Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 1 W.S.2009/2010 - Ernst Bönecke

Aufgaben zur Aussagenlogik

1.) Seien A, B, C Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass folgende Aussagen stets wahr sind:

a) $A \wedge B \iff B \wedge A$

b) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

c) $\neg(A \implies B) \iff A \wedge \neg B$

d) $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \wedge (C \implies A) \iff$
$(A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (C \iff A))$

e) $(A \iff B) \wedge (B \iff C) \implies (A \iff C)$

f) $A \wedge (A \implies B) \implies B$

2.) Geben Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:

$$\begin{array}{rcl}
2 \cdot 3 = 6 & \vee & 3 \cdot 3 = 8 \\
2 \cdot 3 = 5 & \implies & 2 \cdot 3 = 6 \\
2 \cdot 3 = 5 & \iff & 2 \cdot 3 = 7 \\
2 \cdot 2 = 4 & \wedge & (-2) \cdot (-2) = 4 \\
\forall\, x \in \mathbb{Z} :\ (x = 0 & \implies & 3 \cdot x = 4 \cdot x\,)
\end{array}$$

3.) Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik und überprüfen Sie ihren Wahrheitswert:

a) 7 ist eine Quadratzahl und ungerade, oder 7 ist keine Quadratzahl und gerade.

b) Wenn 8 Teiler von 29 oder 5 Teiler von 35 ist, dann ist 8 Teiler von 32 und 35 kleiner als 5.

4.) Sind die folgenden Aussagen über ganze Zahlen gleichbedeutend, oder gilt nur „ $\implies$ "?

$$\begin{array}{rcl}
x & = & 25 \\
3 \cdot x & = & 75 \\
9 \cdot x^2 & = & 225 \\
6 \cdot x^2 & = & 150 \\
\forall\, b \in \mathbb{Z} :\ (6b\,x^2 & = & 150\,b) \\
0 & = & 0 \quad .
\end{array}$$

Bitte wenden !

Aufgaben zur Mengenlehre

5.) Sei

$$M_1 := \{2,3,5\} \quad , \quad M_2 := \{2,4,6,7\} \quad ,$$
$$M_3 := \{0,1,3,7,8\} \quad , \quad M_4 := \{4,5,9,10,11\} \quad .$$

Berechnen Sie $M := ((M_1 \cap M_3) \cup M_2) \setminus M_4$.

6.) Seien R, S, T Mengen. Zeigen Sie :

a) $R \cap (S \cup T) \quad = \quad (R \cap S) \cup (R \cap T)$

b) $R \cup (R \cap S) = R \ \wedge \ R \cap (R \cup S) = R$

c) $R \subset T \wedge S \subset T \implies \complement_T(R \cap S) = \complement_T R \cup \complement_T S$.

7.) Für jedes k aus einer nichtleeren Menge K sei eine Menge M_k gegeben. Dann setzt man

$$\bigcap_{k \in K} M_k \quad := \quad \{\, x \mid \text{für alle}\, k \in K \,\text{gilt}\, x \in M_k \,\} \quad \text{und}$$

$$\bigcup_{k \in K} M_k \quad := \quad \{\, x \mid \text{es gibt ein} \quad k \in K \quad \text{mit} \ x \in M_k \,\} \quad .$$

Sei $K = \mathbb{N}$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$M_k \quad := \quad \{-2k, -(2k-2), \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2k-2, 2k\} \quad ,$$

$$N_k \quad := \quad \left\{ \frac{2r}{k} \;\middle|\; r \in \mathbb{Z} \wedge -k \leq r \leq k \right\} \quad .$$

Berechnen Sie

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad , \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad , \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \quad , \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k \quad .$$

8.) Seien X und Y Mengen und

$$f : X \longrightarrow Y$$

eine Funktion. Seien $A \subset X$ und $C, D \subset Y$. Zeigen Sie:

a) $\overset{-1}{f}(C \cap D) = \overset{-1}{f}(C) \cap \overset{-1}{f}(B)$,

b) $\overset{-1}{f}(C \cup D) = \overset{-1}{f}(C) \cup \overset{-1}{f}(B)$,

c) $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$,

d) $f(\overset{-1}{f}(C)) \subset C$.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 28.9.09 besprochen.

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 3 W.S.2009/2010 - Ernst Bönecke

Logik und Quantoren

9.) Welche der folgenden Formeln sind formal korrekt? Dabei seien M , N Mengen und $A(x)$, $B(x)$, $C(x,y)$ Formeln, die Aussagen ergeben, wenn man Elemente x aus M und y aus N einsetzt:

a) $\forall x \in M : \; A(x) \;\wedge\; B(x)$

b) $\forall x \in M \,\forall y \in N : \; (A(x) \;\Longrightarrow\; C(x,y))$

c) $\forall x \in M \;\wedge\; N : \; (A(x) \;\wedge\; B(x))$

d) $x \in M \;\wedge\; \exists x \in M : \; C(x,y)$

10.) Sei M die Menge aller zur Zeit lebenden Menschen, dann definieren wir für $x, y \in M$:

$$\begin{array}{rcl} E(x) & :\Longleftrightarrow & x \text{ spricht Englisch} \\ N(x) & :\Longleftrightarrow & x \text{ spricht kein Englisch} \\ S(x,y) & :\Longleftrightarrow & x \text{ hat } y \text{ schon einmal gesehen.} \end{array}$$

Geben Sie damit Aussagen an, die beweisen, dass in den Formeln (4),(6) und (9) von (2.8) nicht " $\Longleftrightarrow$ " stehen darf. Ist die Aussage

$\forall x, y, z \in M : \; (S(x,y) \;\wedge\; S(y,z) \;\Longrightarrow\; S(x,z))$ richtig ?

11.) Sind die folgenden Aussagen wahr ? Geben Sie einen Beweis für Ihre Behauptung an:

a) $\forall x \in \mathbb{N} \,\exists y \in \mathbb{N} : \; y > x$,

b) $\exists x \in \mathbb{N} \,\forall y \in \mathbb{N} : \; x \leq y$,

c) $\exists x \in \mathbb{N} : \; (\exists y \in \mathbb{N} : \; x = y^2 \;\wedge\; \exists z \in \mathbb{N} : \; x = 4z + 3)$,

d) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : \; 7 + 10x \neq (y + 10z)^2$,

e) $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : \; (x > 1000 \;\wedge\; x^2 + y^2 = z^2)$.

12.) Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren in möglichst einfacher Form, verneinen Sie die Aussagen und übersetzen Sie sie wieder in deutsche Sätze:

a) Jede Hütte enthält Räume mit Betten.

b) Jede Hütte enthält einen Raum ohne Betten.

c) Es gibt Hütten, die mindestens zwei Räume mit Betten haben.

d) Es gibt Hütten mit WC, aber ohne Dusche.

e) Jede Hütte mit Betten hat auch ein WC.

Bitte wenden!

Gleichungen und Ungleichungen

13.) Finden Sie die reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

a) $$|x-4| = \frac{1}{2}x + 3 \quad ,$$

b) $$\frac{15x+488}{6x+232} = \frac{2x+1}{x-1} \quad ,$$

c) $$\sqrt{1+x} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x} \quad .$$

14.) Finden Sie die reellen Lösungen x von $f(x) = 0$ für

a) $f(x) := x^2 + x - 6$,
b) $f(x) := 4x^2 - 20x + 25$,
c) $f(x) := x^2 + 9$,
d) $f(x) := x^3 - 6x^2 + 25$,

und zeichnen Sie die Mengen $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y = f(x) \}$.
Bei d) muss man eine Lösung erraten (was mit etwas Vorüberlegung leicht ist) und braucht dann "Polynomdivision".

15.) Haben die folgenden Ungleichungssysteme eine Lösung ? Zeichnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge:

a) $y \geq |2x-3| \quad \wedge \quad y \leq -|2x-3| + 3$,
b) $y \geq |2x-3| \quad \wedge \quad y < -|2x-3|$,
c) $x \geq y^2 - 4 \quad \wedge \quad x \leq 4 - y^2$.

16.) Für die reellen Zahlen gelten die in (4.12) angegebenen Anordnungsaxiome (A1) bis (A3). Folgern Sie daraus durch Widerspruch: Es gibt keine Zahl i in $\mathbb{R}$ mit

$$i^2 = -1 \quad .$$

Die Aufgaben werden in den Übungen am 30.9.09 besprochen.

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 5 a — W.S.2009/2010 - Ernst Bönecke

Geraden und Ebenen

17.) Im $\mathbb{R}^2$ seien die Geraden

$$G_1 \quad := \quad \{\, (1,-2) + \lambda\,(3,4) \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R}\,\} \qquad \text{und}$$

$$G_2 \quad := \quad \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; < (-2,3), x >= 1 \,\right\}$$

gegeben. Schreiben Sie eine Gleichungsdarstellung von G_1, eine Parameterdarstellung von G_2 auf und berechnen Sie den Schnittpunkt von G_1 und G_2, falls er existiert.

18.) Im $\mathbb{R}^2$ sei

$$G \quad := \quad \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; < (1,2), x >= -3 \,\right\}$$

und $p := (2,-3)$. Geben Sie die zu G senkrechte Gerade durch p in Gleichungsdarstellung an.

19.) Im $\mathbb{R}^3$ sei E die Ebene

$$E \quad := \quad \{\, p + \lambda a + \mu b \;\mid\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,\} \qquad \text{mit}$$

$$p := (1,-1,2)\,,\ a := (2,0,1)\,,\ b := (3,1,0) \quad .$$

Geben Sie eine Gleichung $< c, x >= \alpha$ mit $c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so dass

$$E \quad = \quad \left\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < c, x >= \alpha \,\right\}$$

ist. Tipp: Suchen Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $c \perp a$ und $c \perp b$.

20.) Im $\mathbb{R}^3$ sei G die Gerade

$$G \quad = \quad \{\, (1,-1,0) + \lambda\,(2,1,3) \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R}\,\}$$

und $p := (2,-1,3)$. Geben Sie die Ebene E mit $p \in E$ und $G \subset E$ an, in Gleichungs- und in Parameterdarstellung.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 5.10.09 besprochen.

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 6 W.S.2009/2010 - Ernst Bönecke

Matrizenrechnung

21.) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

22.) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times m, \mathbb{R})$. Dann definiert man die $k-$te Potenz A^k von A rekursiv durch

$$A^0 := E_m \quad , \quad A^{k+1} := A^k \cdot A \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Berechnen Sie A^k für $k \in \mathbb{N}_0$ und $A :=$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen, wenn nötig, durch Induktion.

23.) Seien $s, m, n, r \in \mathbb{N}$, $C \in \mathcal{M}\mathrm{at}(s \times m, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times r, \mathbb{R})$. Beweisen Sie die Rechenregel (6.7) b) ("Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation"):

$$C \cdot (A \cdot B) \quad = \quad (C \cdot A) \cdot B$$

Hinweis: $A \cdot B$ ist die Matrix (d_{kl}) mit

$$d_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \quad \text{für} \quad k \in \{1, \ldots, m\}, \, l \in \{1, \ldots, r\} \quad ,$$

es kommt auf einen geschickten Umgang mit dem Summenzeichen an.

24.) In $\mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$ setzt man

$$0_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Zeigen Sie : $\forall A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \; 0_2 \cdot A = A \cdot 0_2 = 0_2 \quad .$

b) Gilt die Aussage :

$\forall A, B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \; (A \neq 0_2 \wedge B \neq 0_2 \implies A \cdot B \neq 0_2)$?

Bitte wenden !

Lineare Gleichungssysteme

25.) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Ebenen

$$H_{c,\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < c, x > = \alpha \right\} \quad \text{und} \quad H_{d,\beta}$$

gegeben, mit

$$c := (1,1,2)\,,\; d := (3,-1,1)\,,\; \alpha := 1\,,\; \beta := 2 \quad .$$

Zeigen Sie, dass (c,d) linear unabhängig ist und $H_{c,\alpha} \cap H_{d,\beta}$ eine Gerade G. Geben Sie die Parameterdarstellung von G an. Wie sieht $H_{c,\alpha} \cap H_{d,\beta}$ aus, wenn (c,d) linear abhängig ist ?

26.) Geben Sie eine auf der Ebene $E := E_{(1,0,1),(0,1,-2),(2,1,-1)}$ senkrechte Gerade G durch $(2,0,2)$ in Parameterdarstellung an, bestimmen Sie den Schnittpunkt s von G und E und den Abstand $\|s-(2,0,2)\|$.

27.) Bestimmen Sie, abhängig von $\beta \in \mathbb{R}$, alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ von

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
2x_1 & - & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\
 & & \beta\, x_2 & + & (\beta-1)x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & & & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0
\end{array} \quad ,$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 2\,\beta \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3\,\beta \\
3x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\
 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0
\end{array} \quad .$$

28.) Prüfen Sie, ob (a,b,c) linear unabhängig ist, für folgende Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^4$:

a) $a := (1,2,-2,3)\,,\; b := (3,-5,1,3)\,,\; c := (1,-9,5,-3)$,

b) $a := (1,2,2,-1)\,,\; b := (2,1,1,2)\,,\; c := (3,3,-5,1)$,

c) $a := (1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3)\,,\; b := (1,\beta,\beta^2,\beta^3)\,,\; c := (1,\gamma,\gamma^2,\gamma^3)$
für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 5.10.09 besprochen.

Aufgaben, die nicht mehr besprochen werden
(und über die Sie bis zum Beginn der Vorlesungen nachdenken können):

29.) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\text{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Unter welcher Voraussetzung existiert ein $B \in \mathcal{M}\text{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit

$$A \cdot B = B \cdot A = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

a) Zeigen Sie mit Rechenregel (6.7) b) : Wenn so ein B existiert, ist es eindeutig bestimmt. Man schreibt daher

$$A^{-1} \quad := \quad B \quad .$$

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von A^{-1} an, falls es existiert.

30.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\text{at}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Berechnen Sie $B := A^{-1}$ mit dem Gauß-Algorithmus. Fassen Sie dazu die Spalten b^j der Matrix B als unbekannten Vektor im Gleichungssystem $A \cdot b^j = e^j$ auf, wobei e^j der $j-$te Spaltenvektor von E_3 ist, für $j \in \{1, 2, 3\}$. Das sind drei Gleichungssysteme mit je 3 Unbekannten und der gleichen einfachen Koeffizientenmatrix, die Sie (am besten gleichzeitig) lösen können, indem Sie die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen nicht nur auf Zeilenstufenform, sondern sogar auf die Form E_3 bringen, und natürlich die gleichen Umformungen an den "rechten Seiten" e^j vornehmen.

31.) Sei $n \in \mathbb{N}$, $A, C \in \mathcal{M}\text{at}(n \times n, \mathbb{R})$, und wir setzen voraus, dass A^{-1}, C^{-1} existieren mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \quad , \quad C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E_n \quad .$$

a) Zeigen Sie , dass auch $(A \cdot C)^{-1}$, $(C \cdot A)^{-1}$ und $(A^{-1})^{-1}$ existieren.
b) Existiert auch $(A + C)^{-1}$?

32.) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert zur Matrix

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathcal{M}\text{at}(4 \times 4, \mathbb{R})$$

die Matrix A^{-1} ? Berechnen Sie A^{-1} für diese λ. Tipp: Verwenden Sie die Methode aus Aufgabe 30.