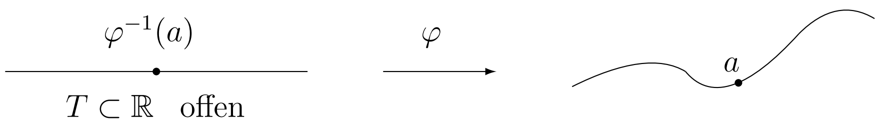
HÖHERE ANALYSIS

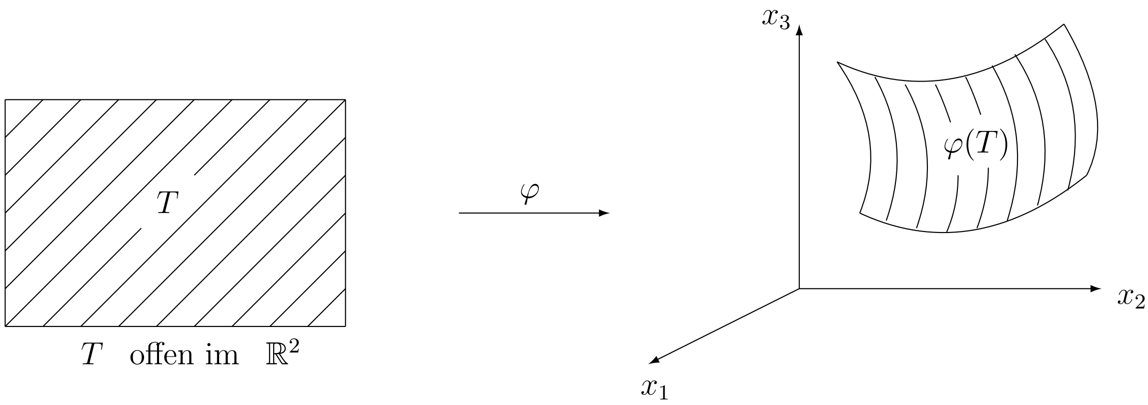
§51 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

51.1 Die verschiedenen Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten

(51.1.13) Karten: Spezialfälle : Der Anschauung wegen sollte man stets die Spezialfälle für $n = 2$ und $n = 3$ im Auge haben:
a) Ist $k = 1$ und T ein Intervall, so ist eine Karte $\varphi : \ T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset M$ ein doppelpunktfreier, $\alpha-$mal stetig differenzierbarer parametrisierter Weg im $\mathbb{R}^n$, bei dem auch noch $\forall\, t \in T : \varphi'(t) \neq 0$ ist.

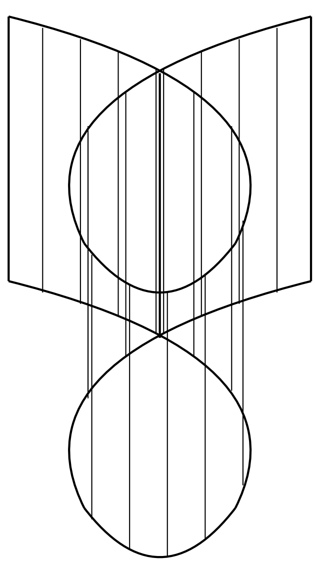


Wir kennen das aus §24 im letzten Semester.
b) Ist $k = 2$ und $n \geq 3$, so heißt eine Karte von M **parametrisierte Fläche** (ohne Selbstschnitt) .



So etwas

ist dabei nicht zugelassen !



Beachten Sie dabei, dass eine $k-$dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ i.A. nicht aus nur **einer** Karte besteht. Ein Beispiel dafür ist die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, also die $2-$Sphäre im $\mathbb{R}^3$: Dass es zu **einer** Landkarte keine bijektive Abbildung φ auf die Erdoberfläche gibt, bei der φ und φ^{-1} stetig sind, wissen Sie aus dem Geographie-Unterricht.

51.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

(51.2.3) Gramsche Determinante: Spezialfälle:

a) Ist $k = 1$, $T \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und
$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter, stetig differenzierbarer Weg, so hat man nur

$$g_{11}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t} \right)^2 = ||\varphi'(t)||^2 \quad ,$$

und das ist auch die Gramsche Determinante:

$$g(t) = ||\varphi'(t)||^2 \quad .$$

b) Ist $k = 2$ und $n = 3$, $T \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, so hat man die Gramsche Determinante

$$g(t) = \det \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{3} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \right)^2 & \sum\limits_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \\ \sum\limits_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} & \sum\limits_{\nu=1}^{3} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} || \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} ||^2 & \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} \right\rangle & || \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} ||^2 \end{pmatrix}$$

Man kann das noch übersichtlicher schreiben: Es ist

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_2} \end{pmatrix} \quad ,$$

also $\varphi'(t)$ eine $3 \times 2-$Matrix. Für die erste Spalte dieser Matrix schreiben wir im Folgenden $\underline{\varphi_{\bullet 1}(t)}$, analog: $\underline{\varphi_{\bullet 2}(t)}$, also

$$\varphi_{\bullet 1}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_1} \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_{\bullet 2}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_2} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann wird

$$g(t) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} ||\varphi_{\bullet 1}(t)||^2 & <\varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t)> \\ <\varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t)> & ||\varphi_{\bullet 2}(t)||^2 \end{pmatrix}$$

$$= \quad ||\varphi_{\bullet 1}(t)||^2 ||\varphi_{\bullet 2}(t)||^2 - <\varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t)>^2$$
$$= \quad ||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||^2 \qquad .$$

$g(t)$ ist also das Quadrat der Fläche, die von den Vektoren $\varphi_{\bullet 1}(t)$ und $\varphi_{\bullet 2}(t)$ aufgespannt wird.
c) Ist $k = n$ und $T \subset \mathbb{R}^n$ offen, so kann man

$$\varphi : \ T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \quad , \quad \varphi(t) \quad := \quad t$$

als Karte nehmen. Dann ist

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j} = e^j \quad , \quad g_{jl}(t) = \delta_{jl} \quad \text{für} \quad j, l \in \underline{n} \quad \text{und} \quad g(t) = \det E_n = 1 \quad .$$

<u>**(51.2.4) Beispiel :**</u> Wir nehmen eine Kugel mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ und von ihrer Oberfläche eine Karte, die nur einen "Meridian" auslässt:

$$\Phi : \ (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$\Phi(\varphi, \vartheta) := (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\vartheta) \, .$$

In diesem Fall erhält man

$$\Phi_{\bullet 1}(\varphi, \vartheta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} , \ \Phi_{\bullet 2}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und damit

$$g(\varphi, \vartheta) \quad = \quad R^4 \cos^2\vartheta \ > \ 0 \quad .$$

<u>**(51.2.9) Flächenelement: Spezialfälle:**</u>
Wir hatten in (51.2.3) schon die Gramsche Determinante in Spezialfällen ausgerechnet. Damit erhalten wir
a) für $k = 1$, also für einen parametrisierten, stetig differenzierbaren Weg

$$\varphi : \ T \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad T \quad \text{ein offenes Intervall:}$$

$$\mathrm{d}s(x) \quad = \quad ||\varphi'(t)||\mathrm{d}^1 t \quad \text{für} \quad x = \varphi(t)$$

und sprechen in diesem Fall vom <u>**Linienelement**</u>. Wir schreiben hier $\mathrm{d}s(x)$ statt $\mathrm{d}S(x)$.
b) Ist $k = 2$ und $n = 3$, also T offen im $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi : \ T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$$

eine parametrisierte Fläche, φ stetig differenzierbar, so ist

$$\mathrm{d}S(x) \quad = \quad ||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

das Flächenelement, und schließlich ist
c) für $k = n$ einfach

$$\mathrm{d}V \quad := \quad \mathrm{d}^n t$$

das Flächenelement, das man insbesondere für $n = 3$ das **Volumenelement** nennt. □

Satz 51.2.12 : (G 144) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $n \geq 2$. Dann ist für fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ die Funktion f über die Sphäre

$$K_r := \{ \ x \in \mathbb{R}^n \ | \ \|x\| = r \ \} \quad \text{integrierbar, und es gilt}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}r = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S^{n-1}} f(r\xi)\mathrm{d}S(\xi) \right) \cdot r^{n-1}\mathrm{d}r \quad .$$

Beweis mit der Transformationsformel für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$:
In (49.3.6) hatten wir die Formel (2^n) :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r,\varphi)) \cdot C_n(\varphi) \cdot r^{n-1}\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \quad ,$$

wobei das Integral in der Klammer nach dem Satz von Fubini für fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ existiert. Dabei war

$$\Pi^{n-1} := (-\pi;\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} \right)^{n-2} \quad , \quad \varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \quad \text{und}$$

(1) $$C_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos^0 \varphi_1 \cdot \cos^1 \varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \quad .$$

Berechnen wir andererseits

$$\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad \text{für festes} \quad r > 0 \quad , \quad \text{so können wir}$$

$$\Phi_n : \Pi^{n-1} \longrightarrow K_r \quad , \quad (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \longmapsto P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

als Parametrisierung nehmen ($K_r \setminus \Phi_n(\Pi^{n-1})$ ist eine $(n-1)-$dimensionale Nullmenge) und erhalten

$$\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad = \quad \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}))\sqrt{g^{(n)}(\varphi)}\,\mathrm{d}^{n-1}\varphi \quad ,$$

wobei das (n) andeuten soll, dass wir die Gramsche Determinante

$$g^{(n)}(\varphi) := \det(g_{jl}^{(n)}(\varphi))_{(j,l)\in \underline{n-1}\times\underline{n-1}} \quad \text{bilden, wobei}$$

$$g_{jl}^{(n)}(\varphi) := \left\langle \frac{\partial\Phi_n(\varphi)}{\partial\varphi_j}, \frac{\partial\Phi_n(\varphi)}{\partial\varphi_l} \right\rangle$$

ist. Wir zeigen mit Induktion, dass für $n \geq 2$ gilt

$$(*) \qquad \sqrt{g^{(n)}(\varphi)} = C_n(\varphi)\cdot r^{n-1} \quad .$$

Induktionsanfang : Für $n = 2$ haben wir

$$\Phi_2 : (-\pi;\pi) \longrightarrow K_r \quad , \quad \varphi_1 \longmapsto P_2(r,\varphi_1) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$g^{(2)}(\varphi_1) \overset{(51.2.3)\text{ a)}}{=} \left\| \frac{\mathrm{d}\Phi_2(\varphi_1)}{\mathrm{d}\varphi_1} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -r\sin\varphi_1 \\ r\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2 \quad ,$$

$$\sqrt{g^{(2)}(\varphi_1)} = r = C_2(\varphi_1)\cdot r^1 \quad .$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, sei $(*)$ richtig. Dann haben wir für $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$:

$$\Phi'_{n+1}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc} \Phi'_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\cos\varphi_n & | & -\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\sin\varphi_n \\ ----------- & + & ------------ \\ 0 & | & r\cdot\cos\varphi_n \end{array} \right)$$

$\in M((n+1)\times n,\mathbb{R})$, das ist einfach die Matrix von $P'_{n+1}(r,\varphi)$ aus Formel $(6')$ in (49.3.6) , in der man die 1.Spalte (also die Ableitung nach r) weggelassen hat. Wir bilden nun das Skalarprodukt der n Spalten miteinander: Die Spalten mit Index $j < n$ sind die Spalten von $\Phi'_n(\varphi)$, multipliziert mit $\cos\varphi_n$, und um die 0 unten ergänzt, also ist

$$g_{jl}^{(n+1)}(\varphi) = g_{jl}^{(n)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cos^2\varphi_n \quad \text{für} \quad j,l < n \quad .$$

Es ist wegen $\|P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\| = r$:

$$g_{nn}^{(n+1)}(\varphi) = \|\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\|^2\cdot\sin^2\varphi_n + r^2\cos^2\varphi_n = r^2 \quad ,$$

und für $j < n$:

$$g_{jn}^{(n+1)}(\varphi) = -\left\langle \frac{\partial\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{\partial\varphi_j}, \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \right\rangle \cos\varphi_n\sin\varphi_n \quad .$$

Wendet man auf die einzelnen Summanden des Skalarprodukts die Produktregel (im $\mathbb{R}^1$) an, so erhält man

$$g_{jn}^{(n+1)}(\varphi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi_j} < \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}), \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) > \cos\varphi_n\sin\varphi_n$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi_j}(r^2)\cdot\cos\varphi_n\sin\varphi_n = 0 \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(\varphi) &= \det \begin{pmatrix} g_{jl}^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cos^2 \varphi_n & | & 0 \\ ------------ & + & --- \\ 0 & | & r^2 \end{pmatrix} \\
&= g^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cos^{2(n-1)} \varphi_n \cdot r^2 \quad , \\
\sqrt{g^{(n+1)}(\varphi)} &= \sqrt{g^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} \cdot \cos^{n-1} \varphi_n \cdot r \\
&= C_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cdot r^{n-1} \cos^{n-1} \varphi_n \cdot r \quad ,
\end{aligned}
$$

und nach (1) ist das gleich $C_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cdot r^n$.
Damit ist $(*)$ bewiesen, und mit $(*)$ erhalten wir

$$
\int\limits_{K_r} f(x) \mathrm{d}S(x) = \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi))\, C_n(\varphi) \cdot r^{n-1} \mathrm{d}^{n-1}\varphi \quad ,
$$

und das linke Integral existiert, wenn das rechte existiert. Oben eingesetzt ergibt das

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}^n x = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{K_r} f(x) \mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}r \quad .
$$

Die zweite Gleichung der Behauptung erhält man aus

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{S^{n-1}} f(r\xi) \mathrm{d}S(\xi) \cdot r^{n-1} &= \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(r \cdot P_n(1, \varphi)) \cdot C_n(\varphi) \mathrm{d}\varphi \cdot r^{n-1} \\
&= \int\limits_{K_r} f(x) \mathrm{d}S(x) \quad . \qquad \square
\end{aligned}
$$

§52 Die klassischen Integralsätze

52.3 Der Satz von Gauß im $\mathbb{R}^n$

Spezialfall 52.3.3 : Sei $\mathbf{n = 3}$ und $\mathrm{Rd}\, A$ eine parametrisierte Fläche

$$
\varphi : \ T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) = \mathrm{Rd}\, A \quad ,
$$

T offen im $\mathbb{R}^2$ und φ differenzierbar, dann ist nach Satz 52.1.2

$$
(\varphi_{\bullet 1}(t)\, ,\, \varphi_{\bullet 2}(t)) \quad \text{mit} \quad \varphi_{\bullet j}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t)\, ,\, j \in \underline{2} \quad ,
$$

eine Basis des Tangentialraums und damit

$$
\frac{\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)}{\|\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)\|}
$$

ein Normalen-Einheitsvektor auf $\mathrm{Rd}\, A$. Anschaulich stellt man fest, ob er nach außen gerichtet ist, dann ist er gleich $\nu(\varphi(t))$, sonst gleich $-\nu(\varphi(t))$. Im ersten Fall wird wegen der Formel

$$\mathrm{d}S(x) = \|\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)\| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad \text{für} \quad x = \varphi(t) \quad \text{aus (51.2.9)} \quad :$$

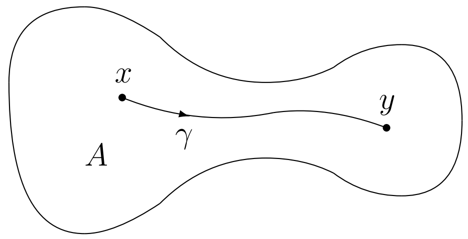
$$\int_{\mathrm{Rd}A} < F(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) = \int_T < F(\varphi(t)), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad ,$$

man muss also nicht $\|\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)\|$ ausrechnen. Der Ausdruck

$$\nu(x)\mathrm{d}S(x) \quad = \quad \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad \text{für} \quad x = \varphi(t)$$

heißt auch **vektorielles Flächenelement** der Fläche $\mathrm{Rd}\, A$.

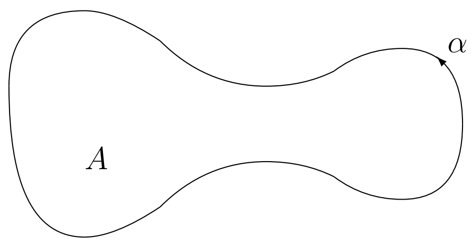
Bemerkung 52.3.7 : Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, mit glattem Rand, und wegezusammenhängend.



Dann kann man (was anschaulich klar ist) $\mathrm{Rd}\ A$ parametrisieren durch **einen** stetig differenzierbaren Weg

$$\alpha : \ [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \alpha'(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [a;b] \quad ,$$

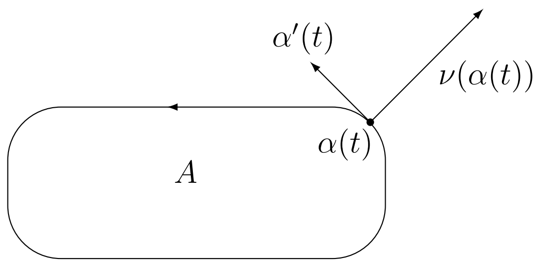
und zwar so, dass α um die Punkte aus A einmal im mathematisch positiven Sinn herumläuft.



Für $t \in [a;b]$ ist $\alpha'(t)$ nach Satz 52.1.2 b) ein Tangentialvektor an α im Punkt $\alpha(t)$ (sogar eine Basis des Tangentialraums), also an $\mathrm{Rd}\ A$, und anschaulich sieht man, dass

$$\nu(\alpha(t)) \quad := \quad + \frac{(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))}{||\alpha'(t)||}$$

der **äußere** Einheits-Normalenvektor an $\mathrm{Rd}\ A$ ist:



Sei nun $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein auf einer offenen Menge U mit $A \subset U$ stetig differenzierbares Vektorfeld, dann setzen wir

$$(*) \qquad K : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad K(x) \quad := \quad (F_2(x), -F_1(x))$$

und wenden darauf den Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ an :

$$\int_A \operatorname{div} K(x)\, \mathrm{d}^2x \quad = \quad \int_{\operatorname{Rd} A} < K(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad .$$

Das "Flächenelement" $\mathrm{d}S(x)$ ist hier nach Spezialfall (51.2.9)a) ($k = 1$) das Linienelement

$$\mathrm{d}s(x) = \| \alpha'(t) \| \, \mathrm{d}t \quad ,$$

und nach Def. 51.2.7 wird

$$\int_A \operatorname{div} K(x) \mathrm{d}^2x = \int_{[a;b]} < K(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)) > \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t \, ,$$

und nach (∗) :

$$\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{[a;b]} < K(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)) > ||\alpha'(t)|| \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b (F_2(\alpha(t)) \cdot \alpha_2'(t) + F_1(\alpha(t)) \cdot \alpha_1'(t)) \mathrm{d}t = \int_a^b < F(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad .$$

Bewiesen haben wir damit den

(52.3.8) Satz von Green: Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, glatt berandet und konvex. Sei $\alpha : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein parametrisierter Weg, der einmal positiv um die Punkte aus $\overset{\circ}{A}$ herumläuft,

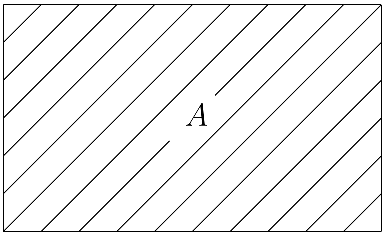
$$\operatorname{Rd} A \quad = \quad \{ \; \alpha(t) \; | \; t \in [a;b] \; \} \quad .$$

Sei U offen mit $A \subset U$ und

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{stetig differenzierbar. Dann gilt}$$

$$\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad = \quad \int_a^b < F(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad .$$

Bemerkung 52.3.9 : Im Satz von Gauß hatten wir vorausgesetzt, dass A ein "Kompaktum mit glattem Rand" ist. Man kann (und muss) diese Voraussetzung etwas abschwächen, denn sonst wären für A schon Rechtecke im $\mathbb{R}^2$



ausgeschlossen. Rd A darf "Singularitäten" enthalten, d.h. Punkte, in denen der Rand "nicht glatt" ist, aber man muss festlegen, was für Punkte dabei noch zugelassen sind. Für $n = 2$ wollen wir das präzisieren:

Definition 52.3.10 : Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und wegezusammenhängend. Es gebe einen stückweise stetig differenzierbaren Weg

$$\alpha : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \text{Rd} \ A = \{ \alpha(t) \mid t \in [a;b] \} ,$$

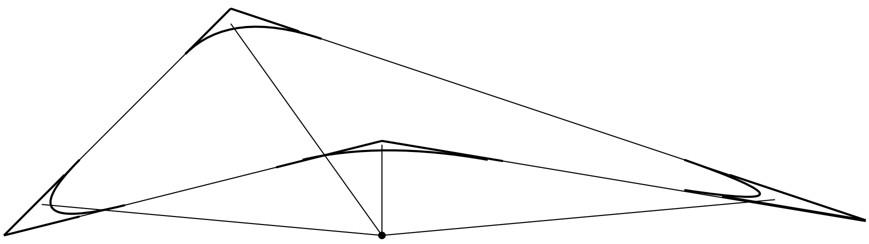
also eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b \quad ,$$

so dass die Wege $\alpha|_{[t_{j-1};t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ für $j \in \underline{r}$ stetig differenzierbar sind, und so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt : Es gibt ein Kompaktum $A^{(\varepsilon)}$ mit glattem Rand und stetig differenzierbarem Randweg

$$\alpha^{(\varepsilon)} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \text{also} \quad \text{Rd}\, A^{(\varepsilon)} = \{ \alpha^{(\varepsilon)}(t) \mid t \in [a,b] \} \quad ,$$

so dass gilt



$A \, \Delta \, A^{(\varepsilon)}$

a) $v_2(A\Delta\, A^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$, wobei wir für $B, C \subset \mathbb{R}^2$ definieren:
$$B\Delta C \quad := \quad (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \quad .$$
b) Die Gesamtlänge der in Rd $A\Delta$ Rd $A^{(\varepsilon)}$ auftretenden Kurven ist kleiner als ε.

Dann heißt A eine **zulässige kompakte Menge** im $\mathbb{R}^2$, und wir notieren:

Satz 52.3.11 : Der Satz von Green gilt auch für zulässige kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. $\square$

52.4 Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Hat man eine parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$, also eine Abbildung

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \quad , \quad T \quad \text{offen im} \quad \mathbb{R}^2 \quad , \quad \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3 \quad ,$$

so kann man den Satz von Green für eine zulässige kompakte Menge $A \subset T$ mit Hilfe von φ übertragen auf die Menge $\varphi(A) \subset \varphi(T)$. Das ist dann der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ .Wir werden ihn später mit Differentialformen, und hier auch direkt, beweisen, aber erst mal aufschreiben und Beispiele angeben.

Definition 52.4.1 : Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen und $A \subset T$ eine zulässige kompakte Menge im $\mathbb{R}^2$. Sei
$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ **zweimal** stetig differenzierbar, bijektiv, und φ^{-1} stetig, dann nennen wir die kompakte Menge

$$B \quad := \quad \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$$

mit dem durch

$$\nu(\varphi(t)) \quad := \quad \frac{\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)}{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||} \quad \text{für} \quad t \in A$$

definierten Einheits-Normalen-Vektorfeld eine **zulässige kompakte und durch ν orientierte Fläche** im $\mathbb{R}^3$. Ist

$$\alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \text{Rd} \quad A = \{ \ \alpha(t) \ | \ t \in [a;b] \ \}$$

ein um die Punkte von A positiv herumlaufender Weg, so nennen wir

$$\partial B \quad := \quad \varphi \circ \alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

den **orientierten Rand** von B .

(52.4.2) Beispiel : Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen, $A \subset T$ eine zulässige kompakte Menge und

$$\varphi : T \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(t_1, t_2) \quad := \quad (t_1, t_2, 0) \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$\varphi_{\bullet 1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^1 \quad , \quad \varphi_{\bullet 2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^2 \quad ,$$

also $\nu(\varphi(t)) = e^3$ für alle $t \in A$ und

$$\partial(\varphi(A)) : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$t \longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0) \quad , \quad \text{wenn}$$

$$\partial A = \alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{ist} \ .$$

(52.4.3) Beispiel : Wir nehmen eine Kugel mit Radius R, wie in Beispiel (51.2.4) , und

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$\Phi(\varphi, \vartheta) \quad := \quad (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\vartheta) \quad .$$

Φ ist auf $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar. $\Phi_{\bullet 1}$ und $\Phi_{\bullet 2}$ hatten wir in 51.2.4 ausgerechnet und erhalten damit

$$\nu(\Phi(\varphi, \vartheta)) \quad = \quad (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad = \quad \frac{1}{R}\Phi(\varphi, \vartheta) \quad .$$

Sei $A \; := \; [-\pi; \pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, so ist die Restriktion von Φ auf A injektiv, und

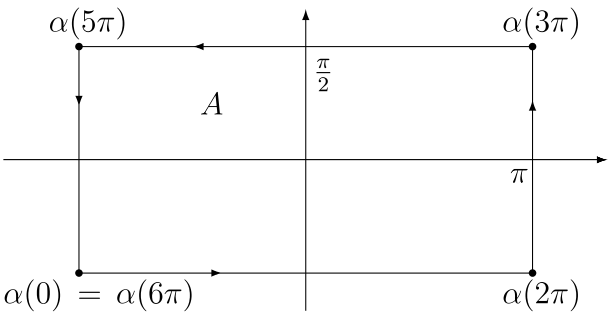
$$\Phi|_A \;:\; A \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ist eine Karte der Kugeloberfläche, die einen "Meridian" , und zwar die Menge

$$\{\; (-R\cos\vartheta, 0, R\sin\vartheta) \;|\; \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \;\}$$

auslässt. Der positiv durchlaufene
Rand von A ist die Kurve

$\alpha \;:\; [0; 6\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ,$

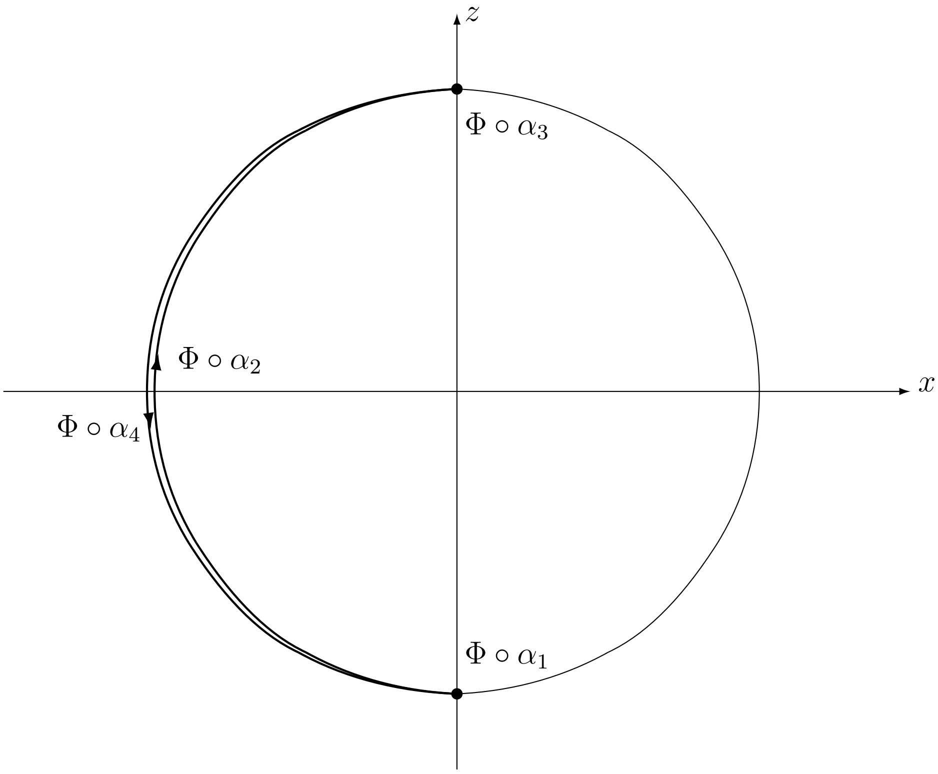


$$\alpha(t) \quad := \quad \begin{cases} \alpha_1(t) & := \quad (t-\pi, -\frac{\pi}{2}) & \text{für} \quad t \in [0; 2\pi] \\ \alpha_2(t) & := \quad (\pi, t-\frac{5}{2}\pi) & \text{für} \quad t \in [2\pi; 3\pi] \\ \alpha_3(t) & := \quad (-t+4\pi, \frac{\pi}{2}) & \text{für} \quad t \in [3\pi; 5\pi] \\ \alpha_4(t) & := \quad (-\pi, -t+\frac{11}{2}\pi) & \text{für} \quad t \in [5\pi; 6\pi] \end{cases}$$

Das ergibt

$$(\Phi \circ \alpha_1)(t) = (0, 0, -R) \quad \text{für} \quad t \in [0; 2\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_3)(t) = (0, 0, R) \quad \text{für} \quad t \in [3\pi; 5\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_2)(t) = (-R\sin t, 0, -R\cos t) \quad \text{für} \quad t \in [2\pi; 3\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_4)(t) = (R\sin t, 0, -R\cos t) \quad \text{für} \quad t \in [5\pi; 6\pi] \quad .$$

$\Phi \circ \alpha_1$ und $\Phi \circ \alpha_3$ sind also Wege, die nur aus einem Punkt bestehen (dem Südpol S und dem Nordpol N der Kugel) , $\Phi \circ \alpha_2$ und $\Phi \circ \alpha_4$ durchlaufen dieselben Punkte, in entgegengesetzter Richtung (von S nach N bzw. N nach S). Integrale über $\partial(\Phi(A))$ ergeben also 0 :



(52.4.4) Zur Wiederholung : Für ein Vektorfeld
$K : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^3$ offen, K stetig differenzierbar,
hatten wir in (25.15) die Rotation definiert als

$$(\operatorname{rot} K)(x) := \left(\frac{\partial K_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2(x)}{\partial x_3}, \frac{\partial K_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial K_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1(x)}{\partial x_2} \right)$$

$$\text{für} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in U \quad .$$

(52.4.5) Satz von Stokes für zulässige kompakte Flächen im $\mathbb{R}^3$:
Sei B eine zulässige kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit orientiertem Rand $\beta = \partial B : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $B \subset U$ und

$$K : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_B < (\operatorname{rot} K)(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad = \quad \int_a^b < K(\beta(t)), \beta'(t) > \mathrm{d}t \quad .$$

Dabei ist ν das in 52.4.1 definierte Einheits-Normalen-Vektorfeld.
(52.4.6) Bemerkung : Richtig verstanden hat man den Satz erst, wenn man damit rechnen kann. Dazu muss man sich an die Def. 51.2.7 des Integrals über die Fläche $B \subset \mathbb{R}^3$ erinnern, und den Spezialfall 51.2.9 für das

Flächenelement $\mathrm{d}\,S(x)$: Zu B hat man eine zulässige kompakte Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$ mit einem Randweg $\alpha : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, der A positiv umläuft, und die zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : T \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{für eine offene Teilmenge} \quad T \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad A \subset T \quad ,$$

$$\text{und} \quad B = \varphi(A) \quad , \quad \partial B = \varphi \circ \alpha : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad .$$

Damit wird nach Definition 51.2.7 :

$$\int\limits_B < \operatorname{rot} K(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) = \int\limits_A < \operatorname{rot} K(\varphi(t)), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$$

$$= \int\limits_A \det(\operatorname{rot} K(\varphi(t)), \varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet_2}(t)) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad .$$

Wir benutzen diese Bezeichnungen auch gleich beim Beweis des Satzes von Stokes, um ihn auf den Satz von Green zurückzuführen:

<u>Beweis von Satz 52.4.5 :</u> 1) Sei also $B = \varphi(A)$ mit einer zulässigen kompakten Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben wir Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ als Spalten, so setzen wir

$$(1) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transposition}}}{{}^t\tilde{K}(x)} \quad := \quad {}^tK(\varphi(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrizenprodukt,}}}{\cdot} (D\varphi)(x) \quad ,$$

dadurch ist ein Vektorfeld

$$\tilde{K} : \varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{definiert, denn}$$

$${}^tK(\varphi(x)) \in M(1 \times 3, \mathbb{R}) \quad , \quad (D\varphi)(x) \in M(3 \times 2, \mathbb{R}) \quad ,$$

also ${}^t\tilde{K}(x) \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$. $\varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) = \varphi^{-1}(U) \cap T$ ist offen, da U und T offen sind und φ stetig ist ist, und

$$A \subset \varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) \quad \text{wegen} \quad \varphi(A) \subset \varphi(T) \quad \text{und} \quad \varphi(A) \subset U \quad .$$

$\tilde{K}$ ist also definiert auf einer offenen Menge im $\mathbb{R}^2$, die A enthält, und $\tilde{K}$ ist stetig differenzierbar nach der Ketten- und Produktregel, da K, φ und $D\varphi$ (!) stetig differenzierbar sind. Auf das Vektorfeld $\tilde{K}$ und die zulässige kompakte Menge A können wir den Satz 52.3.8 bzw. 52.3.11, also den Satz von Green im $\mathbb{R}^2$, anwenden: Es gilt

$$(2) \qquad \int\limits_a^b < \tilde{K}(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad = \quad \int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

2) Sei $\partial A = \alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad A$, dann ist

$$\beta = \partial B = \varphi \circ \alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad B \quad , \quad \text{und es gilt}$$

$$\int_a^b < K(\beta(t)), \beta'(t) > \mathrm{d}t \quad = \quad \int_a^b < K(\varphi(\alpha(t))), (\varphi \circ \alpha)'(t) > \mathrm{d}t$$

$$= \quad \int_a^b \underbrace{{}^tK(\varphi(\alpha(t)))}_{\in M(1\times 3,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \alpha)'(t)}_{\in M(3\times 1,\mathbb{R})} \mathrm{d}t \quad , \quad \text{und nach der Kettenregel :}$$

$$= \quad \int_a^b \underbrace{{}^tK(\varphi(\alpha(t)))}_{\in M(1\times 3,\mathbb{R})} \cdot (\underbrace{(D\varphi)(\alpha(t))}_{\in M(3\times 2,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{\in M(2\times 1,\mathbb{R})})\mathrm{d}t$$

Aus der Assoziativität des Matrizenprodukts und der Definition (1) von $\tilde{K}$ erhalten wir

$$\int_a^b < K(\beta(t)), \beta'(t) > \mathrm{d}t \quad = \quad \int_a^b < \tilde{K}(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad .$$

3) Wir formen nun die rechte Seite von (2) um: Für $x = {}^t(x_1, x_2)$ und

$$J \quad := \quad \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

gilt nach der Definition (1) von $\tilde{K}$ für die $j-$te Komponente von $\tilde{K}$, $j \in \underline{2}$:

$$\tilde{K}_j(x) \quad = \quad {}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet j}(x) \quad , \quad \text{also}$$

$$J \quad = \quad \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} ({}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet 2}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_2} ({}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet 1}(x)) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{k=1}^3 K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{k=1}^3 K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_1} \right) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

Wenden wir Ketten- und Produktregel an auf das für
$u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in B \subset \mathbb{R}^3$ definierte $K(u)$, so folgt

$$J = \int_A \sum_{k=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_j} K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_2} \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_j} K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_1}$$

$$\left. + K_k(\varphi(x)) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

Da φ zweimal stetig differenzierbar ist, ist für $k \in \underline{3}$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \quad .$$

Mit den Vektoren

$$b := K(\varphi(x)) \quad , \quad c := \varphi_{\bullet 1}(x) \quad , \quad d := \varphi_{\bullet 2}(x) \in \mathbb{R}^3$$

und dem vektoriellen Differentialoperator

$$a := \nabla = {}^t\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \quad \text{gilt also}$$

$$J = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k (c_j d_k - d_j c_k) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

Wenn man hier berücksichtigt, dass die a_j keine Skalare, sondern Differentialoperatoren sind, die nur auf die nachfolgenden b_k anzuwenden sind (also nicht mit diesen vertauscht werden dürfen), kann man weiterrechnen:

$$J = \int_A \left(\sum_{j,k=1}^{3} c_j a_j b_k d_k - \sum_{j,k=1}^{3} d_j a_j b_k c_k \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_A (< c, a >< b, d > - < d, a >< b, c >) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

und mit einer Rechenregel für das Vektorprodukt folgt

$$J = \int_A < a \times b, c \times d > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_A < \nabla \times K(\varphi(x)), \varphi_{\bullet 1}(x) \times \varphi_{\bullet 2}(x) > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

Hier ist $\nabla \times K(\varphi(x))$ die Rotation von K an der Stelle $\varphi(x)$, also

$$J \quad = \quad \int_A < \operatorname{rot} K(\varphi(x)), \varphi_{\bullet 1}(x) \times \varphi_{\bullet 2}(x) > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad ,$$

$$(4) \qquad J \quad = \quad \int_B < \operatorname{rot} K(y), \nu(y) > \mathrm{d}S(y) \quad .$$

Setzt man (3) und (4) in (2) ein, so erhält man die Behauptung. □

§54 Integration von Differentialformen

54.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Definition 54.3.1 : b) Es gebe nun **endlich viele** Karten

$$\varphi_j \,:\, T_j \xrightarrow{\sim} V_j \,=\, \varphi_j(T_j) \subset M \,,\, j \in \underline{m} \,, \quad \text{mit}$$

$$A \subset \bigcup_{j \in \underline{m}} V_j \quad , \quad \text{so dass} \quad \mathfrak{A} \cup \{\ \varphi_j \mid j \in \underline{m}\ \} \quad \text{orientiert ist,}$$

mit einer der Überdeckung $(V_j)_{j \in \underline{m}}$ untergeordneten **lokal-integrierbaren** Teilung der Eins, d.h. mit Funktionen

$$\alpha_j \,:\, \bigcup_{l \in \underline{m}} V_l \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für} \quad j \in \underline{m}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \leq \alpha_j \leq 1$ und $\alpha_j \Big|_{\bigcup_{l \in \underline{m}} V_l \setminus V_j} = 0$

(ii) $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in \bigcup_{j=1}^{m} V_j$

(iii) Die Funktionen $t \longmapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$ sind lokal-integrierbar über T_j .

Wenn man nicht, wie in Forster, Analysis 3 , S.239 , auch noch fordert, dass die α_j stetig sind, kann man eine solche Familie von Karten sofort angeben:
(∗) Sei $(V_j)_{j \in \underline{m}}$ eine Überdeckung von A mit offenen, beschränkten V_j . Man nehme

$$\alpha_j := 1_{W_j} \,,\, W_j := V_j \setminus \left(\bigcup_{l<j} V_l \right) \quad \text{für} \quad j \in \underline{m} \quad .$$

Wir setzen in jedem Fall

$$A_j \quad := \quad A \cap \{\ x \in \bigcup_{l=1}^{m} V_l \mid \alpha_j(x) \neq 0\ \} \subset V_j$$

und nennen die $k-$Form ω **integrierbar** über A, falls ω über alle A_j (im Sinne von a)) integrierbar ist, und wir setzen dann

$$(1) \int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega \quad := \quad \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_{\mathrm{j}}^{-1}(\mathrm{A_j})} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega) \quad .$$

$(*)$ Wählt man die lokal-integrierbare Teilung der Eins wie unter $(*)$ angegeben, so sieht man, dass hier das herauskommt, was man erwartet: Es ist in diesem Fall

$$\bigcup_{j=1}^{m} V_j = \underset{\text{disjunkt}}{\bigcup_{j=1}^{m}} W_j \quad , \quad \text{also } A_j = A \cap W_j \quad \text{und} \quad A = \underset{\text{disjunkt}}{\bigcup_{j=1}^{m}} A_j \quad ,$$

$$(2) \int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(A_j)} \varphi_j^* \omega \quad ,$$

wegen $\alpha_j(x) = 1$ für $x \in W_j$. Mit dieser Formel (2) und dieser Wahl der α_j kann man $\int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega$ auch im Fall mehrerer Karten leicht ausrechnen (leichter als mit Formel(1)). Man müsste noch zeigen, dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig ist von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins. $\square$

54.4 Integration über Hyperflächen

Spezialfall 54.4.8 : Sei U offen im $\mathbb{R}^3$, $M \subset U$ eine parametrisierte Fläche, also eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit nur einer Karte

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) = M \quad , \quad T \quad \text{offen im} \quad \mathbb{R}^2 \quad . \quad \text{Sei}$$

$$f = (f_1, f_2, f_3) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{ein stetiges Vektorfeld.}$$

Sei $K \subset M$ kompakt. Dann gilt

$$\int\limits_K < f, \mathrm{d}\vec{S} > \quad = \quad \int\limits_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad , \quad \text{wobei für} \quad t \in T$$

$$\nu(\varphi(t)) \quad := \quad \frac{\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)}{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||} \quad \text{ist.}$$

Beweis : Es ist

$$\int_K < f,\, \mathrm{d}\vec{S} > \;=\; \int_K f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \int_K f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \int_K f_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi^* f_2 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 + \varphi^* f_3 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right) + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) \right) \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right\rangle \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} < \varphi^* f(t), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \quad .$$

Rechts steht nun das in 54.1.1 definierte Integral einer 2-Form über eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$\int_K < f,\, \mathrm{d}\vec{S} > \;=\; \int_{\varphi^{-1}(K)} < \varphi^* f(t), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} < f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) > \underbrace{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)|| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}_{= \mathrm{d}S(x) \text{ nach 51.2.9 b)}}$$

$$\stackrel{51.2.7}{=} \int_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad . \qquad \square$$

Definition 54.4.9 : In Definition 51.2.7 hatten wir allgemein

$$\int_K g(x) \mathrm{d}S(x)$$

für eine Funktion $g \,:\, K \longrightarrow \mathbb{R}$, K eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, definiert. Für ein Vektorfeld

$$f = (f_1, f_2, f_3) \,:\, K \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{nennt man}$$

$$\int_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad ,$$

wobei ν wie in 54.4.8 definiert ist, den **Fluss des Vektorfelds f durch die Fläche K**. □

§55 Der Stokessche Integralsatz im $\mathbb{R}^n$

55.3 Der Satz

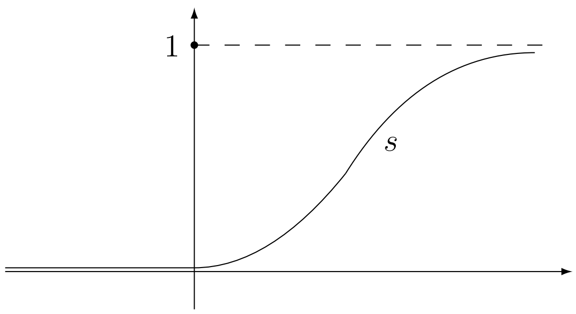
(55.3.1) Bemerkung : Als Übungsaufgabe hatten wir gezeigt, dass

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad s(t) \quad := \quad \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist. Setzen wir

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g(t) \quad := \quad s(1+t) \cdot s(1-t)$,

so ist auch g beliebig oft differenzierbar; es gilt



$$g(t) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1+t > 0 \wedge 1-t > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \in (-1;1) \quad ,$$

also $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, und in $(-1;1)$ ist $g(t) > 0$. Es ist

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad G(t) \quad := \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

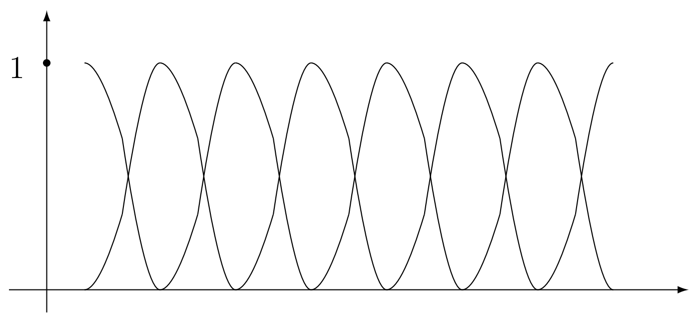
definiert, denn zu jedem $t \in \mathbb{R}$ gibt es eine oder zwei ganze Zahlen k mit

$t \in (k-1, k+1) \quad ,$

und nur für solche k ist

$g(t-k) \neq 0$. G ist, wie g ,

beliebig oft differenzierbar,



und es gilt

$\forall\, k \in \mathbb{Z}\, \forall\, t \in \mathbb{R} \,:\; G(t) \;=\; G(t-k)$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $G(t) > 0$; wir können also

$$h(t) \;:=\; \frac{g(t)}{G(t)} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

setzen, dann ist $\operatorname{Supp}\, h \;=\; [-1;1]$, $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, und

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-k) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} \;=\; \frac{1}{G(t)} \cdot G(t) \;=\; 1 \quad .$$

Wir möchten noch erreichen, dass der Durchmesser der Träger der einzelnen Summanden kleiner als ein vorgegebenes $\lambda > 0$ wird. Außerdem sollen die Summanden im $\mathbb{R}^n$ definiert sein. Wir definieren dazu für $p \;=\; (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$\alpha_{p\varepsilon} \;:\; \mathbb{R}^n \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad \text{durch}$$

$$\alpha_{p\varepsilon}(x) \;:=\; \frac{1}{G_\varepsilon(x)} \prod_{j=1}^{n} g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \quad \text{mit}$$

$$G_\varepsilon(x) \;:=\; \sum_{q\in\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^{n} g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - q_j\right) \quad .$$

Wegen $g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - q_j\right) > 0 \iff \frac{x_j}{\varepsilon} \in (q_j - 1; q_j + 1)$ und $g \geq 0$ sieht man wie oben: $G_\varepsilon > 0$, und G_ε ist beliebig oft differenzierbar, also auch

(i) $\alpha_{p\varepsilon}$ beliebig oft differenzierbar, und

(ii) $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon}(x) \;=\; \frac{1}{G_\varepsilon(x)} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^{n} g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \;=\; \frac{G_\varepsilon(x)}{G_\varepsilon(x)} = 1$;

man nennt daher $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ eine **beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins** , und es gilt noch

(iii) $\operatorname{Supp}\, \alpha_{p\varepsilon} \;=\; \{\; x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; |x_j - p_j\varepsilon| \leq \varepsilon \,\text{für alle}\, j \in \underline{n} \;\}$,

also

$\operatorname{diam}\,(\,\operatorname{Supp}\, \alpha_{p\varepsilon}\,) \;=\; \operatorname{diam}\, [0; 2\varepsilon]^n \;=\; 2\varepsilon\sqrt{n}$,

und das wird kleiner als λ für $\varepsilon < \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. □

Für die Vorlesung verwendete Literatur

L : KONRAD KÖNIGSBERGER : Analysis 2, 5.,korrigierte Auflage.
Springer-Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2003.
G : OTTO FORSTER : Analysis 3, 3.Auflage.
Vieweg Studium 52 , Wiesbaden 1981 ,
außerdem dieses Skript:
S : ERNST BÖNECKE : Skript zur Höheren Analysis,
Hamburg 2008.

Inhalt der "Höheren Analysis"