1) Permutationsgruppen

Es sei X eine endliche Menge. Mit

$$S_X$$

bezeichnen wir die Menge der Permutationen von X; mit anderen Worten: S_X ist die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\pi : X \longrightarrow X.$$

Gilt $|X| = n$, so folgt $|S_X| = n!$.

Bezüglich der Nacheinanderausführung $\circ$ von Abbildungen ist S_X eine Gruppe, die man die symmetrische Gruppe auf X nennt.

Definition. Ist G eine Untergruppe von S_X, so nennt man G eine Permutationsgruppe auf X (group of permutations of X).

Ist G eine Permutationsgruppe auf X, so sagt man auch: G operiert auf X.

Gilt $X = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man anstelle von S_X auch S_n. Eine wichtige Untergruppe von S_n ist die <u>alternierende Gruppe</u> A_n; diese besteht aus allen geraden Permutationen von $\{1,\dots,n\}$. (Man beachte: Die Nacheinanderausführung zweier gerader Permutationen ist wieder eine gerade Permutation.) Es gilt

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Permutationsgruppen treten häufig als <u>Symmetriegruppen</u> geometrischer Objekte auf.

<u>Beispiel</u>. Gegeben sei ein Quadrat, dessen Ecken wie folgt mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet seien:

Wir betrachten acht Symmetrietransformationen der Ebene, d.h. bijektive Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: 1) Die Identität $id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

2) drei Drehungen im Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt des Quadrats, jeweils um $90°$, $180°$ und $270°$;

3) vier Spiegelungen an den Symmetrieachsen des Quadrats.

Jeder dieser Symmetrietransformationen entspricht eine Permutation der Ecken des Quadrats[1]:

$$\left.\begin{array}{l} id \\ (1,2,3,4) \\ (1,3)(2,4) \\ (1,4,3,2) \end{array}\right\}$$ durch Drehungen erzeugte Permutationen der Ecken

$$\left.\begin{array}{l} (2,4) \\ (1,3) \\ (1,2)(3,4) \\ (1,4)(2,3) \end{array}\right\}$$ durch Spiegelungen erzeugte Permutationen der Ecken.

Diese acht Permutationen bilden eine Untergruppe der S_4, die sog. <u>Quadratgruppe</u>. Mit anderen Worten: Es handelt sich bei der Quadratgruppe um eine Permutationsgruppe auf $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Weitere Beispiele von Permutationsgruppen erhält man, wenn man Automorphismen von Graphen betrachtet.

---

1) Die Permutationen sind in Zyklenschreibweise angegeben; die Identität wird als Drehung um 0° angesehen.

<u>Definition</u>. a) Zwei Graphen H und H' heißen <u>isomorph</u>, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\varphi : V(H) \to V(H')$$

gibt, für die für alle $a, b \in V(H)$ gilt

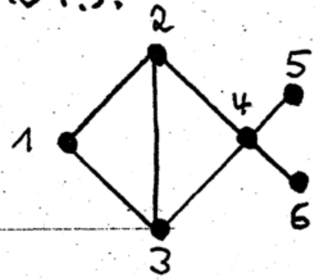
$$ab \in E(H) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in E(H').$$

b) Ein solches φ wird <u>Isomorphismus</u> genannt. Gilt $H' = H$, so nennt man φ einen <u>Automorphismus von H</u>.

Mit Aut(H) sei die Menge der Automorphismen von H bezeichnet; bzgl. der Nacheinanderausführung von Abbildungen ist Aut(H) eine Gruppe, die <u>Automorphismengruppe</u> von H.

Aut(H) und jede Untergruppe von Aut(H) ist eine Permutationsgruppe auf $X = V(H)$.

<u>Beispiel</u>. Die Automorphismengruppe des folgenden Graphen H besteht aus vier Elementen (Welche sind dies nämlich?).



Eine Ergänzung zu Seite E. 258

Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass man die Ausdrucksweise „G operiert auf X" auch in der folgenden allgemeineren Situation verwendet: Es sei G eine Gruppe, X sei eine Menge und $h : G \to S_X$ sei eine Abbildung von G in die symmetrische Gruppe auf X. Man sagt <u>G operiert (vermöge h) auf X</u>, falls $h : G \to S_X$ ein Homomorphismus ist.

(Sind $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen, so versteht man unter einem <u>Homomorphismus</u> von G nach H eine Abbildung $h : G \to H$, für die $h(a \cdot b) = h(a) * h(b)$ für alle $a, b \in G$ gilt. In der Situation auf Seite E. 258 ist der zugehörige Homomorphismus die Abbildung $h : G \longrightarrow S_X$ mit $h(a) = a$ für alle $a \in G$.)

2) Orbits und Stabilisatoren

Es sei G eine Permutationsgruppe auf X. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf X wie folgt:

$$x \sim y \iff \exists\, g \in G \text{ mit } g(x) = y.$$

Aus der Tatsache, dass G eine Gruppe ist, folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Zeigen Sie dies!)

Die Menge X zerfällt also in Äquivalenzklassen: Zwei Elemente x und y liegen genau dann in derselben Äquivalenzklasse, wenn es eine Permutation $g \in G$ gibt, die x auf y abbildet. Man nennt diese Äquivalenzklassen die <u>Orbits</u> (oder <u>Bahnen</u>) von G auf X. Bezeichnung für den Orbit, dem x angehört:

$$Gx := \{y \in X : y = g(x) \text{ für ein } g \in G\}.$$

Intuitiv ausgedrückt enthält der Orbit Gx alle Elemente von X, die in Bezug auf die Operation von G auf X <u>ununterscheidbar</u> von x sind.

<u>Frage</u>: G sei die Automorphismengruppe des Graphen auf Seite E.261 und $X = \{1, \ldots, 6\}$ sei die Eckenmenge dieses Graphen. Welches sind die Orbits von G auf X?

Gegeben sei eine Gruppe G, die auf einer Menge X operiert (d.h., G ist eine Permutationsgruppe auf X). Wir befassen uns im Folgenden mit <u>zwei naheliegenden Anzahlproblemen</u>:

a) Für $x \in X$: Was kann man über die Größe des Orbits Gx aussagen?

b) Wie kann man die Zahl der Orbits bestimmen?

<u>Schreibweise</u>: $G(x \to y)$ bezeichnet die Menge der Elemente $g \in G$, für die $g(x) = y$ gilt. Insbesondere ist $G(x \to x)$ die Menge der $g \in G$, die x fest lassen. Man schreibt

$$G_x$$

anstelle von $G(x \to x)$ und nennt G_x den <u>Stabilisator von x</u>.

Wegen $id_X \in G_x$ gilt $G_x \neq \emptyset$. Für $g_1, g_2 \in G_x$ gilt stets $g_1 \circ g_2 \in G_x$. Dies zeigt, dass G_x eine Untergruppe von G ist. (Man beachte: Wir setzen voraus, dass X endlich ist. Somit ist auch G endlich und zum Nachweis, dass G_x eine Untergruppe ist, reicht es, $G_x \neq \emptyset$ sowie die Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$ nachzuweisen.)

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Stabilisator G_x und den Mengen $G(x \to y)$: Falls $G(x \to y) \neq \emptyset$ ist, d.h., falls es ein $h \in G$ mit $h(x) = y$ gibt, so ist $G(x \to y)$ eine Linksnebenklasse des Stabilisators G_x. Dies ist der Inhalt der folgenden Feststellung.

Feststellung 1. Es sei G eine Permutationsgruppe auf X und h sei ein Element von $G(x \to y)$. Dann gilt $G(x \to y) = hG_x$.

Beweis. (i) Ist $\alpha \in hG_x$, so gibt es ein $\beta \in G_x$ mit $\alpha = h\beta$. Es folgt $\alpha(x) = h(\beta(x)) = h(x) = y$, d.h., es gilt $\alpha \in G(x \to y)$. Dies zeigt $hG_x \subseteq G(x \to y)$.

(ii) Gilt umgekehrt $\alpha \in G(x \to y)$, so folgt $h^{-1}(\alpha(x)) = h^{-1}(y) = x$, d.h., es gilt $h^{-1}\alpha \in G_x$. Es gilt also $h^{-1}\alpha = \beta$ für ein $\beta \in G_x$. Es folgt $\alpha = h\beta$, woraus man (wegen $\beta \in G_x$) $\alpha \in hG_x$ erhält. Dies zeigt $G(x \to y) \subseteq hG_x$. $\square$

Unsere nächste Feststellung trifft eine Aussage über die Anzahl der Elemente von G_x (vergl. a) auf Seite E. 263).

<u>Feststellung 2</u>. Es sei G eine Permutationsgruppe auf X, und x sei ein beliebiges Element von X. Dann gilt

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Kurz gesagt: $|Gx|$ ist gleich dem Index des Stabilisators G_x.

<u>Beweis</u>. Es sei $x \in X$ fest gewählt. Die Menge $S \subseteq G \times X$ sei definiert durch

$$S = \{(g, y) : g(x) = y\}.$$

Wir zählen die Anzahl der Elemente von S auf zwei Arten („Doppelte Abzählung"):

(i) Da es zu jedem $g \in G$ genau ein y mit $g(x) = y$ gibt, gilt $|S| = |G|$.

(ii) Zu jedem $y \in X$ bestimmen wir nun die Anzahl der $g \in G$ mit $g(x) = y$: Für $y \notin Gx$ ist diese Anzahl gleich Null; gilt dagegen $y \in Gx$, so ist diese Anzahl gleich $|G(x \to y)|$. Da nach Feststellung 1 $|G(x \to y)| = |G_x|$ gilt, haben wir also $|S| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Aus (i) und (ii) folgt wie behauptet $|Gx| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$. $\square$

Wir kommen nun zur Hauptaufgabe, die unter b) auf Seite E.263 bereits erwähnt wurde, nämlich zur Bestimmung der Zahl der Orbits bei Operation einer Gruppe G auf einer Menge X.

Es sei X also eine endliche Menge und G sei eine Gruppe, die auf X operiert, d.h., G ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_X. Für jedes $g \in G$ definieren wir

$$fix(g)$$

als die Anzahl der Elemente $x \in X$, für die $g(x) = x$ gilt (genannt Fixelemente oder Fixpunkte von g).

Der nächste Satz (genannt „Satz von Burnside" oder auch „Lemma von Burnside") ist unser Hauptergebnis. Er besagt, dass die Zahl der Orbits gleich der durchschnittlichen Zahl der Fixpunkte der Gruppenelemente ist.

<u>Theorem</u> („<u>Lemma von Burnside</u>"). Die Zahl der Orbits von G auf X ist gleich

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{fix}(g).$$

<u>Beweis.</u> Zählt man die Paare (g,x), für die $g\in G$, $x\in X$ und $g(x)=x$ gilt, auf zwei Arten, so erhält man

$$(*) \qquad \sum_{g\in G} \mathrm{fix}(g) = \sum_{x\in X} |G_x|.$$

Es sei t die Zahl der Orbits von G auf X, und mit $X_1,\dots,X_t$ seien diese Orbits bezeichnet. Aus $x\in X_i$ folgt dann $|Gx|=|X_i|$ $(i=1,\dots,t)$. Man erhält mit Hilfe von Feststellung 2 für alle $i=1,\dots,t$:

$$\sum_{x\in X_i} |G_x| = \sum_{x\in X_i} \frac{|G|}{|Gx|} = \sum_{x\in X_i} \frac{|G|}{|X_i|} = |X_i|\frac{|G|}{|X_i|} = |G|.$$

Für die rechte Seite von $(*)$ folgt somit

$$\sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{i=1}^{t} \sum_{x\in X_i} |G_x| = t|G|.$$

Es folgt

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X} |G_x| \overset{(*)}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{fix}(g). \qquad \square$$