

## Französische Mathematiker um 1800

Jean le Rond d'Alembert	1717 – 1783
Etienne Bézout	1730 – 1783
Joseph Louis Lagrange	1736 – 1813
Gaspard Monge	1746 – 1818
Pierre-Simon de Laplace	1749 – 1827
Adrien-Marie Legendre	1752 – 1833
Joseph Fourier	1768 – 1830
Siméon Poisson	1781 – 1840
Augustin-Louis Cauchy	1788 – 1857

## Sophie Germain

Marie-Sophie Germain, geboren 1776 in Paris

Vater: Seidenhändler,  
Mitglied der französischen Nationalversammlung als  
Vertreter des 3. Standes (des Bürgertums)

Familie liberal, gebildet, relativ wohlhabend

Germain wird zeitlebens von ihrer Familie finanziell unterstützt

1789 Französische Revolution

Beginn von Germain's Interesse an der Mathematik

Selbststudium durch Bücher (Montucla, Bézout,  
Newton, Euler) und später auch durch Hauslehrer

1794 Gründung der Ecole Polytechnique in Paris

geöffnet nur für Männer

Germain studiert unter dem Pseudonym „Antoine-  
Auguste Le Blanc“: Sie liest Vorlesungsmanuskripte  
u.a. von Lagrange und bearbeitet Aufgaben.

ab 1798 Arbeit auf dem Gebiet der Zahlentheorie

ab 1804 Briefwechsel mit Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

ab 1808 Arbeit auf dem Gebiet der Elastizitätstheorie

1815 Preis des Institut de France (vormals Académie des  
Sciences) für ihre Arbeit zur Elastizitätstheorie

1831 Tod

## Germain's Werk: Zahlentheorie

Beschäftigung mit Zahlentheorie auf Anregung ihres Mentors Lagrange.

Studium folgender bedeutender Werke:

Legendre: „Essai sur la théorie des nombres“, 1798

Gauß: „Disquisitiones arithmeticae“, 1801

Erst durch Gauß' Werk wurde die Zahlentheorie zu einer eigenständigen Disziplin.

### **1804 – 1808 Korrespondenz Germain – Gauß.**

- auf Initiative von Germain
- zunächst (bis 1807) unter dem Pseudonym Le Blanc
- für Germain die einzige Möglichkeit zum wissenschaftlichen Austausch mit einem kompetenten Partner
- Gauß wird für Germain zum Mentor
- Gauß nimmt sie ernst
- Gauß schätzt Germain's Wissen und ihre Forschung
- Gauß freut sich über Korrespondenz mit einer Person, die sein Werk verstanden hat
- wenn kein direkter Zusammenhang zu seiner Forschung besteht, antwortet Gauß nur oberflächlich auf Germain's Briefe
- Briefwechsel endet, als Gauß sich anderen Forschungsgebieten zuwendet

Sophie Germain ist noch heute bekannt für ihre Beiträge zum Satz von Fermat.

## Der Satz von Fermat

Pierre de Fermat (1601 – 1665):

Für jede natürliche Zahl  $n > 2$  hat die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad (*)$$

keine ganzzahligen Lösungen mit  $x, y, z \neq 0$ .

Fermat schrieb um 1630 an den Rand seiner Ausgabe von Diophants Arithmetik: „*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.*“ (Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.)

[zitiert nach S. Singh: Fermats letzter Satz]

**Beweis** des Satzes: 1994 von Andrew Wiles

### **Spezialfälle:**

- $n=2$ : Gleichung (\*) hat unendliche viele Lösungen (pythagoräische Zahlentripel)
- $n=3$ : lückenhafter Beweis von Euler 1770; erster korrekter Beweis von Kausler 1795
- $n=4$ : Beweis von Fermat selbst; publiziert erstmals von Frénicle de Bessy 1676
- $n=5$ : Gauß 1863 (nach seinem Tod publiziert)

[nach P. Ribenboim: Fermat's Last Theorem for Amateurs]

## Sophie Germain's Beitrag zum Satz von Fermat

$$x^n + y^n = z^n \quad (*)$$

### **Vorüberlegung:**

Man kann in (\*) ohne Einschränkung von folgendem ausgehen:

- $x, y, z$  teilerfremd
- $n$  ungerade Primzahl (da  $n=4$  schon gelöst)

### **Traditionelle Fallunterscheidung:**

**Fall 1.** keine der Zahlen  $x, y, z$  ist durch  $n$  teilbar

**Fall 2.** (genau) eine der Zahlen  $x, y, z$  ist durch  $n$  teilbar

### **Definition:**

Eine Primzahl  $n$  heisst **Sophie-Germain-Primzahl**, wenn auch  $2n+1$  Primzahl ist.

$n=2, n=3, n=5, n=11$  sind Sophie-Germain-Primzahlen,  $n=7$  nicht.

**Satz** (von Germain, publiziert von Legendre 1823):

Ist  $n$  eine Sophie-Germain-Primzahl und liegt **Fall 1** vor, so hat (\*) keine Lösung.

In derselben Arbeit findet sich noch ein viel allgemeinerer Satz von Germain, der u.a. zeigt, dass (\*) für alle  $n < 100$  im **Fall 1** keine Lösung besitzt.

## Germain's Werk: Elastizitätstheorie

- 1808 Vorführungen des deutschen Physikers Ernst Chladni popularisierten die „*Chladni-Figuren*“: Muster, die auf einer mit Sand bestreuten und dann in Vibration versetzten (Glas-)Platte entstehen.
- 1809 Preisaufgabe des Institut de France:  
Finde eine mathematische Theorie, welche das Phänomen der Chladni-Figuren beschreibt.
- 1811 Germain reicht als einzige Person eine Lösung ein, sie erhält aber keinen Preis, da ihre Arbeit auf Grund ihrer mangelhaften mathematischen Ausbildung gravierende Fehler enthält. Grundideen: Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls (schwingender Stab); Begriff der „Krümmung“.
- 1813 Zweite Einreichung einer Lösung von Germain. Sie zeigt u.a., dass eine inzwischen von Lagrange vorgeschlagene Differentialgleichung („Plattengleichung“) in einigen Fällen zu Chladni-Figuren führt. Der Preis wird wieder nicht vergeben, aber Germain erhält eine „Würdigung“.
- 1815 Erneute Einreichung einer Lösung. Germain erhält den Preis, trotz nach wie vor vorhandener Mängel. Zur Preisverleihung erscheint sie nicht, wohl u.a. wegen Differenzen mit dem Institutsmitglied Poisson.

Germain's Arbeiten zu den Chladni-Figuren legten einen Grundstein für die Entwicklung der Elastizitätstheorie.

## **Sophie Germain als Frau in der Wissenschaft**

- keine formale Ausbildung, daher hinter Männern zurück
- als Frau kein Zugang zu wissenschaftlichen Institutionen
  
- Lagrange und Gauß als Mentoren. Diese lieferten Motivation und Aufgabenstellungen, aber wenig konstruktive Kritik
- eigenständige Forschung
- Publikation in Fachzeitschriften
  
- keine wirkliche Integration in die Wissenschaftlergemeinschaft
- kein akademischer Grad, Mathematik nicht als Beruf
  
- Anerkennung: Preis des Institut de France
- Eingang in die Mathematikgeschichte