$\binom{n}{k}=0$, d.h., auch in diesem Fall gibt $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge an. An einem Beispiel erläutert: Es gilt

$$\binom{3}{5}=\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=0,$$

was mit der Tatsache übereinstimmt, dass eine 3-elementige Menge keine 5-elementigen Teilmengen besitzt.

Für Binomialkoeffizienten gibt es eine Vielzahl von Identitäten. („Die Geheimnisse und Schönheiten des Pascalschen Dreiecks füllen ganze Bände" [M. Aigner, Diskrete Mathematik, Seite 14].) Welche sind die wichtigsten? Eine mögliche Antwort findet man in dem bekannten Buch R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics: Dort wird auf Seite 174 eine Liste der „top ten binomial coefficient identities" aufgeführt. Wir besprechen einige der bekanntesten Identitäten, die zum Teil auch in dieser Hitliste auftauchen. Dabei streben wir nicht größtmögliche Allgemeinheit an: Obwohl einige dieser Identitäten auch für verallgemeinerte Binomialkoeffizienten gelten, formulieren wir sie nur für die im Pascalschen Dreieck auftretenden Binomialkoeffizienten.

(1.) Alternierende Zeilensummen bis zum k-ten Eintrag

Wir wissen: $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$ $(n\geq 1)$.

Was ergibt sich, wenn wir die Summation nach dem Summanden $(-1)^k\binom{n}{k}$ stoppen?

Antwort: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}=(-1)^k\binom{n-1}{k}$ (für $n\geq 1$).

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & -\,6 & & +\,15 & & -\,20 & & +\,15 & = & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Beweis: Für $k<n$ gilt

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}=$$

$$\binom{n-1}{0}-\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]-\ldots$$

$$+(-1)^k\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]=(-1)^k\binom{n-1}{k},$$

da sich alles bis auf den letzten Term weghebt.

Für $k=n$ gilt die Formel wegen $\binom{n-1}{n}=0$. $\square$

② Diagonales Addieren

Wir betrachten im Pascalschen Dreieck die Diagonalen, die vom linken Rand nach rechts unten verlaufen, und addieren die jeweils ersten $k+1$ Elemente.

Beispiel: $1+3+6+10+15=35$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \boxed{1} & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Die im Beispiel beobachtete Beziehung lautet allgemein:

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k} \qquad (n, k \geq 0).$$

Übungsaufgabe: Man beweise diese Identität durch vollständige Induktion.

Aufgrund der Symmetrie der Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{n+i}{i} = \binom{n+i}{n} \quad \text{und} \quad \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Setzt man dies in (*) ein, so erhält man die entsprechende Formel für Diagonalen, die von rechts oben nach links unten laufen:

$$(**) \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Häufig findet man die Formel (**) auch in folgender Form (man beachte $\binom{i}{n}=0$ für $i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i < n$)

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

3. Summe der Quadrate der Elemente einer Zeile

Wir bilden im Pascalschen Dreieck die Summe der Quadrate der Elemente einer Zeile; für die ersten Zeilen erhält man

$$1^2 = 1$$
$$1^2+1^2 = 2$$
$$1^2+2^2+1^2 = 6$$
$$1^2+3^2+3^2+1^2 = 20$$
$$1^2+4^2+6^2+4^2+1^2 = 70.$$

Man erhält also die ersten fünf Mittelterme der

Zeilen mit einer ungeraden Anzahl von Einträgen:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Es gilt in der Tat für alle $n = 0, 1, \ldots$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Wieso nämlich?

Für endliche Mengen A und B mit $|A| = n$ und $|B| = k$ betrachten wir Abbildungen

$$A \longrightarrow B.$$

Wir wissen: es gibt k^n Abbildungen $A \to B$ und $k^{\underline{n}} = k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)$ dieser Abbildungen sind injektiv.

<u>Frage</u>: Wieviele <u>surjektive</u> Abbildungen $A \to B$ gibt es?

<u>Antwort</u>: $k! \cdot S_{n,k}$.

<u>Beweis</u>: Zu jeder surjektiven Abbildung $f: A \to B$ gehört auf naheliegende Art eine k-Partition von A, nämlich die Partition

$$A = \biguplus_{b \in B} f^{-1}(\{b\}).$$

Eine surjektive Abbildung f lässt sich also immer in 2 Schritten herstellen: Man wählt zunächst eine k-Partition $A_1, \ldots, A_k$ von A aus; hierfür hat man $S_{n,k}$ Möglichkeiten. Danach wählt man eine Bijektion $\varphi: \{A_1, \ldots, A_k\} \longrightarrow B$ und definiert $f(a) = \varphi(A_i)$ für alle $a \in A_i$ und $i = 1, \ldots, k$. Da es $k!$ Möglichkeiten gibt, φ auszuwählen, hat man insgesamt $k! S_{n,k}$ Möglichkeiten, f zu bilden. $\square$

Man kann sich mit der Rekursionsformel aus Satz 1.27 leicht Werte von $P_{n,k}$ für kleine n und k ausrechnen; man erhält für $n \leq 21$ und $k \leq 8$ die folgenden Werte[1]:

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
3	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37
4	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72
5	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101
6	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89

<u>Beispiel</u>: Der Wert $P_{18,5} = 57$ ergibt sich wie folgt aus den Werten, die in Spalte 13 zu finden sind: Nach der Rekursionsformel gilt

$$P_{18,5} = P_{13,0} + P_{13,1} + P_{13,2} + P_{13,3} + P_{13,4} + P_{13,5}.$$

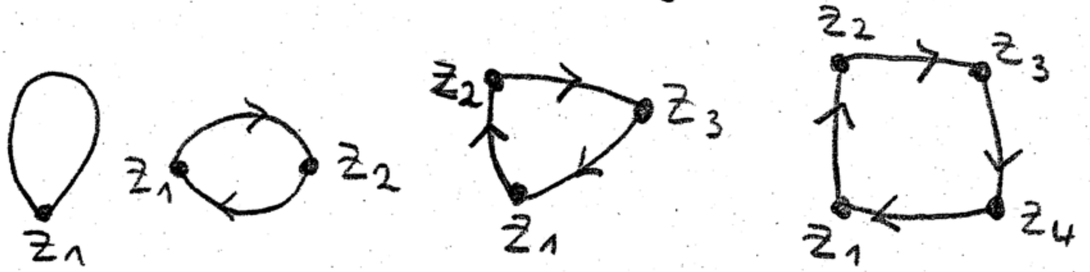
Also: $P_{18,5} = 0 + 1 + 6 + 14 + 18 + 18 = 57.$

---

1) Tabelle aus K. Jacobs, D. Jungnickel: Einführung in die Kombinatorik.

Es sei R eine Relation auf einer Menge S und $n \in \mathbb{N}$. Unter einem <u>Kreis</u> von R wollen wir eine Folge $z_1, \ldots, z_n \in S$ von n verschiedenen Elementen von S verstehen, für die $(z_i, z_{i+1}) \in R$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ und $(z_n, z_1) \in R$ gilt; n heiße die <u>Länge</u> des Kreises.

Graphische Darstellung von Kreisen der Längen 1–4:



Eine Relation heißt <u>azyklisch</u>, falls sie keine Kreise der Länge $\geqq 2$ enthält.

Es gilt für die reflexive transitive Hülle R^* einer Relation R:

a) R^* ist stets eine Quasiordnung;

b) R^* ist genau dann eine partielle Ordnung, wenn R azyklisch ist.

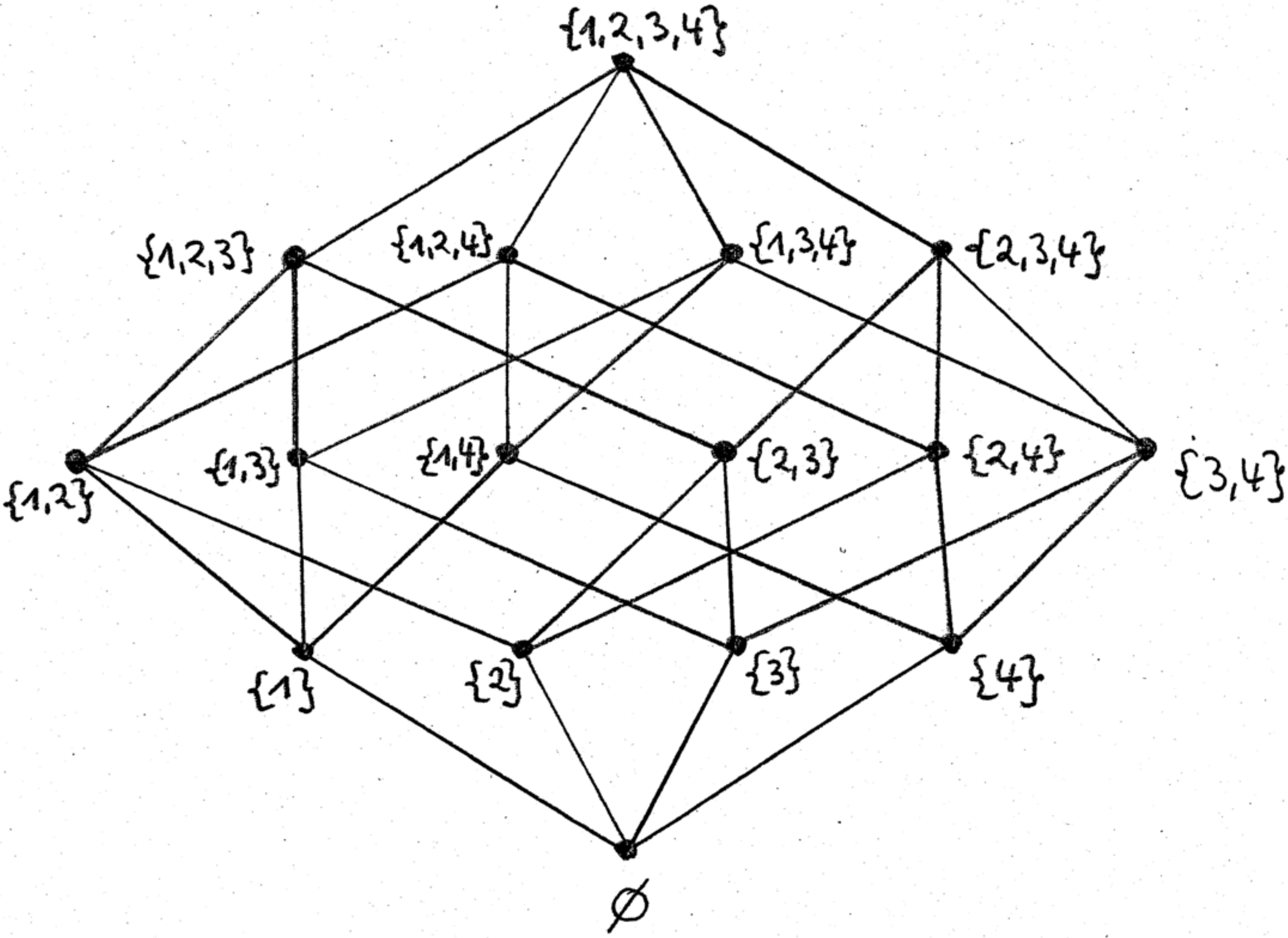
Die Feststellung a) ist klar; der Beweis von b) sei dem Leser überlassen.

<u>Definition</u>: Es sei $(S, \preccurlyeq)$ eine partielle Ordnung und T sei eine Teilmenge von S.

a) Man nennt T eine <u>Kette</u> von S, falls je zwei Elemente von T vergleichbar sind.

b) T heißt <u>Antikette</u> von S, falls je zwei Elemente von T unvergleichbar sind.

Ist K eine Kette und A eine Antikette von S, so gilt $|K \cap A| \leq 1$.



Der Mengenverband $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ für $S = \{1,2,3,4\}$.

Beispiele für Ketten im Mengenverband $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, $S = \{1,2,3,4\}$:

$$\{2\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

und

$$\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{2,4\} \subseteq \{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4\},$$

wobei letztere eine Kette maximaler Länge ist.

Beispiele für Antiketten im selben Mengenverband:

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

und

$$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

sowie

$$\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\},$$

aber beispielsweise auch

$$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\}.$$

<u>Satz von Sperner</u>: Im Mengenverband $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ für $|S| = n$ gilt

$$\max\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ Antikette}\} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

<u>Beweis</u>: Die Teilmengen A von S mit $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ bilden eine Antikette mit $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Elementen. Es bleibt also zu zeigen, dass es in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ keine größeren Antiketten gibt. Zu diesem Zweck sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Antikette von $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Wir betrachten Ketten der Form („maximale Ketten in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$")

$$\emptyset \subseteq \{x_1\} \subseteq \{x_1, x_2\} \subseteq \ldots \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Es gibt insgesamt $n!$ derartige Ketten, und zu jedem $A \in \mathcal{A}$ gibt es $|A|!\,(n-|A|)!$ Ketten dieser Art, in denen A vorkommt. (Weshalb nämlich?)
Da jede Kette höchstens ein Element aus $\mathcal{A}$ enthält, erhält man

$$n! \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!\,(n-|A|)!\,.$$

Teilt man durch $n!$ und beachtet man, dass $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ gilt, so ergibt sich

$$1 \geq \sum_{A\in\mathcal{A}} \frac{|A|!\,(n-|A|)!}{n!} = \sum_{A\in\mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}},$$

woraus die Behauptung $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ folgt. □

Es gilt folgende Ergänzung zum vorangehenden Satz:

a) Ist n gerade, so gibt es im Mengenverband $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ genau eine Antikette mit der maximalen Anzahl $\binom{n}{n/2}$ von Elementen, nämlich die Antikette der Teilmengen A von S mit $|A| = n/2$;

b) ist n ungerade, so gibt es in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ genau zwei Antiketten mit der maximalen Anzahl $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ von Elementen (nämlich welche?).

Beweis von a) (und erster Schritt im Beweis von b)): Ist $\mathcal{A}$ eine Antikette in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, so gilt (siehe oben) $\sum_{A\in\mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$. Gilt nun $|\mathcal{A}| = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$, so gibt es in der linken Summe $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ Summanden, woraus folgt, dass die Ungleichung nur richtig sein kann, wenn $\binom{n}{|A|} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Für n gerade folgt daraus $|A| = n/2$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und man ist fertig. Für ungerades n folgt $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oder $|A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Wie man in diesem Fall weiter schließt, kann man z. B. in Jacobs/Jungnickel, Einführung in die Kombinatorik nachlesen.

Der folgende Satz von Dilworth ist ein Beispiel für einen sogenannten Mini-Max-Satz. Weitere Sätze dieses Typs werden wir im Laufe der Vorlesung kennen lernen.

Wir wollen eine endliche partielle Ordnung $(P, \preceq)$ in möglichst wenige disjunkte Ketten zerlegen. Ist A eine Antikette von $(P, \preceq)$ mit möglichst vielen Elementen, sagen wir $|A| = \alpha$, so brauchen wir mindestens α Ketten in unserer Zerlegung, da keine zwei Elemente aus A in derselben Kette vorkommen können. Es gilt also

$$(*) \quad \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ ist Kettenzerlegung von } (P, \preceq)\} \geq \max\{|A| : A \text{ ist Antikette von } (P, \preceq)\}.$$

Der Satz von Dilworth besagt nun, dass hier sogar Gleichheit gilt, dass es also immer eine Kettenzerlegung mit $\alpha = \max\{|A| : A \text{ ist Antikette von } (P, \preceq)\}$ Elementen gibt.

<u>Satz (Dilworth)</u>. Für jede endliche partielle Ordnung $(P, \preceq)$ gilt

$$\min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ ist Kettenzerlegung von } (P, \preceq)\} = \max\{|A| : A \text{ ist Antikette von } (P, \preceq)\}.$$

<u>Beweis</u>. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $|P|$. Wir setzen $\alpha = \max\{|A| : A \text{ ist Antikette von } (P,\preceq)\}$.

Für $|P|=1$ ist die Aussage klar. Es sei nun $|P|>1$ und wir nehmen an, dass die Aussage für alle partiell geordneten Mengen mit weniger als $|P|$ Elementen richtig ist.

<u>1. Fall</u>: Es gibt eine Antikette A von $(P,\preceq)$ mit $|A|=\alpha$, die weder alle maximalen Elemente noch alle minimalen Elemente von P enthält. Wir wählen ein solches A und definieren

$$P^+ = \{p \in P : a \preceq p \text{ für ein } a \in A\},$$

$$P^- = \{p \in P : p \preceq a \text{ für ein } a \in A\}.$$

Es folgt

1) $P^- \cup P^+ = P$. (Denn gäbe es ein $p \in P \setminus (P^- \cup P^+)$, so wäre $A \cup \{p\}$ eine Antikette mit $\alpha+1$ Elementen

2) $P^- \cap P^+ = A$. (Klar ist $A \subseteq P^- \cap P^+$. Zum Beweis von $P^- \cap P^+ \subseteq A$ sei $p \in P^- \cap P^+$. Es folgt die Existenz von $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \preceq p \preceq a_2$. Also gilt $a_1 \preceq a_2$, woraus $a_1 = a_2$ folgt, da A eine Antikette ist. Es folgt $p = a_1$ (Antisymmetrie!), also $p \in A$.)

3) $P^- \neq P$. (Nach Voraussetzung gibt es ein maximales Element m von P mit $m \notin A$. Würde $m \in P^-$ gelten, so hätte man $m \lneq a$ für ein $a \in A$, woraus (wegen der Maximalität von m) $m = a$ folgen würde, im Widerspruch zu $m \notin A$. Also gilt $m \notin P^-$, womit $P^- \neq P$ gezeigt ist.)

Analog erhält man

4) $P^+ \neq P$.

Wegen 3) und 4) gilt $|P^-|, |P^+| < |P|$, d.h., wir können die Induktionsannahme sowohl auf P^- als auch auf P^+ anwenden. Man beachte ferner, dass A eine Antikette maximaler Länge sowohl von P^- als auch von P^+ ist. Nach Induktionsannahme gibt es also eine Zerlegung von P^- in α disjunkte Ketten $K_1^-, \ldots, K_\alpha^-$ und ebenfalls eine Zerlegung von P^+ in α disjunkte Ketten $K_1^+, \ldots, K_\alpha^+$. Wegen 2) haben die Ketten $K_1^-, \ldots, K_\alpha^-$ die Elemente von A als größte Elemente und die Ketten $K_1^+, \ldots, K_\alpha^+$ haben die Elemente von A als kleinste Elemente. Fügt man diese Kettenzerlegungen von P^- und P^+ zusammen, so erhält man (aufgrund von 1) und 2)) eine Kettenzerlegung von P in α Ketten.

<u>2. Fall</u>: Jede Antikette A von $(P, \leq)$ mit $|A| = \alpha$ enthält entweder alle maximalen oder alle minimalen Elemente von P.

In diesem Fall kann es höchstens zwei Antiketten von P mit α Elementen geben: Nur die Antiketten der minimalen Elemente von P bzw. die Antikette der maximalen Elemente können Antiketten mit α Elementen sein.

Wir wählen ein minimales Element $a \in P$ und dazu ein maximales Element $b \in P$, für das $a \leq b$ gilt. Es sei $P' = P \setminus \{a, b\}$. In P' gilt $\max\{|A| : A \text{ ist Antikette von } (P', \leq)\} = \alpha - 1$. Nach Induktionsannahme können wir P' in $\alpha - 1$ Ketten zerlegen. Nimmt man die Kette $\{a, b\}$ hinzu, so erhält man eine Zerlegung von P in α Ketten.

In beiden Fällen hat man also eine Zerlegung von P in α Ketten erhalten, woraus (zusammen mit $(*)$) der Satz von Dilworth folgt. □

Ergänzungen zu folgenden Themen:
a) Summen, b) Multinomialkoeffizienten

Summen

Aus den Anfängervorlesungen sind die folgenden Formeln bekannt:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

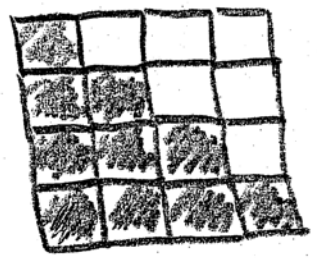
$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Man kann diese Formeln leicht durch vollständige Induktion beweisen. Es stellt sich jedoch darüber hinaus die Frage, wie man auf diese und ähnliche Formeln kommt. Befassen wir uns zunächst mit den drei obigen Beispielen:

Zu (1): Eine naheliegende Art, zu (1) zu gelangen, besteht darin, sich die Summe $\sum_{k=1}^{n} k$ durch Kästchen zu veranschaulichen. Betrachtet man ein Quadrat der Seitenlänge n, das in n^2 Kästchen aufgeteilt ist, so wird durch die Summe

$\sum_{k=1}^{n} k$ die Anzahl der Kästchen gezählt, die unterhalb oder auf der Hauptdiagonalen liegen; etwa für $n=4$ führt dies zu folgender Figur:



Insgesamt gibt es in einem derartigen Quadrat n^2 Kästchen, n davon liegen auf der Hauptdiagonalen und $\frac{n^2-n}{2}$ darunter. Es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Eine alternative Möglichkeit, zu (1) zu gelangen, besteht darin, die Methode anzuwenden, die in der Anekdote vom kleinen Gauß vorkommt: Man summiert die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nicht nur einmal, sondern zweimal, wobei man sie geschickt zu Paaren zusammenfasst:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & & n+1 & n+1 \end{array}.$$

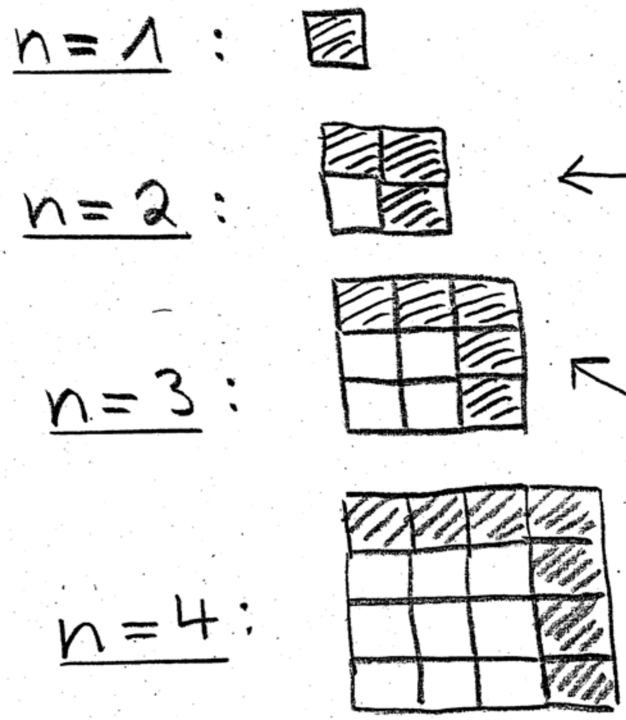
Es ergibt sich $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$,

woraus (1) folgt.

<u>Einschub</u>. Mit (1) verwandt ist die folgende Formel (1') („Summe der ersten n ungeraden Zahlen"):

$$(1') \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Veranschaulichung von (1') mit Hilfe von Kästchen:

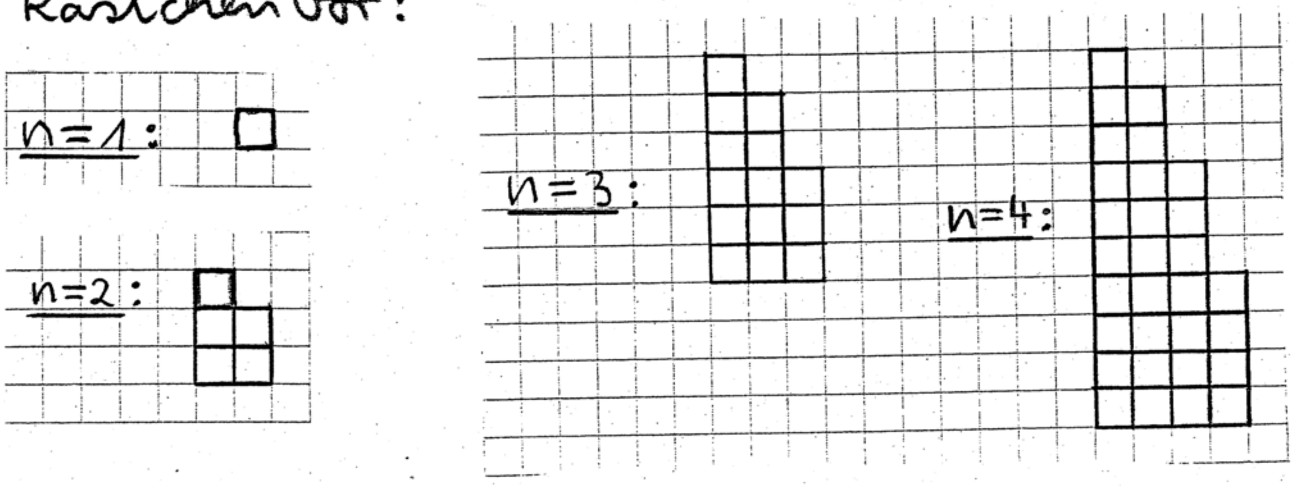


3 Kästchen werden hinzugefügt; man erhält insgesamt $2^2=4$ Kästchen.

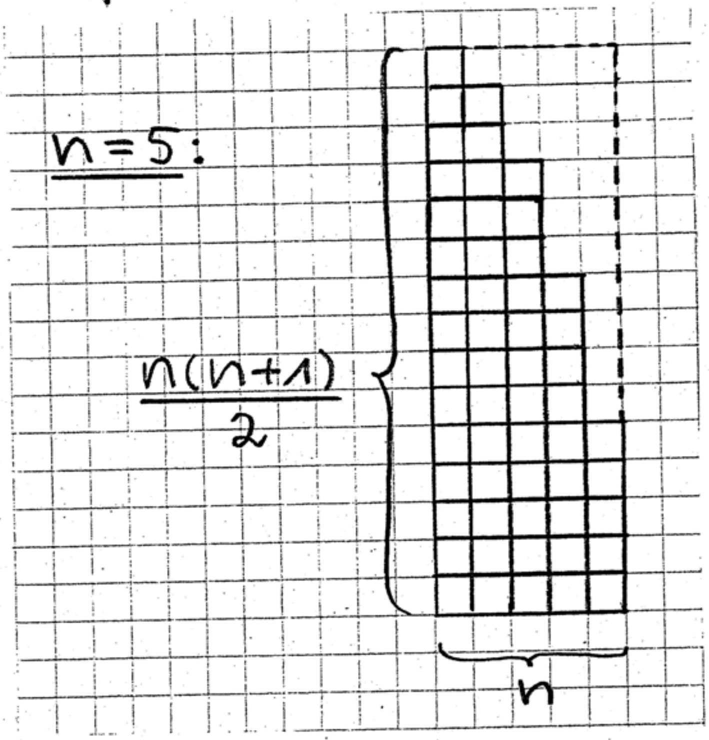
5 Kästchen werden hinzugefügt und man erhält insgesamt $3^2=9$ Kästchen.

Zur Übung: Weisen Sie (1') mit der „Methode des kleinen Gauß" nach.

__Zu (2):__ Auch (2) lässt sich mit der Kästchenmethode gewinnen, die Details sind jedoch etwas komplizierter. Man stelle sich die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2$ wie folgt durch Kästchen vor:



Der Trick besteht nun darin, dass man die entstandene Figur zu einem Rechteck mit Seitenlängen n und $\frac{n(n+1)}{2}$ ergänzt und anschließend die Kästchen des Reckecks zählt, die nicht zur ursprünglichen Figur gehören; und zwar zählt man diese zusätzlichen Kästchen spaltenweise.



1\. Spalte: 0 zusätzliche Kästchen
2\. Spalte: 1 zusätzliches Kästchen
3\. Spalte: 1+2 zusätzliche Kästchen
4\. Spalte: 1+2+3 zusätzliche Kästchen
⋮

Allgemein: In der kten Spalte gibt es

$\sum_{j=0}^{k-1} j = \frac{(k-1)k}{2}$ zusätzliche Kästchen ($k=1,\ldots,n$).

Man erhält

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{4}.$$

Es folgt

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$ und somit

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zu (3): Um die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^3$ zu untersuchen, betrachten wir kleine Werte von n:

n	1	2	3	4	5	6
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	1	9	36	100	225	441

Man beobachtet, dass es sich in der zweiten

Zeile um Quadratzahlen handelt, und zwar um die Quadrate der Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21. Dies sind aber gerade die Zahlen

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

für $n=1,\dots,6$, was zu der Vermutung führt, dass (3) gilt. Durch vollständige Induktion bestätigt man die Richtigkeit dieser Vermutung.

Im Fall der Summe $\sum_{k=1}^{n} k^3$ war es also besonders einfach, einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten.

Will man für eine Summe einen geschlossenen Ausdruck finden, so ist es immer empfehlenswert sich zunächst eine Tabelle mit Werten der Summe für kleine Fälle anzulegen. Dadurch erhält man z.B. die Möglichkeit, Vermutungen zu überprüfen. Dass man, wie im Fall der Summe $\sum_{k=1}^{n} k^3$, das Ergebnis an einer solchen Tabelle ablesen kann, ist allerdings eher die Ausnahme.

Nachdem wir nun (1), (2) und (3) erledigt haben, wollen wir eine <u>allgemeine Methode</u> kennen lernen, mit der man häufig einen geschlossenen Ausdruck für eine Summe finden kann.

Eine Perturbationsmethode für Summen[1]

Wir betrachten Summen $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

und bezeichnen sie mit S_n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, .$$

In diesen Summen ist also immer ein Summand a_0 für $k=0$ mit dabei. Damit die in (1), (2) und (3) betrachteten Summen in dieses Schema passen, schreiben wir sie in Zukunft in der Form $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ und $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

„Perturbation" bedeutet „Störung" oder „kleine Änderung". Die kleine Änderung,

---

1) Die Darstellung folgt teilweise Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics

die wir an einer betrachteten Summe vornehmen werden, besteht darin, dass wir den ersten bzw. letzten Term aus der Summe herausnehmen. Genauer gehen wir wie folgt vor: Ist $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ die Summe, für die wir einen geschlossenen Ausdruck finden wollen, so schreiben wir S_{n+1} auf zwei Arten – einmal spalten wir den letzten und das andere Mal den ersten Term ab:

$$(*) \quad S_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

$$= a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}.$$

Danach wird die rechte Summe weiter umgeformt mit dem Ziel, die rechte Summe mit Hilfe von S_n auszudrücken. Wenn alles gut läuft, erhalten wir den gewünschten geschlossenen Ausdruck für S_n.

Wir erläutern diese Methode anhand von drei Beispielen:

Beispiel 1: $\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \ldots + q^n$ (für $q \in \mathbb{R}$).

Dies ist ein besonders einfaches Beispiel: Jeder weiß, dass

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

gilt (geometrische Summenformel). Wir versuchen, diese Formel mit Hilfe der Perturbationsmethode zu gewinnen:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = q^0 + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}.$$

Die Summe $\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$ mit Hilfe der Summe $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ auszudrücken ist einfach. Man braucht nur q auszuklammern:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = q^0 + q\sum_{k=0}^{n} q^k,$$

woraus durch Auflösen nach $\sum_{k=0}^{n} q^k$ die geometrische Summenformel folgt.

Beispiel 2: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n$.

Für $n = 0, \ldots, 5$ erhält man

n	0	1	2	3	4	5	6
S_n	0	2	10	34	98	258	642

woraus man keinen Anhaltspunkt für eine geschlossene Formel bekommt. Anwendung von (*) ergibt

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^{k+1}.$$

Wir formen die rechte Summe um:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k\,2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} k\,2^k + 2\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$= 2S_n + 2\cdot\frac{1-2^{n+1}}{1-2}.$$

Es folgt $S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n - 2 + 2^{n+2}$, woraus man durch Auflösen nach S_n erhält

$$\sum_{k=0}^{n} k\,2^k = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

Beispiel 3: Wir wollen nun die oben behandelte Summe $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ mit der Perturbationsmethode bearbeiten. Als Ergebnis müssten wir – wenn alles glatt läuft –

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

erhalten. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)^3 &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n+1. \end{aligned}$$

Der nächste Schritt wäre nun, die erhaltene Gleichung nach S_n aufzulösen, was aber leider nicht geht, da sich die beiden S_n-Terme wegheben. Das sieht nach einer Niederlage aus! Ist es aber nicht, da man trotzdem eine geschlossene Formel erhält, allerdings nicht für $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$, wie ursprünglich angestrebt, sondern für die Summe

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

streicht man nämlich auf beiden Seiten die Terme S_n und löst dann nach $\sum_{k=0}^{n} k^2$ auf,

so erhält man

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{3n(n+1)}{6} - \frac{n+1}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Neben der geometrischen Methode der Seiten E.46 – E.48 haben wir also eine zweite Methode gefunden, durch die man die Formel $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

erhält.

<u>Frage</u>: Was muss man tun, um mit der Perturbationsmethode die ursprünglich angestrebte geschlossene Formel für $\sum_{k=0}^{n} k^3$ zu erhalten?

<u>Übungsaufgabe</u>: Ermitteln Sie mit der Perturbationsmethode eine geschlossene Formel für die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} k^4.$$

Multinomialkoeffizienten

Gegeben: Eine Menge $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ von n (unterscheidbaren) Bällen und eine Menge $U=\{u_1,\dots,u_m\}$ von m (unterscheidbaren) Urnen (für $n, m \geq 1$).

Außerdem seien ganze Zahlen $n_1,\dots,n_m$ gegeben mit $n_k \geq 0$ ($k=1,\dots,m$) und $n_1+\dots+n_m=n$.

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bälle auf die Urnen zu verteilen, so dass in Urne u_k genau n_k Bälle kommen ($k=1,\dots,m$)?

Man bezeichnet diese Anzahl mit

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$$

und nennt dies einen Multinomialkoeffizienten.

Ist $m=2$, so erhält man die Binomialkoeffizienten, denn es gilt (klar?)

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Bälle und Urnen sind sehr anschaulich, es sollte jedoch klar sein, dass in vielen Anwendungen $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ und $U=\{u_1,\dots,u_m\}$ auch völlig andersartige Mengen sein können. Sind $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ und $U=\{u_1,\dots,u_m\}$ beliebige Mengen, so kann man die Fragestellung auch wie folgt formulieren:

Man bestimme die Anzahl der Abbildungen $B \longrightarrow U$, für die gilt: Auf u_k werden genau n_k Elemente aus B abgebildet (für $k=1,\dots,m$ und für gegebene $n_1,\dots,n_m$ mit $n_1+\dots+n_m=n$).

<u>Feststellung</u>: $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$.

<u>Beweis</u>. Wir verwenden Induktion nach m. Ist $m=1$, so gilt $n_1=n$ und man erhält auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung den Wert 1. Nun sei $m \geq 2$. Man hat $\binom{n}{n_m}$ Möglichkeiten, die n_m Elemente aus B zu wählen, die auf u_m abgebildet werden, und bei fester Wahl dieser n_m Elemente hat man dann noch

$$\binom{n-n_m}{n_1,\dots,n_{m-1}}$$

Möglichkeiten, die Bilder für die verbliebenen $n-n_m$ Elemente zu wählen. Es ergibt sich somit

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \binom{n}{n_m}\cdot\binom{n-m_m}{n_1,\ldots,n_{m-1}}$$

$$\overset{*}{=} \frac{n!}{n_m!(n-n_m)!}\cdot\frac{(n-m_n)!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_{m-1}!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!},$$

wobei an der mit * gekennzeichneten Stelle die Induktionsannahme benutzt wurde. □

In ähnlicher Weise, wie die Binomialkoeffizienten im Binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

auftreten, treten die Multinomialkoeffizienten in folgendem Satz auf:

<u>Multinomialsatz</u>. Für $m \geq 2$ und $n \geq 0$ gilt

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{n_m},$$

wobei die Summe über alle m-Tupel $(n_1,n_2,\ldots,n_m)$ nichtnegativer ganzer Zahlen genommen wird, für die $n_1+n_2+\ldots+n_m = n$ gilt.

Beweis. Berechnet man das Produkt

$$(x_1+x_2+\dots+x_m)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_m)\cdot\ldots\cdot(x_1+x_2+\dots+x_m)}_{n \text{ Faktoren } F_1,\dots,F_n}$$

durch Ausmultiplizieren, so erhält man eine Summe von Ausdrücken der Art

$$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{n_m},$$

wobei $n_1,\dots,n_m$ nicht negative ganze Zahlen mit $n_1+n_2+\dots+n_m=n$ sind. Für jedes m-Tupel $(n_1,n_2,\dots,n_m)$ derartiger Zahlen gilt dabei: Der Summand $x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{n_m}$ tritt genau dann auf, wenn beim Ausmultiplizieren

x_1 aus genau n_1 Faktoren,
x_2 aus genau n_2 Faktoren,
$\vdots$
x_m aus genau n_m Faktoren

gewählt wurde, was auf genau $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_m}$ Arten möglich ist. (Man betrachte die Faktoren $F_1,\dots,F_n$ als Bälle und die Variablen $x_1,\dots,x_m$ als Urnen.) □