischer Systeme verwendet wird. Einen kurzen Ausblick auf diese Ansätze gebe ich im Anhang.

4. Ist die Inertialmannigfaltigkeit normal hyperbolisch, dann liegt es nahe, das reduzierte System auf der Inertialmannigfaltigkeit, ein endliches System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, als partiell hyperbolisch zu bezeichnen. Partielle Hyperbolizität, wie sie von Pesin als Verallgemeinerung der Hyperbolizität eingeführt wurde, ist aber auf kompakten, glatten Riemann-Mannigfaltigkeiten definiert. *Läßt sich die partielle Hyperbolizität auf endlichdimensionalen, vollständigen Mannigfaltigkeiten in einem Banachraum definieren und lassen sich die entsprechenden Eigenschaften übertragen?* Für die weitere Theorie von partiell hyperbolischen Diffeomorphismen von Pesin spielen invariante, glatte Maße auf der Mannigfaltigkeit eine wichtige Rolle. Hier stellt sich zunächst die schwierige Frage, ob solche Maße auf einer vollständigen, endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit in einem Banachraum immer zu finden sind.

Anhang A

Blätterungen im Endlichdimensionalen

A.1 Stabile und instabile Blätterungen

In endlichdimensionalen dynamischen Systemen gibt es die Klasse der hyperbolischen Diffeomorphismen, zu denen sich stabile und instabile Blätterungen konstruieren lassen. Diese Tatsache war ein wichtiger Ausgangspunkt für diese Arbeit:
Sei im Folgenden $f : M \to M$ ein $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus auf einer kompakten, glatten, Riemannschen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M ohne Ränder.

Definition A.1. Ein Diffeomorphismus f heißt **hyperbolisch** oder **Anosov-Diffeomorphismus** auf M, falls für alle $x \in M$ eine invariante Zerlegung des Tangentialraums $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ existiert und es Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda < 1 < \mu$ gibt, so daß für jedes $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} dfE^s(x) &= E^s(f(x)), \\ dfE^u(x) &= E^u(f(x)), \\ \|df^n v\| &\leq c\lambda^n \|v\| \text{ für alle } v \in E^s(x),\ n \geq 0, \\ \left\|df^{-n} v\right\| &\leq c\mu^{-n} \|v\| \text{ für alle } v \in E^u(x),\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Das Tangentialbündel besitzt also eine eindeutige df-invariante Zerlegung in die stabilen und instabilen Unterbündel $TM = E^s \oplus E^u$. Die Distributionen E^s und E^u sind zwar integrabel, aber i. a. nicht glatt (nur, falls Kodimension 1), so daß das Frobenius-Theorem 1.7 nicht anwendbar ist.
Die Konstruktion der Integralmannigfaltigkeiten zu E^s und E^u erfolgt deshalb über das Theorem der lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten, das durch die konstruktive Methode von Hadamard oder von Lyapunov-Perron bewiesen wird. Wendet man den Beweis von Hadamard an, dann ist die Mannigfaltigkeit gerade der Graph einer Abbildung, die als Fixpunkt einer Kontraktion zwischen geeigneten Funktionenräumen mit dem Banachschen Fixpunktsatz gefunden wird. Lyapunov-Perrons-Methode besteht darin, die Abbildung mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen angewandt auf einen nichtlinearen Operator in einem geeigneten Funktionenraum zu konstruieren und die Mannigfaltigkeit ebenfalls als Graph dieser Abbildung darzustellen. Die lokalen Mannigfaltigkeiten können zu globalen fortgesetzt werden, die gerade die Integralmannigfaltigkeiten an die stabile Distribution darstellen. Die globalen stabilen Mannigfaltigkeiten erzeugen eine Blätterung auf M.

Die globale Mannigfaltigkeit wird durch Rückwärtsiteration der lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten entlang des positiven Halborbits von x gebildet:

$$W(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V(f^n(x))).$$

Die Menge $W(x)$ ist eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit, die sich in M $\mathcal{C}^q$-immersieren läßt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
W(x) \cap W(y) &= \emptyset, \text{ falls } y \notin W(x), \\
W(x) &= W(y), \text{ falls } y \in W(x), \\
f(W(x)) &= W(f(x)), \\
W(x) &= \{y \in M | d_W(f^n x, f^n y) \leq c(\lambda + \epsilon)^n d_W(x, y)\},
\end{aligned}$$

wobei ϵ hinreichend klein und $c = c(\epsilon) > 0$ unabhängig von x, y und n ist. Die obigen Eigenschaften legen nahe, daß sich eine Äquivalenzrelation auf M wie folgt definieren läßt:

$$x \equiv_W y \;\Leftrightarrow\; y \in W(x).$$

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität dieser Relation folgen sofort aus den obigen Eigenschaften von $W(x)$. Die globalen stabilen Mannigfaltigkeiten bilden also eine Äquivalenzklassenzerlegung von M. Jede Äquivalenzklasse $W(x)$ ist ein Blatt der stabilen Blätterung $W := \{W(x)\}$ von M. Die Blätterung W besteht gerade aus den maximalen Integralmannigfaltigkeiten von E^s, denn es gilt für alle $x \in M$: Es gibt eine k-dimensionale immersierte Untermannigfaltigkeit von M, $W(x)$, so daß $x \in W(x)$ und für alle $y \in W(x)$ ist $W(x) = W(y)$ und damit $T_y W(x) = T_y W(y) = E^s(y)$ nach Konstruktion.
Analog zu den stabilen Mannigfaltigkeiten lassen sich instabile Mannigfaltigkeiten konstruieren. Die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten $V(x)$ und $U(x)$ erzeugen auf M eine Produktstruktur. Es gibt also zu jedem Anosov-Diffeomorphismus zwei transversale, f-invariante Blätterungen, die stabile und instabile Blätterung, auf M.

A.2 Partiell hyperbolische Diffeomorphismen

„Partielle Hyperbolizität“ ist eine Erweiterung des Begriffs der Hyperbolizität. Aber nicht alle „schönen“ Eigenschaften von Anosov-Diffeomorphismen lassen sich auf partiell hyperbolische Diffeomorphismen übertragen. Beispielsweise weiß man, daß jeder volumenerhaltende Anosov-Diffeomorphismus topologisch transitiv und ergodisch ist. Ein analoges Resultat gilt für partiell hyperbolische Diffeomorphismen nur, wenn man weitere Voraussetzungen an den Diffeomorphismus macht. Hierbei hat sich die Frage, ob die stabile und die instabile Blätterung gemeinsam integrabel sind, als entscheidend herausgestellt. Auch weitere Eigenschaften der stabilen, instabilen und zentralen Distribution spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der partiell hyperbolischen Diffeomorphismen.
Deshalb hier eine kurze, einleitende Darstellung, um zu zeigen, auf welche Weise Begriffe der Blätterungen in den dynamischen Systemen eine Rolle spielen können.

Definition A.2. [Pes04, S.14] Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ auf einer kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M heißt **partiell hyperbolisch** auf einer invarianten Menge Λ, falls Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3$ mit

$\mu_1 < 1 < \lambda_3$ existieren und es eine invariante Zerlegung des Tangentialraums in stabile, instabile und zentrale Eigenräume gibt, so daß gilt

$$\begin{aligned} T_xM &= E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x), \quad x \in \Lambda \\ d_xfE^\alpha(x) &= E^\alpha(f(x)), \quad \alpha = s, c, u. \\ c^{-1}\lambda_1^n &\leq \left\| d_xf^n|_{E^s(x)} \right\| \leq c\mu_1^n \\ c^{-1}\lambda_2^n &\leq \left\| d_xf^n|_{E^c(x)} \right\| \leq c\mu_2^n \\ c^{-1}\lambda_3^n &\leq \left\| d_xf^n|_{E^u(x)} \right\| \leq c\mu_3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die invarianten Distributionen sind zwar nicht glatt, aber Hölder-stetig (vgl. [Pes04, S.24]), d.h. für alle $x, y \in M$ gilt

$$\angle E^s(x), E^s(y) \leq Cd(x,y)^\alpha, \ 0 < C, \ 0 < \alpha < \frac{\ln \lambda_2 - \ln \mu_1}{\ln \mu_2}.$$

Die stabilen und instabilen Blätterungen werden analog wie bei den hyperbolischen Diffeomorphismen konstruiert.

Definition A.3. [Pes04, S.47] Ein Diffeomorphismus f heißt **normal hyperbolisch** auf einer invarianten, kompakten Mannigfaltigkeit N, falls f auf N partiell hyperbolisch ist, d.h. für jedes $x \in N$ existiert eine invariante Zerlegung des Tangentialraums:

$$T_xM = E^s(x) \oplus T_xN \oplus E^u(x).$$

Mit dem Satz über lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeiten kann man an jedes $x \in N$ eine lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit $V^s(x)$ und $V^u(x)$ konstruieren, so daß gilt

$$\begin{aligned} x \in V^s(x), &\quad x \in V^u(x), \\ T_xV^s(x) = E^s(x), &\quad T_xV^u(x) = E^u(x), \\ d(f^n(x), f^n(y)) \leq C(\mu_1 + \epsilon)^n d(x,y) &\quad \text{für alle } y \in V^s(x) \text{ und } n \geq 0, \\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C(\lambda_3 - \epsilon)^n d(x,y), &\quad \text{für alle } y \in V^u(x) \text{ und } \forall n \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein.
$V^s(x)$ und $V^u(x)$ sind f-invariant und ihre Vereinigung $\bigcup_{x \in N} V^s(x)$ bzw. $\bigcup_{x \in N} V^u(x)$ sind Lipschitz-Untermannigfaltigkeiten von M, tangential zu $E^s \oplus TN$ bzw. $E^u \oplus TN$.
Normal hyperbolische Mannigfaltigkeiten sind stabil bezüglich kleiner Störungen von f.
Man erkennt, daß Bates, Lu und Zeng in ihren Arbeiten [BLZ98] und [BLZ00] die obige Konstruktion analog auf Banachräume übertragen haben.

Die zentrale Distribution ist nicht immer integrabel. Es gibt aber Bedingungen, unter denen sogar die stärkere Eigenschaft der eindeutigen Integrabilität der zentralen Distribution garantiert ist. Deshalb folgende Unterscheidungen:

Definition A.4. [Pes04, S.50] Sei E eine k-dimensionale Distribution auf M, M glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt E

1. **eindeutig integrabel**, falls es eine Blätterung $\mathcal{B}$ mit k-dimensionalen Blättern gibt, so daß jede $\mathcal{C}^1$-Kurve $\sigma : \mathbb{R} \to M$ mit $\dot{\sigma}(t) \in E(\sigma(t))$ für alle t in $B(\sigma(0))$ enthalten ist. Insbesondere folgt $T_xB(x) = E(x)$ für jedes $x \in M$.

2. **lokal eindeutig integrabel**, falls für jedes $x \in M$ eine k-dimensionale, glatte Untermannigfaltigkeit $W(x)$ und $\alpha(x) > 0$ existiert, so daß eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\sigma : [0,1] \to M$ mit $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(t) \in E(\sigma(t))$ und Länge$(\sigma) < \alpha(x)$ in $W(x)$ enthalten ist.

3. **schwach integrabel**, falls für jedes $x \in M$ eine vollständige, immersierte $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit $W(x)$ existiert mit $x \in W(x)$ und $T_yW(x) = E(y)$ für jedes $y \in W(x)$. Die Integralmannigfaltigkeiten $W(x)$ können sich selbst schneiden und müssen keine Zerlegung von M liefern.

Ist eine Distribution E lokal eindeutig integrabel, dann ist sie integrabel und die integrable Blätterung ist eindeutig.

Definition A.5. [Pes04, S.54] Ein partiell hyperbolischer Diffeomorpismus f heißt **zentrum-isometrisch**, falls er isometrisch in der zentralen Richtung operiert, d.h. $\|df(x)v\| = \|v\|$ für alle $x \in M$ und alle $v \in E^c(x)$.

Ein partiell hyperbolischer Diffeomorphismus, der zentrum-isometrisch ist, besitzt eine lokal eindeutig integrable zentrale Distribution E^c.

Satz A.6. *[Pes04, S.55] Die zentrale Distribution E^c eines partiell hyperbolischen Diffeomorphismus f sei integrabel und die entsprechende Blätterung W^c glatt. Dann ist jeder $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus g, der in der $\mathcal{C}^1$-Topologie hinreichend nahe an f ist, ebenfalls partiell hyperbolisch mit einer integrablen zentralen Distribution E^c_g.*

Im allgemeinen ist die zentrale Blätterung nicht glatt. Deshalb haben Hirsch, Pugh und Shub die schwächere Eigenschaft *platten-expansiv*(plaque-expaniv) eingeführt:

Definition A.7. [Pes04, S.58] Ein Diffeomorphismus f heißt **platten-expansiv** in Bezug auf eine f-invariante Blätterung W, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so daß gilt: Wenn $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei ϵ-Pseudo-Orbits sind, die die Blätterung W respektieren, d.h. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ liegen $f(x_n)$ und x_{n+1} in einer gemeinsamen Platte, und wenn $d(x_n, y_n) < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, dann liegen x_n und y_n in einer gemeinsamen Platte für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Es gilt dann:

Satz A.8. *[Pes04, S.58] Sei f ein partiell hyperbolischer Diffeomorphismus, die zentrale Distribution E^c sei integrabel und die zentrale Blätterung W^c sei glatt, dann ist W^c platten-expansiv.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft der stabilen und instabilen Blätterungen ist die *absolute Stetigkeit*, die mit Hilfe der Holonomie-Abbildung definiert wird:

Definition A.9. [Pes04, S.76] Eine meßbare, invertierbare Abbildung $T : X \to Y$ auf Maßräumen (X, μ) und (Y, ν) heißt **absolut stetig**, falls daß Maß μ hinsichtlich des Maßes $T_*\nu$ absolut stetig ist.

Es läßt sich damit der folgende Satz zeigen:

Satz A.10. *[Pes04, S.77] Ein partiell hyperbolischer $\mathcal{C}^2$-Diffeomorphismus f auf einer kompakten, glatten Mannigfaltigkeit besitzt eine absolut-stetige Holonomie-Abbildung π wie unten definiert.*

Seien D^1 und D^2 zwei lokale Scheiben, die transversal zu der Familie der lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten sind, dann bildet π ein $y \in D^1 \cap V(w)$ auf den Schnittpunkt $D^2 \cap V(w)$ ab, wobei $V(w)$ die lokale stabile Mannigfaltigkeit durch $w \in B \supset D_1, D_2$ ist.

Die absolute Stetigkeit der Holonomie-Abbildung der lokalen Blätter bedeutet, daß das bedingte Maß, das durch das Volumen der lokalen Blätter erzeugt wird, absolut stetig ist bezüglich des Volumens der globalen Blätter. Das Auftreten einer nicht absolut-stetigen Blätterung ist als „Fubinis Alptraum“ in der Literatur bekannt. In diesem Fall gibt es eine Menge positiven Maßes, die fast alle Blätter der Blätterung in einer Nullmenge (bezüglich des Riemann-Volumens des lokalen Blattes) schneidet. Dieser Alptraum tritt aber nicht selten auf, wie der Name suggeriert, sondern die nicht-absolute Stetigkeit ist bei zentralen Blätterungen unter bestimmten Voraussetzungen ein generisches Phänomen, (vgl.[HP07]). Es läßt sich zeigen, daß die Distribution $E^s \oplus E^u$ nicht integrabel ist, falls f die Erreichbarkeitseigenschaft (accessibility property) besitzt, d.h. falls je zwei Punkte $x, y \in M$ durch einen Weg entlang lokaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten miteinander verbunden werden können. Hat f die Erreichbarkeitseigenschaft und erhält ein glattes Maß, dann ist f wiederum topologisch transitiv. Mit Erreichbarkeitseigenschaft und damit mit der Nicht-Integrabilität der Distribution $E^s \oplus E^u$ hängt auch die Ergodizität von f zusammen.

Angesichts der obigen Ausführungen im Zusammenhang mit meiner Arbeit taucht die Frage auf, ob sich der Begriff der partiellen Hyperbolizität auch für eine stetig differenzierbare Abbildung $S : E \to E$ auf endlichdimensionalen, vollständigen, stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in einem Banachraum E definieren läßt. Schwierigkeiten wird die Frage nach einem geeigneten, glatten, invarianten Maß machen. Denn ob ein solches Maß immer existiert, ist keineswegs klar. Während diese Arbeit von den partiellen Differentialgleichungen ausgegangen ist und gefragt hat, welche Voraussetzungen partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen, damit invariante Mannigfaltigkeiten und Blätterungen aus invarianten Mannigfaltigkeiten existieren, kommt die Frage nach der Definition von partieller Hyperbolizität in Banachräumen von der anderen Seite: Erst wird der Begriff definiert und theoretisch untersucht und dann untersucht, ob es partielle Differentialgleichungen gibt, auf die der Begriff angewendet werden kann.

A.3 Lyapunov-Perron-Gleichungen

Sei X der Banachraum aller bi-unendlichen Folgen $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, wobei jedes u_n Element eines Banachraumes X_n sei. Als *Lyapunov-Perron-Gleichungen* bezeichnet man die folgenden Gleichungssysteme in X

$$u_n = S_n(y) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{k,n}(u_k, y) \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{A.1}$$

wobei y ein Parameter in einem Banachraum Y sei. Die Abbildungen $S_n : Y \to X_n$ und $R_{k,n} : X_k \times Y \to X_n$ sind vorgegebene Abbildungen. Gesucht wird eine Lösung $u \in X$.
Unter bestimmten Voraussetzungen an die Abbildungen S_n und $R_{k,n}$ läßt sich die Existenz von Lösungen und deren stetige Abhängigkeit beweisen:
Für jedes $y \in Y$ sei durch $S(y) := \{S_n(y)\} : Y \to X$ eine Abbildung definiert. Für jedes Paar $(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei die Abbildung $R_{k,n} : X_k \times Y \to X_n$ eine gleichmäßig Lipschitz-stetige Abbildung in die X_k-Richtung. Weiter gelte

$$\mathrm{Lip}_X(R) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Lip}_{X_k}(R_{k,n}) < 1.$$

Es sei $R_{k,n}(0,y) = 0$ für alle $k,n \in Y$ und alle $y \in Y$. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich der folgende Existenzsatz beweisen:

Satz A.11. *[CHT97, S.290] Unter den obigen Voraussetzungen besitzt die Lyapunov-Perron-Gleichung* A.1 *genau eine eindeutige Lösung $F(y) := \{F_n(y)\} \in X$. Weiter gilt für alle $y \in Y$*

$$\|F(y)\|_X \leq \frac{1}{1 - \mathrm{Lip}_X(R)} \|S(y)\|_X .$$

Sei weiter für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $S_n : Y \to X_n$ stetig und die Abbildung $S : Y \to X$ lokal beschränkt. Ebenso sei die Abbildung $R_{k,n} : X_k \times X \to X_n$ für jedes (k,n) stetig. Dann ist auch die Lösungsabbildung $F_n : Y \to X_n$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ stetig.

Sei Z ein abgeschlossener Unterraum von Y. Unter der Voraussetzung, daß S sowie $R_{k,n}$ in Z-Richtung gleichmäßig Lipschitz-stetig sind, läßt sich auch die gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit von F in Z-Richtung zeigen (s. [CHT97, S.291]). Ebenso folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von S_n in Z-Richtung für jedes n und von $R_{k,n}$ in $X_k \times Z$-Richtung für jedes (k,n) die stetige Differenzierbarkeit von F_n in Z-Richtung für jedes n.

Eidesstattliche Erklärung:

Ich versichere an Eides Statt durch meine eigene Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe und alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen sind, als solche kenntlich gemacht und mich auch keiner anderen als der angegebenen Literatur bedient habe.

Hamburg, den 20.12.2007

Doris Bohnet

Literaturverzeichnis

[Alt06] Alt, H.: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, Berlin [u.a.], 5. Auflage, 2006.

[Bab06] Babin, A.: *Global Attractors in PDE.* In: Hasselblatt, B. und A. Katok (Herausgeber): *Handbook of Dynamical Systems*, Band 1B. Elsevier, Amsterdam, Boston, 2006.

[BL94] Bates, P. und K. Lu: *A Hartman-Grobman Theorem for the Cahn-Hilliard and Phase-Field Equations.* J. Differential Equations, 6:101–145, 1994.

[BLZ98] Bates, P., K. Lu und C. Zeng: *Existence and Persistence of Invariant Manifolds for Semiflows in Banach Space.* Memoirs Amer. Math. Soc., 135, 1998.

[BLZ00] Bates, P., K. Lu und C. Zeng: *Invariant Foliations Near Normally Hyperbolic Invariant Manifolds for Semiflows.* Trans. Amer. Math. Soc., 10:4641–4676, 2000.

[CC00] Candel, A. und L. Conlon: *Foliations I*, Band 23 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics.* AMS, Providence, R.I., 2000.

[CHT97] Chen, X., J. Hale und B. Tan: *Invariant Foliations for C1-Semigroups in Banach Spaces.* J. Differential Equations, 139:283–318, 1997.

[GGK03] Gohberg, I., S. Goldberg und M. Kaashoek: *Basic Classes of Linear Operators.* Birkhäuser, Basel [u.a.], 2003.

[Hen81] Henry, D.: *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Band 840 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, New York [u.a.], 1981.

[Heu92] Heuser, H.: *Funktionalanalysis - Theorie und Anwendung.* Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1992.

[HMO84] Hale, J., L. Magalhães und W. Oliva: *An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory.* Springer, New York [u.a.], 1984.

[HP] Hirsch, M. und C. Pugh: *Stable Manifolds and Hyperbolic Sets.* In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Band 14, Seiten 133–163.

[HP07] Hirayama, M. und Y. Pesin: *Non-absolutely Continuous Foliations.* Isreal J. Math., 160:173–187, 2007.

[MPS88] Mallet-Paret, J. und G. Sell: *Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations in Higher Space Dimensions.* J. Amer. Math. Soc., 1:805–865, 1988.

[MPSS93] Mallet-Paret, J., G. Sell und Z. Shao: *Obstructions to the Existence of Normally Hyperbolic Inertial Manifolds.* Indiana Univ. Math. J., 42(3):1027–1055, 1993.

[Pes04] Pesin, Y.: *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity.* European Mathematical Society, Zuerich, 2004.

[Rau02] Raugel, G.: *Global Attractors in PDEs.* In: Fiedler, B. (Herausgeber): *Handbook of Dynamical Systems*, Band 2. Elsevier, Amsterdam [u.a.], 2002.

[Tem88] Temam, R.: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Band 68 der Reihe *Applied Mathematical Sciences.* Springer, New York [u.a.], 1988.

[Wel76] Wells, J.: *Invariant Manifolds of Non-Linear Operators.* Pacific J. Math., 62:285–293, 1976.

[Yos80] Yosida, K.: *Functional Analysis.* Springer, New York [u.a.], 6. Auflage, 1980.