

Topologie (Bachelor)

Wintersemester 2019/20

Julian Holstein

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

(Stand: 2. Dezember 2021)

Inhaltsverzeichnis

1	Mengentheoretische Topologie	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Metrische Räume	2
1.3	Offene und abgeschlossene Mengen	4
1.4	Topologische Räume	7
1.5	Vergleich von Topologien	10
1.6	Unterräume	12
1.7	Abgeschlossene Hülle und offener Kern	14
1.8	Basen, Subbasen, Umgebungsbasen	16
1.9	Initialtopologie und Produkt	18
1.10	Finaltopologie und Summe	22
1.11	Quotientenräume	24
1.12	Hausdorffsche Räume	27
1.13	Zusammenhang	28
1.14	Wegzusammenhang	32
1.15	Mehr über Quotientenräume	36
1.16	Kompaktheit	38
1.17	Filter	42
1.18	Filter und Kompaktheit	45
1.19	Abbildungsräume	47
1.20	Normale Räume und Urysohn's Lemma	48
1.21	Kategorien	50
1.22	Limes und Kolimes	53
1.23	Limes und Kolimes von topologischen Räumen	55
2	Einführung in die algebraische Topologie	60
2.1	Homotopien	60
2.2	Homotopieerweiterungseigenschaft	63
A	Erinnerungen und Ergänzungen	67
A.1	Das Zornsche Lemma	67

Literatur:

- B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001
- G. Laures, M. Szymik, *Grundkurs Topologie*, Spektrum, 2009

- R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner 1994
- J. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall 1975
- A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2001
- L.A. Steen, J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover 1995

Dies ist das Skript für eine Topologie-Vorlesung an der Universität Hamburg im Wintersemester 2019/20. Es basiert auf dem Skript von Christoph Schweigert, das wiederum auf Birgit Richters Vorlesung basiert. Ich danke meinen Vorgängern. Christoph Schweigerts Skript ist unter <https://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws15/tskript.pdf> erhältlich.

Für Korrekturen und Bemerkungen bin ich sehr dankbar, selbst wenn es sich um vermeintliche Kleinigkeiten handelt. Bitte emailen Sie an julian.holstein@uni-hamburg.de.

Vielen Dank an Muskan Abbas, Lennart Fitschen, Nicola Lorenz, Moritz Mucke, Nicolas Pich Preuss, Jakob Stegemann und N. N. für hilfreiche Kommentare.

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter <http://www.math.uni-hamburg.de/home/holstein/lehre/Top19Skript.pdf> als pdf-Datei.

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Einleitung

Topologie ist ein fundamentales Teilgebiet der Mathematik. Objekt der Topologie sind die *topologischen Räume* und die *stetigen Funktionen* zwischen ihnen. Topologische Räume sind mathematische Strukturen, geometrische Objekte im weitesten Sinne, die uns nur bis auf stetige Verformungen interessieren. Es geht um qualitative, nicht quantitative Eigenschaften des Raumes. Zwei Räume, die sich stetig ineinander verformen lassen (Verformungen ohne Reißen und Kleben) sind für uns also äquivalent. Man vergleiche den alten Witz, dass ein Topologe jemand ist, der den Unterschied zwischen einem Doughnut und einer Kaffeetasse nicht kennt. Korrekt ist natürlich, dass ein Topologe oder eine Topologin den Unterschied kennt, aber die Gemeinsamkeiten interessanter findet.

Um diese Ideen präzise zu machen werden wir sehr sorgfältig und abstrakt arbeiten. Schon die Definition topologischer Räume und ihrer wichtigen Eigenschaften ist nicht ganz einfach.

Sie kennen stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, oder von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, oder zwischen Untermengen dieser Räume. Der natürliche Lebensraum stetiger Funktionen sind topologische Räume. Also ist die Topologie eine Verallgemeinerung der Analysis.

Als nächstes ist die Topologie Grundlage der Geometrie in all ihren Formen (Differenzialgeometrie, komplexe Geometrie, algebraische Geometrie, arithmetische Geometrie, Lie Gruppen etc.). Ein topologischer Raum mit zusätzlicher Struktur wird zu einem geometrischen Objekt.

Aufgrund ihrer Verformbarkeit lassen sich topologische Räume schwer unterscheiden und klassifizieren, entscheidende Hilfe kommt aus der Algebra. Die Anwendung von Algebra auf Probleme der Topologie ist so fruchtbar, dass wir von einem neuen Teilgebiet, der *algebraischen Topologie* sprechen, die die elementare oder mengentheoretische Topologie an Bedeutung weit übertrifft. In der zweiten Hälfte dieses Kurses werden wir uns mit Grundzügen der algebraischen Topologie befassen.

Die Beziehung von Algebra und Topologie ist aber keinesfalls einseitig, Topologie und algebraische Topologie haben zahlreiche Anwendungen auf die Algebra, und haben wesentlich zur Entwicklung neuer Bereiche beigetragen, insbesondere homologische Algebra, Kategorientheorie und das Studium sogenannter "höherer Strukturen".

Topologie findet Anwendung in allen Bereichen der modernen Mathematik, ob Funktionalanalysis oder Zahlentheorie, algebraische Geometrie oder mathematische Physik. Wir werden im Laufe des Kurses erahnen, was Topologie so mächtig macht. Insbesondere beweisen wir fast nebenbei die folgenden beiden fundamentalen Sätze:

Satz 1.1.1 (Brouwer's Fixpunktsatz). *Sei $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in [0, 1]^2$ mit $f(x) = x$.*

Für $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist dies ein Korollar des Zwischenwertsatzes. Für den Fixpunktsatz in beliebiger Dimension müssen Sie auf den Master-Kurs über algebraische Topologie warten.

Satz 1.1.2 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $f(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann gibt es $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$.*

Ein paar Worte zur Geschichte

Die Topologie ist ein recht junges Teilgebiet der Mathematik. Insbesondere die moderne Formulierung der Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie hat sich relativ spät herausgebildet.

Ein paar Namen und Daten, die Sie gerne gleich wieder vergessen dürfen:

- Erste Ideen bei Leonhard Euler (Königsberger Brückenproblem 1736, Eulerscher Polyedersatz 1750)
- Johann Benedict Listing (Begriff *Topologie* 1847, Möbiusband), Bernhard Riemann (Mannigfaltigkeiten, Geschlecht, Habilitationsvortrag 1854), Ludwig Schläfli (*vielfache Kontinuität*, Polyeder),
- Georg Cantors Mengenlehre und sein Studium von Intervallen sind einflussreich
- Anfänge der algebraischen Topologie bei Enrico Betti und insbesondere Henri Poincaré (*Analysis Situs* 1895)
- Definition des metrischen Raums durch Maurice Fréchet 1906, cf. Kapitel 1.2.
- Explizite Definition eines *topologischen Raumes* über den Umgebungsbegriff durch Felix Hausdorff 1914 (heute Hausdorfscher Raum, cf. Definition 1.3.2.
- Moderne Definition topologischer Räume durch Kazimierz Kuratowski erst 1922, cf. Kapitel 1.4 (als die Topologie schon ein lebhafter Forschungsbereich war).

1.2 Metrische Räume

Wir beginnen, indem wir den Abstandsbegriff aus der Analysis abstrahieren.

Definition 1.2.1. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X , zusammen mit einer Funktion

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Positivität: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
3. Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X .$$

Die reelle Zahl $d(x, y)$ für $x, y \in X$ heißt auch der **Abstand** von x und y ,

Beispiele 1.2.2. Die folgenden Räume sind metrische Räume:

1. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ mit $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ für alle $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$. Das ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik**.
2. $(\mathbb{R}^n, d_1)$ mit $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ wird manchmal Manhattan-Metrik oder Mannheimer Metrik genannt.
3. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ mit $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$.
4. Insbesondere haben wir damit drei Metriken auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ definiert, die aber alle übereinstimmen.
5. Auf dem Raum $C([0, 1], \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert man eine Metrik $d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.
6. Allgemein, ist für jeden normierten Vektorraum die Funktion $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.
7. Auf einer beliebigen Menge X gibt es immer die **diskrete Metrik**

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

8. Sei $X = \mathbb{Z}$ und definiere $d_p(a, a) = 0$ und andernfalls $d_p(a, b) = p^{-N}$ wobei $N = \max\{n \mid n \text{ teilt } |a - b|\}$. Das ist die p -adische Metrik. (Sie lässt sich auf $\mathbb{Q}$ ausweiten)
9. Sei Y eine beliebige endliche Menge und X die Menge aller Untermengen. Die symmetrische Differenz von zwei Menge A und B ist $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dann definiert $d(A, B) = |A \Delta B|$ eine Metrik auf X , die sogenannte **Hamming-Distanz**.
10. Sei X die Menge aller Zeichenketten über einem Alphabet. Man definiere die **Levenshtein-Distanz** von s_1 nach s_2 als die minimale Anzahl der Editierungen (Einfügung, Austauschung, Löschung) um s_1 in s_2 umzuwandeln.

Bemerkungen 1.2.3.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ eine Teilmenge. Dann versteht die Einschränkung $d|_{Y \times Y}$ die Teilmenge Y mit der Struktur eines metrischen Raumes.
2. Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, so hat auch das kartesische Produkt $X_1 \times X_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

die Struktur eines metrischen Raums.

Sie haben also eine reiche Auswahl an Beispielen für metrische Räume. Wir wenden uns nun den Abbildungen zwischen metrischen Räumen zu.

Definition 1.2.4. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **stetig im Punkt** $x \in X$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $d(x, y) < \delta$ folgt $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Die Abbildung f heißt **stetig**, wenn sie in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Beispiele 1.2.5.

1. Jede stetige Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (im Sinne von Analysis) ist natürlich stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen mit der Standardmetrik.
2. Die Identitätsabbildung und jede Verknüpfung stetiger Funktionen sind immer stetig.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Wir untersuchen nun unsere metrischen Räume genauer, um ein allgemeineres Verständnis vom Stetigkeitsbegriff zu erreichen.

Definition 1.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann definieren wir die Teilmenge $B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, die **offene Kugel** vom Radius ϵ um x .

Definition 1.3.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung** eines Punktes $x \in X$, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt, d.h. wenn U eine offene Kugel um x enthält.
2. Eine Teilmenge $O \subset X$ heißt **offen**, wenn es für jedes $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset O$ gilt. Das ist genau dann der Fall wenn die Teilmenge O eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist.
3. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Die unvermeidliche Warnung: Ein und dieselbe Menge kann sowohl offen als auch abgeschlossen sein. Oder weder offen noch abgeschlossen. Sie werden sich daran gewöhnen.

Beispiel 1.3.3. In $\mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall (a, b) offen, ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen.

Die Menge $\mathbb{R}$ selbst ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Ein halboffenes Intervall $(a, b]$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Lemma 1.3.4. Jede offene Kugel $B_\epsilon(x)$ in einem metrischen Raum ist offen und insbesondere eine Umgebung von x .

Beweis. Sei $y \in B_\epsilon(x)$ ein beliebiger Punkt in der Kugel. Setze $\epsilon' := \epsilon - d(x, y) > 0$. Dann ist $B_{\epsilon'}(y) \subset B_\epsilon(x)$. Für jedes $z \in B_{\epsilon'}(y)$ gilt $d(z, y) < \epsilon'$ also ist $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \epsilon' + d(x, y) = \epsilon$ und $z \in B_\epsilon(x)$. $\square$

Bemerkung 1.3.5. Für jeden Punkt x in einem metrischen Raum (X, d) ist die Menge $\{x\}$ abgeschlossen. Für $y \in X \setminus \{x\}$ wähle $0 < \epsilon \leq d(x, y)$. Dann ist $B_\epsilon(y) \subset X \setminus \{x\}$. Also ist das Komplement $X \setminus \{x\}$ offen.

Satz 1.3.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(O1) Die Mengen $\emptyset, X$ sind offen.

(O2) Sind zwei Mengen O_1, O_2 offen, dann ist auch ihr Schnitt $O_1 \cap O_2$ offen.

(O3) Für eine beliebige Familie $(O_i)_{i \in I}$ offener Mengen ist auch die Vereinigung $\cup_{i \in I} O_i$ offen.

Beweis. (O1) Für $\emptyset$ ist die leere Bedingung erfüllt. Für X gilt für beliebiges x und beliebiges ϵ dass $B_\epsilon(x) \subset X$.

(O2) Für jeden Punkt $x \in O_1 \cap O_2$ finde offene Kugeln $B_{\epsilon_i}(x) \subset O_i$ für $i = 1, 2$. Dann ist $B_{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}(x) \subset O_1 \cap O_2$ und somit ist der Schnitt $O_1 \cap O_2$ offen.

(O3) Liegt $x \in \cup_{i \in I} O_i$, so gibt es wenigstens $i \in I$ mit $x \in O_i$. Da O_i offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset O_i$. Dann ist auch $B_\epsilon(x) \subset \cup_{i \in I} O_i$. $\square$

Bemerkung 1.3.7. Zu (O2) bemerken wir dass allgemein alle *endlichen* Schnitte offener Mengen offen sind. (Das folgt durch Inspektion des Beweises oder Induktion.)

Der nächste Satz folgt direkt aus den *de Morganschen Regeln*: das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente,

$$X \setminus \cup_{i \in I} U_i = \cap_{i \in I} (X \setminus U_i) ;$$

Das Komplement eines Schnitts ist die Vereinigung der Komplemente,

$$X \setminus \cap_{i \in I} U_i = \cup_{i \in I} (X \setminus U_i) .$$

Korollar 1.3.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(A1) Die Mengen $\emptyset, X$ sind abgeschlossen.

(A2) Sind zwei Mengen A_1, A_2 abgeschlossen, dann ist auch ihre Vereinigung $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(A3) Für eine beliebige Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch der Schnitt $\cap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Beweis. Wir betrachten Komplemente:

(A1) Es gilt $\emptyset = X \setminus X$ und $X = X \setminus \emptyset$ und X und $\emptyset$ sind nach Satz 1.3.6 (O1) offen.

(A2) Die Komplementmengen $O_i := X \setminus A_i$ sind offen. Nach Satz 1.3.6 (O2) ist somit

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = O_1 \cap O_2$$

offen.

(A3) Die Mengen $O_i := X \setminus A_i$ sind offen. Nach Satz 1.3.6 (O3) ist

$$X \setminus \cap_{i \in I} A_i = \cup_{i \in I} X \setminus A_i = \cup_{i \in I} O_i$$

offen. $\square$

Bemerkung 1.3.9. Da abgeschlossene Mengen genau die Komplemente von offenen Mengen sind, können wir jeden Satz über offene Mengen in einen Satz über abgeschlossene Mengen übersetzen. Wir müssen dabei nur die Richtung von Teilmengen umkehren (denn $A \subset B$ wird $B^C \subset A^C$) und, nach den de Morganschen Regeln, Schnitte und Vereinigungen vertauschen. Da wir den Beweis genauso übersetzen können bekommen wir zwei Sätze zum Preis von einem. Dies ist ein wichtiges Beispiel für **Dualität**.

Ein Grund für die Einführung von Umgebungen, offenen Mengen und geschlossenen Mengen ist, dass sich mit jedem dieser Begriffe stetige Abbildungen definieren lassen – ohne die Metrik explizit zu erwähnen.

Satz 1.3.10. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \rightarrow X'$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. Ist O offen in X' , so ist $f^{-1}(O)$ offen in X .
3. Ist A abgeschlossen in X' , so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .
4. Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung V des Bildes $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung des Urbilds x .

Bevor wir den Beweis unternehmen erinnern wir uns an folgende Eigenschaften von Urbildern einer Abbildung $f : X \rightarrow X'$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ f^{-1}(X') &= X \\ f^{-1}(M \cup N) &= f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \\ f^{-1}(M \cap N) &= f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \\ f^{-1}(X' \setminus N) &= f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(N) = X \setminus f^{-1}(N) \\ M \subseteq N &\Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N) \end{aligned}$$

Beweis.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Sei O offen in X' und sei $x \in f^{-1}(O)$. Es gibt $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ und da f stetig ist gibt es δ mit $y \in B_\delta(x) \Rightarrow f(y) \in B_\epsilon(f(x))$. Aber dann ist $B_\delta(x)$ in $f^{-1}(O)$ enthalten und da x beliebig war ist $f^{-1}(O)$ offen.
- (2) $\Rightarrow$ (1) Für beliebiges $x \in X$ betrachten wir die offene Menge $B_\epsilon(f(x))$. Dann ist $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ nach Annahme offen, also gibt es $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. In anderen Worten, für jedes y folgt aus $d(x, y) < \delta$ dass $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- (2) $\Leftrightarrow$ (3) Nehmen wir (3) an. Ist $A \subset X'$ abgeschlossen, so ist $O := X' \setminus A$ offen und deswegen

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(X' \setminus O) = f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(O) = X \setminus f^{-1}(O)$$

abgeschlossen.

Der Umkehrschluss folgt genauso.

- (2) $\Rightarrow$ (4) Sei x beliebig und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es nach Annahme $f(x) \in O \subset V$ eine offene Untermenge und nach Annahme ist $f^{-1}(O)$ offen. Dann gilt aber $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}V$ und $f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung.
- (4) $\Rightarrow$ (2) Sei $O \subset X'$ offen. Wir betrachten $x \in f^{-1}(O)$ und müssen zeigen, dass $f^{-1}(O)$ eine offene Kugel um x enthält. Aber O ist eine Umgebung von $f(x)$, also ist nach Annahme $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von x und enthält eine offene Kugel um x .

□

Man überzeugt sich mit ähnlichen Argumenten, dass $f : X \rightarrow X'$ genau dann in $x \in X$ stetig ist im Sinne von Definition 1.2.4, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Definition 1.3.11. Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen **äquivalent**, wenn die beiden Identitätsabbildungen

$$\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

stetig sind.

Bemerkung 1.3.12. Es folgt aus Satz 1.3.10 dass (X, d_1) und (X, d_2) genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen definieren (oder wenn sie die gleichen abgeschlossenen Mengen definieren).

Gleichmaßen sind (X, d_1) und (X, d_2) äquivalent wenn es für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ reelle Zahlen $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} d_1(x, y) < \delta_1 &\Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon \\ d_2(x, y) < \delta_2 &\Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon. \end{aligned}$$

Beispiele 1.3.13.

1. Die Metriken d_1, d_2, d_∞ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.
2. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine äquivalente Metrik. Wegen $d'(x, y) < 1$ ist die Metrik beschränkt. Insbesondere ist jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.

1.4 Topologische Räume

Wir untersuchen nun stetige Abbildungen in größter Allgemeinheit. Aus Satz 1.3.10 folgt, dass hierfür nicht die Metrik selbst, sondern die durch die Metrik definierten offenen Mengen bzw. Umgebungen entscheidend sind. Ein topologischer Raum definiert sich vollständig durch seine offenen Mengen. Wir orientieren uns für die folgende Definition an Satz 1.3.6:

Definition 1.4.1. Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X , zusammen mit einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X , für die gilt:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Mit $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ ist auch der Schnitt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(O3) Für eine beliebige Familie $(O_i)_{i \in I}$ von Mengen $O_i \in \mathcal{T}$ ist auch die Vereinigung $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ heißt dann eine **Topologie** auf X und die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene Mengen** von $\mathcal{T}$.

Es reicht auch aus zu fordern, dass $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen. Denn der Durchschnitt über der leeren Indexmenge $I = \emptyset$ ist X , da eine leere Bedingung vorliegt, und die Vereinigung über $\emptyset$ ist $\emptyset$.

Wir werden im Laufe des Kurses oft nur X schreiben um $(X, \mathcal{T})$ zu bezeichnen, falls die Topologie aus dem Zusammenhang klar ist.

Beispiele 1.4.2.

1. Metrische Räume mit offenen Mengen wie in Definition 1.3.2 sind nach Satz 1.3.6 topologische Räume. Ein topologischer Raum, dessen Topologie von einer Metrik induziert wird, heißt **metrisierbar**.
2. Insbesondere ist jede Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ auf natürliche Art ein topologischer Raum. Die Topologie wird von der Beschränkung der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induziert. Wann immer wir von einem topologischen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ sprechen, meinen wir diese Topologie.
3. Jede Menge X wird durch die Potenzmenge, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, zu einem topologischen Raum, in dem alle Mengen offen sind. Dies ist die **diskrete Topologie** auf X . Diese Topologie wird zum Beispiel durch die diskrete Metrik aus Beispiel 1.2.2.5 definiert.
4. Die **indiskrete Topologie** oder **Klumpentopologie** oder **triviale Topologie** auf einer Menge X ist gegeben durch $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. Diese Topologie wird nicht von einer Metrik induziert.
5. Die **koendliche Topologie** auf einer Menge X wird durch die folgenden offenen Mengen definiert: $O \subset X$ ist offen, wenn das Komplement $O^C := X \setminus O$ endlich ist oder $O = \emptyset$ gilt.

Offensichtlich sind dann nach Annahme $\emptyset$ und wegen $X \setminus X = \emptyset$ auch X in der Topologie. Wegen der de Morganschen Regeln

$$\begin{aligned} X \setminus (O_1 \cap O_2) &= (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) \\ X \setminus \cup_{i \in I} O_i &= \cap_{i \in I} (X \setminus O_i) \end{aligned}$$

ist die Topologie unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

Wann immer Sie eine Vermutung über topologische Räume haben, ist es eine gute Idee, zuerst die folgenden Fälle zu überprüfen: die diskrete Topologie, die indiskrete Topologie (jeweils auf einer beliebigen Menge), $\mathbb{R}^n$ und $[0, 1]$ (jeweils mit der Topologie, die von der euklidischen Metrik kommt).

Definition 1.4.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist, $X \setminus A \in \mathcal{T}$.
2. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subset U$. Mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von $x \in X$. Man nennt $\mathcal{U}(x)$ auch das **Umgebungssystem** von x .

Satz 1.4.4. Die abgeschlossenen Mengen für eine Topologie $(X, \mathcal{T})$ erfüllen die Eigenschaften (A1)-(A3) aus Satz 1.3.8.

Beweis. Dies folgt direkt aus Definition 1.4.1 und den de Morganschen Regeln. $\square$

Um eine Topologie zu definieren, kann man auch die abgeschlossenen Mengen angeben.

Definition 1.4.5. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X, \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, also wenn für jedes $O' \in \mathcal{T}'$ gilt $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **stetig** in $x \in X$, wenn alle Urbilder der Umgebungen des Bildes $f(x)$ Umgebungen von x sind, also wenn für jedes $U \in \mathcal{U}(f(x))$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$.

Ähnlich dem Beweis von Satz 1.3.10 kann man sehen, dass eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Beispiele 1.4.6.

1. Jede stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen induziert eine stetige Abbildung topologischer Räume. Wegen Satz 1.3.10 ist die topologische Stetigkeitsdefinition im Falle metrischer Räume äquivalent zu Definition 1.2.4.
2. Sei X eine beliebige Menge die wir als $X^\delta := (X, \mathcal{P}(X))$ und $X^\sigma := (X, \{\emptyset, X\})$ mit der diskreten und der indiskreten Topologie betrachten. Dann ist Die Identitätsabbildung $X^\delta \rightarrow X^\sigma$ stetig, aber die Identitätsabbildung von $X^\sigma \rightarrow X^\delta$ ist nicht stetig (es sei denn $|X| \leq 1$).

Allgemein ist jede Abbildung aus einem diskreten topologische Raum stetig, genauso jede Abbildung in einen Raum mit der trivialen Topologie.

3. Man überlegt sich leicht, dass die Identitätsabbildung $\text{id}_{(X, \mathcal{T})}$ stetig ist und die Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig ist.

Definition 1.4.7. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Wir schreiben $\text{Hom}(X, X')$ für die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach X' .

Bemerkung 1.4.8. Man sagt, dass topologische Räume und stetige Abbildungen eine *Kategorie* formen.

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten: Eine Klasse von Objekten $\text{Ob}(\mathcal{C})$, und für jedes Paar von Objekten $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine

Klasse von Morphismen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ und Identitätsmorphismen $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für jedes Objekt. Wir werden uns diesem Begriff später im Detail zuwenden.

1.5 Vergleich von Topologien

Definition 1.5.1. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf der gleichen Menge X . Die Topologie $\mathcal{T}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{T}_2$ (und $\mathcal{T}_2$ **gröber** als $\mathcal{T}_1$), wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ gilt.

Also ist jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_2$ der gröberen Topologie auch offen in der feineren Topologie $\mathcal{T}_1$, also $O \in \mathcal{T}_1$.

Bemerkungen 1.5.2.

1. $\mathcal{T}_1$ ist feiner als $\mathcal{T}_2$ genau dann, wenn die Identität als Abbildung der topologischen Räume

$$(X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\text{id}_X} (X, \mathcal{T}_2)$$

stetig ist.

2. Abbildungen aus der feineren Topologie $(X, \mathcal{T}_1)$ heraus haben es einfacher, stetig zu sein, denn es gibt im Urbild mehr offene Mengen. Abbildungen in die gröbere Topologie $(X, \mathcal{T}_2)$ hinein haben es einfacher, stetig zu sein, denn es muss für weniger offene Mengen das Urbild offen sein.
3. Die indiskrete Topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die gröbste Topologie auf einer Menge X ; die diskrete Topologie $(X, \mathcal{P}(X))$ ist die feinste Topologie auf einer Menge.

Aus der Algebra kennen Sie Isomorphismen zwischen Gruppen oder Vektorräumen, wenn zwei Objekte sich nur durch die Namen der Elemente unterscheiden, und als äquivalent betrachtet werden können. Wir wenden uns nun der entsprechenden Relation von topologischen Räumen zu.

Definition 1.5.3. Eine bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, wenn f und f^{-1} stetig sind. Die topologischen Räume heißen dann **homöomorph**, in Zeichen $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$.

Bemerkung 1.5.4. Ist f ein Homöomorphismus, so induziert f durch

$$\mathcal{T}_1 \ni O \mapsto f(O) \in \mathcal{T}_2$$

eine Bijektion zwischen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.

Beispiele 1.5.5.

1. Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$\overline{B_1(0)} = \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

ist homöomorph zum Quadrat $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$.

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

ist zwar stetig und bijektiv, hat aber kein stetiges Inverses. Das halboffene Intervall $[0, \frac{1}{2})$ ist offen in $[0, 1)$, aber die Teilmenge $(f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{2})) = f([0, \frac{1}{2}))$ ist nicht offen in $\mathbb{S}^1$ da sie keine offene Kugel um $f(0)$ enthält.

3. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1-|x|} \end{aligned}$$

mit Inversem $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+|y|}$ ist ein Homöomorphismus. Man sieht leicht, dass jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

4. Sei $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ und $N = (0, 0, 1)$. Dann ist die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \end{aligned}$$

mit Inversem

$$f^{-1} : z \mapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$$

ein Homöomorphismus. Es ist mit den Methoden der Analysis leicht zu sehen, dass f und f^{-1} stetig sind.

5. Sind zwei Metriken d und d' äquivalent dann ist die Identitätsabbildung $\operatorname{id}_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ ein Homöomorphismus.

Um zu zeigen, dass zwei topologische Räume homöomorph sind genügt es, einen Homöomorphismus anzugeben. Es ist im Allgemeinen deutlich schwieriger, zu zeigen, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind. In Beispiel 1.5.5.2 haben wir gesehen, dass eine bestimmte Funktion keinen Homöomorphismus darstellt. Aber das zeigt noch nicht, dass es nicht irgendeinen anderen Homöomorphismus gibt.

Satz 1.5.6. *Homöomorphismen definieren eine Äquivalenzrelation auf topologischen Räumen.*

Beweis. Die Bedingungen einer Äquivalenzrelation lassen sich leicht überprüfen. □

Definition 1.5.7. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **offen**, falls das Bild offener Mengen offen ist.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, falls das Bild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Satz 1.5.8. *Eine bijektive Abbildung*

$$f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$$

ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig und offen ist (und genau dann, wenn f stetig und abgeschlossen ist).

Beweis. Direkt aus der Definition. □

1.6 Unterräume

Definition 1.6.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die **Unterraumtopologie** $\mathcal{T}_{X|Y}$ ist definiert durch

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Axiome einer Topologie erfüllt sind. Eine Teilmenge $B \subset Y$ ist also genau dann offen in Y , wenn es eine offene Menge $O \subset X$ gibt mit $B = Y \cap O$. Eine Teilmenge $A \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen in Y , wenn $A = Y \cap C$ für eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset X$ gilt.

Zum Beispiel definiert die Unterraumtopologie auf $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ alle Teilmengen A als offen, die Schnitte von $[0, 1)$ mit offenen Mengen in $\mathbb{R}$ sind. Das sind offene Intervalle sowie die halboffenen Intervalle $[0, a)$ mit $a \leq 1$.

Satz 1.6.2. Die Inklusion $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ ist stetig und $\mathcal{T}_{X|Y}$ ist die grösste Topologie auf Y sodass ι stetig ist.

Beweis. Die erste Aussage folgt wegen $\iota^{-1}(O) = Y \cap O$ nach Definition von $\mathcal{T}_{X|Y}$. Wenn ι stetig ist, müssen jedenfalls alle $O \cap Y$ offen sein, also ist die Unterraumtopologie grösstmöglich. $\square$

Die Unterraumtopologie lässt sich durch eine *universelle Eigenschaft* charakterisieren.

Satz 1.6.3. Sei $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ die Inklusion.

1. Sei $(Z, \mathcal{S})$ ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f : (Z, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{X|Y})$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $\iota \circ f : (Z, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig ist.
2. Die Unterraumtopologie wird von dieser universellen Eigenschaft eindeutig bestimmt: Sei $\mathcal{T}'$ eine andere Topologie auf Y mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{S})$ eine Abbildung $f : (Z, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ genau dann stetig ist, wenn $\iota \circ f$ stetig ist. Dann ist $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir bemerken für 1. zuerst dass, wenn f stetig ist, auch die Verkettung stetiger Abbildungen $\iota \circ f$ stetig ist.

Sei umgekehrt $\iota \circ f$ stetig und $B \subset Y$ offen, also $B = Y \cap O$ mit $O \in \mathcal{T}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(Y \cap O) \\ &= f^{-1}(\iota^{-1}(O)) \\ &= (\iota \circ f)^{-1}(O) \end{aligned}$$

offen, weil die Komposition $\iota \circ f$ nach Voraussetzung stetig ist.

Nun beweisen wir 2. Zur besseren Übersichtlichkeit betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{\iota'} & (X, \mathcal{T}) \\ \text{id}_Y \updownarrow \text{id}_Y' & \nearrow \iota & \\ (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) & & \end{array}$$

Nach der universellen Eigenschaft für $\mathcal{T}'$ ist $\iota' : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig. Also ist $\iota' \circ \text{id}_Y$ stetig und nach der universellen Eigenschaft für $\mathcal{T}_{X|Y}$ ist dann $\text{id}'_Y : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{X|Y})$ stetig.

Andererseits ist $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig. Nach der universellen Eigenschaft für $\mathcal{T}'$ ist dann $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ stetig.

Damit definieren id_Y und id'_Y einen Homöomorphismus.

□

Bemerkungen 1.6.4.

1. Gilt $X \supset Y \supset Z$, so ist

$$\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}.$$

Denn $O' \in \mathcal{T}_{X|Z}$ ist von der Form $O' = Z \cap O$ mit O offen in X und somit $O' = (O \cap Y) \cap Z \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$.

Ist umgekehrt $O' \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$, so finde $O'' \in \mathcal{T}_{X|Y}$ mit $O' = O'' \cap Z$. Es gibt dann $O \in \mathcal{T}$ mit $O'' = O \cap Y$ und somit gilt $O' = (O \cap Y) \cap Z = O \cap Z \in \mathcal{T}_{X|Z}$.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist Y ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik und erhält so eine Topologie. Andererseits induziert d auf X eine Topologie und wir können Y mit der Unterraumtopologie versehen. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass diese Topologien übereinstimmen.

Definition 1.6.5. Eine Abbildung $f : X' \rightarrow X$ heißt **Einbettung**, falls $\tilde{f} : X' \rightarrow f(X')$ ein Homöomorphismus auf das Bild $f(X')$ mit der Unterraumtopologie ist.

Beispiele 1.6.6.

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

ist zwar injektiv, aber keine Einbettung, da die Umkehrabbildung nicht stetig ist, vgl. Beispiel 1.5.5.2.

2. Für jede stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ihr Graph

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

eine Einbettung. Denn die Projektion auf den ersten Faktor ist eine stetige Umkehrabbildung.

3. Vorsicht: Ist $f : X \rightarrow X'$ stetig und $Y \subset X$, so ist nach Satz 1.6.2.2 $f|_Y = f \circ \iota$ stetig, wobei Y mit der Unterraumtopologie versehen ist. Aber man kann nicht umgekehrt aus der Stetigkeit einer Einschränkung $f|_Y$ auf die Stetigkeit von f schließen.

Als einfaches Gegenbeispiel betrachte man

$$f: \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Einschränkung $f|_{\mathbb{Q}}$ ist als konstante Funktion stetig, f selbst aber nirgendwo stetig.

4. Einbettungen von $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ in den $\mathbb{R}^3$ heißen **Knoten**. Als Beispiel betrachten wir den Kleeblattknoten und den Unknoten.

1.7 Abgeschlossene Hülle und offener Kern

Definition 1.7.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\overline{B} := \bigcap_{C \supset B, C \text{ abg.}} C$$

die **abgeschlossene Hülle** oder den **Abschluss** von B .

Wir nennen

$$\overset{\circ}{B} := \bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$$

den **offenen Kern** oder das **Innere** von B .

Die Idee ist, dass der Abschluss von B die kleinste abgeschlossene Menge ist, die B enthält. Das ist ein weiteres Beispiel einer *universellen Eigenschaft*. Man beachte, dass es im Allgemeinen keinen Sinn ergibt, von der kleinsten offenen Menge zu sprechen, die B enthält.

Beispiel 1.7.2. Sei A eines der Intervalle (a, b) , $[a, b]$ oder $[a, b)$. Dann gilt $\overline{A} = [a, b]$ und $\overset{\circ}{A} = (a, b)$.

Satz 1.7.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge $B \subset X$ ist abgeschlossen. Es gilt $B \subset \overline{B}$. Für jede abgeschlossene Menge C mit $B \subset C$ gilt auch $\overline{B} \subset C$. Insbesondere ist $B = \overline{B}$ wenn B abgeschlossen ist.
2. Der offene Kern $\overset{\circ}{B}$ einer Teilmenge $B \subset X$ ist offen. Es gilt $\overset{\circ}{B} \subset B$. Für jede offene Menge O mit $O \subset B$ gilt auch $O \subset \overset{\circ}{B}$. Insbesondere ist $B = \overset{\circ}{B}$ wenn B offen ist.
3. Es gilt $\overline{B} = (\overset{\circ}{B^c})^c$ und $\overset{\circ}{B} = \overline{B^c}^c$. (Hier bezeichnet $-^c$ das Komplement in X .)

Beweis. Dieser Beweis besteht im Wesentlichen aus der Übersetzung von Definitionen.

Als Schnitt abgeschlossener Mengen, die B enthalten, ist $\overline{B}$ nach Satz 1.4.4 abgeschlossen und enthält B . Per Definition ist $\overline{B}$ in jeder abgeschlossenen Menge enthalten, die B enthält. Ist B also abgeschlossen gilt $\overline{B} \subset B$ und damit $\overline{B} = B$.

Der Beweis von 2. folgt dual.

Für 3. bemerken wir dass $B \subset D$ genau dann gilt wenn $D^C \subset B^C$ und D abgeschlossen ist genau wenn $U = D^C$ offen ist. Nach den De Morganschen Regeln gilt also $\overline{B^C} = \cup_{B \subset D} D^C = \cup_{U \subset B^C} U = \overset{\circ}{B^C}$. Wobei die erste Vereinigung über alle abgeschlossenen Obermengen und die zweite über alle offenen Teilmengen geht. Die zweite Aussage folgt dual. $\square$

Bemerkungen 1.7.4.

1. Seien A, B Teilmengen eines topologischen Raums X . Aus $A \subset B$ folgen dann $\overline{A} \subset \overline{B}$ und $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2. Es gilt

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Denn es ist $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Daraus folgt, dass $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ gilt, weil $\overline{A} \cup \overline{B}$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Umgekehrt folgt aus $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$, dass $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ und somit die umgekehrte Inklusion $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Der Beweis der Identität $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ ist dual: Aus $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$ folgt $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{A}$ und $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{B}$. Daher gilt $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Umgekehrt gilt $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$. Daraus folgt $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cap} B$, weil $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ als endlicher Schnitt offener Mengen offen ist und somit gleich seinem Inneren ist.

Wir wollen nun Abschluss und inneren Kern konkreter beschreiben.

Definition 1.7.5. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** einer Teilmenge $B \subset X$, falls B jedes Umgebung von x schneidet, also falls für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap B \neq \emptyset$.

Ein Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** einer Teilmenge $B \subset X$, falls B eine Umgebung von x enthält, also falls es $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $x \in U \subset B$.

Satz 1.7.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit Teilmenge A . Dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ die Menge der Berührungspunkte von A . Der offene Kern $\overset{\circ}{A}$ ist die Menge der inneren Punkte von A .

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage über die abgeschlossene Hülle, die Aussage über den inneren Kern folgt dual.

Sei $x \in X$ kein Berührungspunkt von A . Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap A = \emptyset$. Also ist $A \subset X \setminus U$. Da U eine Umgebung von x ist, finde eine offene Teilmenge $O \subset U$, die x enthält. Dann ist $X \setminus U \subset X \setminus O$. Es ist $X \setminus O$ abgeschlossen mit $A \subset X \setminus O$ und somit $\overline{A} \subset X \setminus O$. Damit ist aber $x \notin \overline{A}$.

Sei umgekehrt $x \notin \overline{A}$. Dann existiert eine abgeschlossene Obermenge $A \subset C$ mit $x \notin C$. Die offene Menge $V := X \setminus C$ in X enthält x , ist also Umgebung von x . Sie ist aber zu A disjunkt, $A \cap V = \emptyset$. Also ist x kein Berührungspunkt der Menge A . $\square$

Beispiel 1.7.7. Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Da jedes offene Intervall Q schneidet ist jeder Punkt in $\mathbb{R}$ Berührungspunkt von Q und $\bar{Q} = \mathbb{R}$.

Da aber jedes offene Intervall auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ schneidet hat Q keine inneren Punkte und $\overset{\circ}{Q} = \emptyset$.

Beispiel 1.7.8. Es gilt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C$ allerdings ist $\circ\mathbb{R} = \mathbb{R}$ und $\circ\mathbb{Q} \cup \circ\mathbb{Q}^C = \emptyset \cup \emptyset$. Wir können also in Bemerkung 1.7.4.2 nicht $\cup$ und $\cap$ vertauschen.

Definition 1.7.9. Sei $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\partial B := \{x \in X \mid \text{für alle } U \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } U \cap B \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus B)\} = \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}$$

den **Rand** von B . Es gilt $\partial B = \bar{B} \cap \overline{X \setminus B}$, jede Umgebung eines Randpunkts von B enthält also Punkte von B und des Komplements von B .

Beispiel 1.7.10. Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} = S^n$ die n -dimensionale *Sphäre*.

Definition 1.7.11. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset X$ liegt **dicht** in X , wenn der Abschluss von A gleich X ist, $\bar{A} = X$.
2. Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset X$ liegt **nirgends dicht**, wenn $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ gilt.

Beispiel 1.7.12. Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: es ist $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist nirgends dicht, denn $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ und $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$. Auch $A = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}$ nirgends dicht. Denn $\bar{A} = A \cup \{0\}$ und $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$.

Bemerkung 1.7.13. Es gilt in jedem metrischen Raum (X, d) mit $A \subset X$ dass $\bar{A}$ die Menge aller Grenzwerte in X von Folgen in A ist. Dies folgt aus Satz 1.7.6.

1.8 Basen, Subbasen, Umgebungsbasen

Wir führen nun Begriffe ein, die es uns erlauben, Topologien explizit anzugeben.

Definition 1.8.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn jedes $O \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung beliebig vieler $B_i \in \mathcal{B}$ ist.
2. Eine Familie $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{T}$, falls jedes $O \in \mathcal{T}$ eine beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen $S \in \mathcal{S}$ ist.

Wir erinnern uns hier, dass die leere Vereinigung die leere Menge ist und der leere Durchschnitt die gesamte Menge X ist.

Beispiele 1.8.2.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0, x \in X\}$ der offenen Kugeln eine Basis der Topologie. Denn sei $O \subset X$ offen. Finde für jedes $x \in O$ eine offene Kugel $B_{\epsilon(x)}(x) \subset O$ und schreibe $O = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon(x)}(x)$.
Schon die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ bilden eine Basis.
2. Die kofinale oder koendliche Topologie aus Beispiel 1.4.2.5 hat eine Subbasis $\mathcal{B} := \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$.
3. Eine Topologie $\mathcal{T}$ ist stets Basis für sich selbst.

Satz 1.8.3. *Jede Familie von Teilmengen $\mathcal{S}$ von X ist Subbasis einer Topologie $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$. $\mathcal{T}$ ist die größte Topologie die alle Elemente von $\mathcal{S}$ enthält, d.h. jede Topologie, die alle Elemente von $\mathcal{S}$ enthält ist feiner als $\mathcal{T}$.*

Beweis. Wir definieren $\mathcal{T}$ als die Menge aller beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Teilmengen in $\mathcal{S}$. Dann sind die Axiome für eine Topologie erfüllt. X ist der leere Schnitt und $\emptyset$ die leere Vereinigung. $\mathcal{T}$ ist per Definition unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

Man beachte nun, dass ein Schnitt von Vereinigungen selbst wieder eine Vereinigung von Schnitten ist da $\bigcup_i U_i \cap \bigcup_j U_j = \bigcup_{i,j} (U_i \cap U_j)$ gilt, oder allgemeiner:

$$\bigcap_{k \in K} \bigcup_{j_k \in J_k} U_{j_k} = \bigcup_{(j_k \in J_k)_{k \in K}} \bigcap_k U_{j_k}$$

Also ist $\mathcal{T}$ auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

Eine Basis dieser Topologie ist durch endliche Schnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ gegeben,

$$\mathcal{B} := \{S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } S_{i_k} \in \mathcal{S}\}$$

und die Topologie ist

$$\mathcal{T} := \{\bigcup_i B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Sei $\mathcal{T}'$ eine Topologie, die alle Mengen aus $\mathcal{S}$ enthält. Dann enthält $\mathcal{T}'$ auch alle Vereinigungen endlicher Schnitte von Elementen von $\mathcal{S}$ und damit $\mathcal{T}$. $\square$

Bemerkungen 1.8.4.

1. Nicht jede Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X ist Basis einer Topologie. Ein System von Teilmengen ist genau dann Basis einer Topologie wenn, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ gilt und wenn es für jedes $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{B}$ ein $W \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in W \subset U \cap V$ gilt.
2. Jede Basis ist auch eine Subbasis, aber nicht jede Subbasis ist eine Basis.

(Sub-)Basen ersparen Arbeit:

Satz 1.8.5. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Die folgenden Aussagen für eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ sind äquivalent:*

1. $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ ist stetig.
2. Für jede Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{T}'$ gilt: Für jedes $B' \in \mathcal{B}'$ ist $f^{-1}(B')$ offen, also $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$.

3. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{T}'$, für die gilt: Für jedes $B' \in \mathcal{B}'$ ist $f^{-1}(B')$ offen.
4. Für jede Subbasis $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{T}'$ gilt: Für jedes $S' \in \mathcal{S}'$ ist $f^{-1}(S')$ offen.
5. Es gibt eine Subbasis $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{T}'$, für die gilt: Für jedes $S' \in \mathcal{B}'$ ist $f^{-1}(S')$ offen.

Beweis. Es gilt (1) $\Rightarrow$ (2), (3), (4) und (5) da alle Elemente einer Basis oder Subbasis offen sind. Wir verwenden nur (1) $\Rightarrow$ (2) und (1) $\Rightarrow$ (4).

Die Implikation (4) $\Rightarrow$ (5) folgt unmittelbar, genauso (2) $\Rightarrow$ (3). Da jede Basis auch eine Subbasis ist folgt (3) $\Rightarrow$ (5).

Für (5) $\Rightarrow$ (1) sei $\mathcal{S}'$ eine Subbasis wie in 5. Schreibe eine beliebige offene Menge $U \subset X'$ als Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von $\mathcal{S}'$. Dann ist $f^{-1}(U)$ Vereinigung der endlichen Schnitte der offenen Urbilder, und damit nach Definition selbst offen. $\square$

Definition 1.8.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ der Mengen aller Umgebungen von x heißt **Umgebungsbasis** von x , falls in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ liegt mit $x \in B \subset U$.

Insbesondere sind die Elemente einer Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ Umgebungen von x .

Beispiel 1.8.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann bilden die offenen Kugeln $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x .

Beispiel 1.8.8. Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit Basis $\mathcal{B}$ und jeden Punkt $x \in X$ ist das System von Teilmengen $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von x . Sei $U \ni x$ eine Umgebung. Es gibt also eine offene Menge $x \in O \subset U$, und nach Annahme gilt $O = \cup_{i \in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{B}$. Wenigstens eine offene Menge O_i enthält x , also $O_i \in \mathcal{B}(x)$ und es ist $O_i \subset U$.

Satz 1.8.9. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ für alle $U \in \mathcal{B}(f(x))$, wobei $\mathcal{B}(f(x))$ eine Umgebungsbasis des Bildes $f(x)$ ist.

Beweis. Ist f in $x \in X$ stetig, so sind nach Definition die Urbilder von Umgebungen des Bildes $f(x)$ Umgebungen von x , also insbesondere die Urbilder der Mengen in der Umgebungsbasis $\mathcal{B}(f(x))$.

Umgekehrt sei U eine beliebige Umgebung von $f(x)$. U enthält eine Umgebung $B \in \mathcal{B}(f(x))$. Wir haben $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(B)$ ist nach Voraussetzung eine Umgebung von x . Deswegen ist auch $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x . $\square$

1.9 Initialtopologie und Produkt

Wir wollen uns nun der Konstruktion neuer topologischer Räume aus alten zuwenden. Wenn wir eine Familie von Mengen $\{A_i\}_{i \in I}$ haben, können wir zum Beispiel das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ oder die disjunkte Vereinigung $\coprod_{i \in I} A_i$ bilden.

Wir wenden uns zuerst dem Produkt zu. Wenn wir die gleiche Konstruktion mit topologischen Räumen $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ durchführen wollen, dann können wir $\prod_i X_i$ als zugrunde legende Menge verwenden. Aber welche Topologie verwenden wir?

Wir erinnern uns, dass das Produkt $\prod_i X_i$ natürliche Projektionen $\pi_i : \prod_i X_i \rightarrow X_i$ zu all seinen Faktoren hat. All diese Projektionen sollten stetig sein.

Wir definieren:

Definition 1.9.1. Gegeben sei eine Menge M , eine Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ und eine Familie von Abbildungen $(f_i : M \rightarrow X_i)_{i \in I}$. Die **Initialtopologie** auf M bezüglich der Familie $(f_i)_{i \in I}$ ist die grösste Topologie, so dass alle f_i stetig sind.

Wir müssen natürlich zeigen, dass eine solche Topologie existiert.

Warum haben wir die grösste Topologie gewählt und nicht die feinste? Die feinste Topologie auf M ist die diskrete Topologie. Sie macht offensichtlich alle f_i stetig und enthält gleichzeitig keinerlei Informationen über die f_i .

Beispiel 1.9.2. Die Unterraumtopologie auf $U \subset X$ aus Definition 1.6.1 ist die Initialtopologie bezüglich der Inklusion $U \rightarrow X$.

Der folgende Satz rechtfertigt unsere Definition. Man beachte, dass dies eine Verallgemeinerung von Satz 1.6.2 ist.

Satz 1.9.3. *Mit Notation wie in Definition 1.9.1 gilt: Die Initialtopologie auf M ist eindeutig definiert und hat die Subbasis*

$$\mathcal{S} := \cup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Überdies gilt die folgende universelle Eigenschaft: Ist T ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : T \rightarrow M$ genau dann stetig, wenn die Kompositionen $f_i \circ g : T \rightarrow X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind,

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & (M, \mathcal{T}) \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{array}$$

Die Initialtopologie wird von dieser universellen Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Man könnte die Initialtopologie auch direkt mit der universellen Eigenschaft definieren. Aber auch dann muss die Existenz gezeigt werden. Wir haben die offenen Mengen über eine Subbasis definiert, also ist die Existenz klar, aber die universelle Eigenschaft muss gezeigt werden.

Beweis. Die Initialtopologie $\mathcal{T}$ muss sicher die Mengen in der Subbasis $\mathcal{S}$ enthalten, denn andernfalls wäre eine der f_i nicht stetig. Nach Satz 1.8.3 gibt es eine grösste solche Topologie, nämlich $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$.

Es bleibt zu zeigen, dass die durch $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie die universelle Eigenschaft erfüllt. Klar ist eine Richtung: wenn $g : T \rightarrow (M, \mathcal{T})$ stetig ist, so ist die Verkettung $f_i \circ g$ stetig.

Seien also umgekehrt die Abbildungen $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig. Wir müssen wegen Satz 1.8.5 zeigen, dass für jedes $S \in \mathcal{S}$ die Menge $g^{-1}(S)$ offen in T ist. Nun ist aber für ein $i \in I$ und $O_i \in \mathcal{T}_i$ die Menge $S = f_i^{-1}(O_i)$. Dann ist

$$g^{-1}(S) = g^{-1}f_i^{-1}(O_i) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i)$$

offen, da $f_i \circ g$ stetig ist.

Für die Eindeutigkeit betrachten wir wie im Beweis von Satz 1.6.3 die Identitätsabbildung von $(M, \mathcal{T})$ nach $(M, \mathcal{T}')$ wobei $\mathcal{T}'$ eine zweite Topologie mit der universellen Eigenschaft ist. Da all $f \circ \text{id}$ stetig sind ist es auch die Identitätsabbildung und das Gleiche gilt für $\text{id}' : (M, \mathcal{T}') \rightarrow (M, \mathcal{T})$. $\square$

Wir kehren zurück zum kartesischen Produkt von Mengen. Für eine beliebige Familie X_i von Mengen ist $\prod_{i \in I} X_i$ die Menge, deren Elemente Familien $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen mit $x_i \in X_i$ sind. Es existiert für jedes i eine Projektion

$$\begin{aligned} \pi_i : \prod_{j \in I} X_j &\rightarrow X_i \\ (x_j)_{j \in I} &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist T eine beliebige Menge, so gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen $f : T \rightarrow \prod_{j \in I} X_j$ und Familien von Abbildungen $(f_i : T \rightarrow X_i)_{i \in I}$,

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \prod_{j \in I} X_j \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, \prod_{j \in I} X_j) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Hom}(T, X_j) \\ f &\mapsto (\pi_j \circ f)_{j \in I}. \end{aligned}$$

Hier steht $\text{Hom}(-, -)$ für die Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen. Die Umkehrabbildung schickt die Familie $(f_i)_{i \in I}$ auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f : T &\rightarrow \prod_{j \in I} X_j \\ t &\mapsto (\dots, f_j(t), \dots) \end{aligned}$$

Wir beschreiben also die Menge $\prod_{j \in I} X_j$ dadurch, dass wir die Abbildungen aus einer beliebigen Menge T in das kartesische Produkt $\prod_{j \in I} X_j$ hinein beschreiben.

Definition 1.9.4. Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Initialtopologie auf der Menge $X := \prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Projektionen $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ heißt die **Produkttopologie** auf X .

Die universelle Eigenschaft der Produkttopologie bedeutet, dass wir, wie in der Analysis, Abbildungen komponentenweise auf Stetigkeit prüfen können.

Satz 1.9.5. Die Produkttopologie $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$ hat die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{T}_i, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

Beweis. Nach Satz 1.9.3 hat die Produkttopologie eine Subbasis bestehend aus den $\pi^{-1}(O_i)$ für $O_i \in \mathcal{T}_i$. Es gilt

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \prod_{j \in I} O_j \quad \text{mit} \quad O_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ O_i & \text{für } j = i \end{cases}$$

Die Basis besteht also nach Satz 1.8.3 aus den endlichen Schnitten dieser Mengen. Wir betrachten eine beliebige endliche Familie offener Mengen in den X_i , die wir als $\{O_{aj}\}_{a \in A(j), j \in J}$ schreiben mit $O_{aj} \in \mathcal{T}_j$. Endlich heißt insbesondere, dass J und alle $A(j)$ endlich sind. Dann gilt

$$\bigcap_{a \in A(j), j \in J} \pi_j^{-1}(O_{aj}) = \prod U_i \quad \text{mit} \quad U_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \notin J \\ \bigcap_{a \in A(j)} O_{aj} \in \mathcal{T}_j & \text{für } j \in J \end{cases}$$

Da J endlich ist sind damit die endlichen Schnitte der Subbasis genau die Elemente von $\mathcal{B}$. $\square$

Satz 1.9.6. *Sei weiterhin $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Es gibt eine Bijektion zwischen Familien stetiger Funktionen $(f_i : T \rightarrow X_i)_{i \in I}$ und stetigen Funktion $f : T \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$.*

Beweis. Wir haben eine Bijektion von Funktionen aufgrund der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts von Mengen, insbesondere definieren wir

$$f(t) = (\dots, f_i(t), \dots).$$

Es bleibt, zu prüfen, dass f genau dann stetig ist, wenn alle f_i stetig sind. Da für alle $i \in I$ gilt dass $\pi_i \circ f = f_i$ folgt dies aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie aus Satz 1.9.3. $\square$

Beispiele 1.9.7.

1. $\mathbb{R}^n$ wird mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ versehen. Die Basis besteht aus offenen Quadern. Man prüft leicht, dass die Produkttopologie mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.
2. Sei für jedes $i \in I$ eine Teilmenge $\iota_i : A_i \subset X_i$ gegeben. Einerseits können wir A_i mit der Unterraumtopologie versehen und dann auf dem Produkt $A = \prod_{i \in I} A_i$ der topologischen Räume die Produkttopologie $\mathcal{T}_{\prod A_i}$ betrachten.

Andererseits ist $\iota : A \subset \prod_{i \in I} X_i$ eine Teilmenge. Versehen wir $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie, so hat die Teilmenge nach Definition 1.6.1 eine Unterraumtopologie $\mathcal{T}_{\prod X_i | \prod A_i}$. Beide Topologien sind gleich,

$$\mathcal{T}_{\prod A_i} = \mathcal{T}_{\prod X_i | \prod A_i}.$$

denn Sie erfüllen die universelle Eigenschaft für die Abbildungen $\pi_i^X \circ \iota = \iota_i \circ \pi_i^A : A \rightarrow X_i$, wobei wir $\pi_i^A : A \rightarrow \prod A_i$ und $\pi_i^X : \prod X_i \rightarrow X_i$ für die Projektionen schreiben.

3. Insbesondere ist mit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ der n -**Torus** $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$ in natürlicher Weise ein topologischer Raum.

4. Sei X_i für alle $i \in I$ ein diskreter topologischer Raum mit $|X_i| > 1$. Dann ist die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann diskret, wenn I endlich ist.

Denn ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$ endlich, so ist $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$ mit beliebigen Teilmengen

$$O_i \in \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X_i)$$

eine Basis der Topologie von $\prod_{j \in I} X_j$. Somit ist $\mathcal{T}_{\prod_{i \in I} X_i} = \mathcal{P}(\prod_{i \in I} X_i)$ und die Topologie auf dem Produkt ist diskret.

Ist dagegen I unendlich, so treten in der Basis der Produkttopologie nur Mengen der Form $\prod O_i$ mit $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ auf. Nur Mengen dieser Form sind offen, die Topologie kann daher nicht diskret sein.

5. Was passiert, wenn unsere Indexmenge I leer ist? Diese Frage ist nicht so uninteressant, wie sie klingt. Die folgende Diskussion gilt für topologische Räume genau wie für Mengen.

Die Menge $\prod_{\emptyset}$ hat genau ein Element, nämlich die leere Familie $()$. Die universelle Eigenschaft besagt, dass wir für jede Menge T mit Funktionen $\{f_i : T \rightarrow X_i\}_{i \in \emptyset}$ eine eindeutige Funktion $T \rightarrow \prod X_i$ haben. Die Bedingung über Funktionen ist aber leer, also muss es für jede Menge T genau eine Funktion $T \rightarrow \prod_{\emptyset}$ geben. Diese universelle Eigenschaft erfüllt die Menge mit einem Element.

1.10 Finaltopologie und Summe

Dual zum Begriff der Initialtopologie ist der Begriff der Finaltopologie.

Definition 1.10.1. Gegeben sei eine Menge M , eine Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ und eine Familie von Abbildungen $(f_i : X_i \rightarrow M)_{i \in I}$. Die **Finaltopologie** auf M bezüglich $(f_i)_{i \in I}$ ist die feinste Topologie so dass alle f_i stetig sind.

Der folgende Satz ist Dual zu Satz 1.9.3.

Satz 1.10.2. Auf M gibt es bezüglich $(f_i)_{i \in I}$ eine eindeutig bestimmte Finaltopologie. Die offenen Mengen sind

$$\mathcal{T} := \{O \subset M \quad \text{so dass} \quad f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \quad \text{für alle } i \in I \}.$$

Die Finaltopologie erfüllt die folgende universelle Eigenschaft (und wird eindeutig von ihr bestimmt): Ist T ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : M \rightarrow T$ genau dann stetig, wenn $g \circ f_i : X_i \rightarrow T$ für alle $i \in I$ stetig ist,

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{g} & T \\ f_i \uparrow & \nearrow g \circ f_i & \\ (X_i, \mathcal{T}_i) & & \end{array}$$

Beweis. Die Finaltopologie $\mathcal{T}$ ist eine Topologie da alle Urbilder mit Schnitten und Vereinigungen kommutieren. Sei $\mathcal{T}'$ eine andere Topologie, so dass alle f_i

stetig. Sei $U \in \mathcal{T}'$, dann sind alle $f_i^{-1}(U)$ offen, also ist $U \in \mathcal{T}$, also ist $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}'$.

Wir beweisen die universelle Eigenschaft. Wenn $g : T \rightarrow (M, \mathcal{T})$ stetig ist, so sind die Verkettungen $g \circ f_i$ stetig.

Seien umgekehrt die Abbildungen $g \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig. Sei $O \in \mathcal{T}$. Wir müssen zeigen, dass $g^{-1}(O)$ offen ist. Per Definition reicht es zu zeigen, dass alle $f_i^{-1}g^{-1}(O)$ offen sind, was aus der Stetigkeit der $g \circ f_i$ folgt.

Eindeutigkeit folgt wieder wie in 1.6.3 durch Betrachtung der Identitätsabbildung zwischen zwei verschiedenen Topologien auf M . $\square$

Als nächstes erinnern wir an den Begriff aus der Mengenlehre, der dual zum kartesischen Produkt von Mengen ist.

Gegeben sei eine Familie von Mengen $(X_j)_{j \in I}$. Bilde die Familie von Mengen

$$X'_j := \{(x_j, j) \mid x_j \in X_j\} = X_j \times \{j\}.$$

Dann ist die **disjunkte Vereinigung** die Menge

$$\coprod_{j \in I} X_j := \cup_{j \in I} X'_j.$$

Sie kommt mit Injektionen

$$\begin{aligned} \iota_i : X_i &\rightarrow \coprod_{j \in I} X_j \\ x_i &\mapsto (x_i, i) \in X'_i, \end{aligned}$$

für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist T eine beliebige Menge, gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen $f : \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow T$ und Familien von Abbildungen $(f_i : X_i \rightarrow T)_{i \in I}$,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in I} X_j & \xrightarrow{f} & T \\ \iota_i \uparrow & \nearrow f_i & \\ X_i & & \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\coprod_{j \in I} X_j, T) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Hom}(X_j, T) \\ f &\mapsto (f \circ \iota_j)_{j \in I} \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung schickt eine Familie $(f_j)_{j \in I}$ auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \coprod_{j \in I} X_j &\rightarrow T \\ (x_j, j) &\mapsto f_j(x_j) \end{aligned}$$

Wir beschreiben also die Menge $\coprod_{j \in I} X_j$ dadurch, dass wir die Abbildungen aus $\coprod_{j \in I} X_j$ heraus in eine beliebige Menge T hinein beschreiben. Die disjunkte Vereinigung ist also dual zum Produkt. Wer werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

Definition 1.10.3 (Topologische Summen). Gegeben seien topologische Räume $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$. Die Topologie auf der disjunkten Vereinigung $X = \coprod_{i \in I} X_i$ mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid \iota_j^{-1}(O) \in \mathcal{T}_j \text{ für alle } j \in I\}$$

heißt **Summentopologie** auf X .

Zur Notation: Indem man stillschweigend X_j mit $\iota_j(X_j) \subset X$ identifiziert schreibt man in solchen Situationen oft auch $O \cap X_j$ statt $\iota_j^{-1}(O)$.

Es folgt direkt aus Satz 1.10.2, dass die Summentopologie genau die Finaltopologie auf $\coprod_{j \in I} X_j$ ist.

Beispiele 1.10.4. 1. Ein diskreter topologischer Raum X ist eine direkte Summe seiner Punkte, $X \cong \coprod_X *$.

2. Es gilt $[0, 1] \amalg [0, 1] \cong [0, 1] \cup [2, 3]$ wobei der zweite Raum als Unterraum von $\mathbb{R}$ betrachtet wird und der erste Raum als abstrakte Summe von zwei Intervallen.

Satz 1.10.5 (Universelle Eigenschaft der direkten Summe). *Seien $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in I}$ und $(T, \mathcal{S})$ topologische Räume. Es gibt eine Bijektion zwischen Familien stetiger Abbildungen $(g_j : X_j \rightarrow T)_{j \in I}$ und stetigen Abbildung $g : X = \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow T$ mit $g_j = g \circ \iota_j$.*

Beweis. Die Bijektion von Funktionen existiert für Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft der disjunkten Vereinigung von Mengen. Wegen der universellen Eigenschaft der Finaltopologie ist g stetig genau wenn alle $g \circ \iota_j$ stetig sind. $\square$

Die leere Vereinigung $\coprod_\emptyset$ ist die leere Menge (mit ihrer trivialen Topologie), dies erfüllt Satz 1.10.5 da es immer genau eine Funktion von der leeren Menge gibt.

Bemerkung 1.10.6. Sei X ein topologischer Raum, der als Menge eine disjunkte Vereinigung von Untermengen ist, $X = \dot{\cup}_{i \in I} X_i$, die alle offen in X sind. (Wegen $X_j = X \setminus \cup_{i \neq j} X_i$ ist dann auch jedes X_i abgeschlossen in X .) Dann ist die Abbildung $X \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$, die $x_i \in X_i$ auf $(x_i, i) \in \coprod_{i \in I} X_i$ schickt, injektiv, surjektiv, stetig und offen. Also ist X als topologischer Raum homöomorph zur Summe $X \cong \coprod_{i \in I} X_i$.

Die Annahme, dass alle X_i offen sind ist notwendig. $[0, 1] \amalg (1, 2]$ ist nicht homöomorph zu $[0, 2]$. Die Aussage ist scheinbar offensichtlich, aber nicht ganz trivial zu beweisen. Man sieht leicht, dass $[0, 1] \amalg (1, 2]$ homöomorph zu $[0, 1] \cup (2, 3] \subset \mathbb{R}$ ist. Wenn es also eine stetige Surjektion von $[0, 2]$ nach $[0, 1] \amalg (1, 2]$ gibt, dann gibt es durch Verknüpfung eine stetige Funktion $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ deren Bild 0 und 3 enthält, nicht aber 2. Das widerspricht dem Zwischenwertsatz.

Wir werden bald zahlreiche Techniken entwickeln, die solche Beweise einfacher machen.

1.11 Quotientenräume

Wir wenden uns nun dem dualen Konzept zur Unterraumtopologie zu.

Definition 1.11.1. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Sei $\pi : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion. Die Finaltopologie auf $X/\sim$ bezüglich π heißt **Quotiententopologie** $\mathcal{T}_\sim$ und $X/\sim$ heißt **Quotientenraum** von X bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$.

Es ist also $O \subset X/\sim$ nach Satz 1.10.2 genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(O)$ offen in X ist.

Aus Satz 1.10.2 folgt auch sofort:

Satz 1.11.2. Sei $\pi : X \rightarrow X/\sim$ wie in Definition 1.11.1. Die Abbildung $f : X/\sim \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi$ stetig ist.

Auch wenn duale Begriffe formal sehr ähnlich sind, gilt dennoch zu beachten: Die Beispiele, die aus dualen Phänomenen erwachsen können, sehr unterschiedlich sein. Psychologisch fällt uns oft ein Konzept deutlich leichter als sein Duales. Die meisten von uns finden Untergruppen und Unterräume freundlicher als Quotientengruppen und Quotientenräume. Aber zahlreiche interessante Beispiele für topologische Räume treffen wir zuerst als Quotientenräume.

Beispiel 1.11.3. Betrachte auf $X = \mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ für $\mathbb{R}/\sim$ und sehen, dass $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist stetig und faktorisiert durch $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie (Satz 1.11.2) ist die induzierte Funktion $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, und nach der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie (Satz 1.6.2) auch $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Da $\bar{f}$ bijektiv ist, müssen wir nur noch prüfen, dass es offen ist. Aber das ist ersichtlich.

Definition 1.11.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ nicht leer. Betrachte die Äquivalenzrelation mit $a \sim_A a'$ falls $a, a' \in A$, und $(x \sim_A x)$ für alle x . Dann setze

$$X/A := X/\sim_A.$$

Wir setzen $X/\emptyset = X \amalg \{*\}$.

Im Quotientenraum X_A werden also alle Punkte der Teilmenge $A \subset X$ zu einem Punkt identifiziert (selbst wenn es keine Punkte in A gibt). Damit hat X/A immer einen ausgezeichneten Punkt.

Wir beachten, dass dies mit der Notation in Beispiel 1.11.3 in Konflikt steht, und ignorieren diesen Punkt vorerst.

Beispiele 1.11.5.

1. Seien X, Y topologische Räume und Punkte $x_0 \in X, y_0 \in Y$ gewählt. Dann betrachte $A := \{x_0, y_0\} \subset X \amalg Y$. Dann heißt

$$X \vee Y := X \amalg Y/A = X \amalg Y/x_0 \sim y_0$$

das **Bouquet** oder die **verbundene Summe** oder die **Einpunktvereinigung** oder das **Wedge-Produkt** von X und Y . Es hängt im Allgemeinen von der Wahl der Punkte x_0, y_0 ab.

Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ eine Figur von der Form zweier sich berührender Kreise, also eine 8.

2. Der Quotient $\mathbb{D}^2/\partial\mathbb{D}^2$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^2$.

Man kann dies zum Beispiel sehen, indem man $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ erst durch stereografische Projektion nach $\mathbb{R}^2$ und dann in das Innere von $\mathbb{D}^2$ schickt.

N wird mit dem Punkt ∞ identifiziert, der ∂D repräsentiert. Diese Abbildung ist bijektiv.

Es ist noch Stetigkeit zu prüfen, wobei vor allem Stetigkeit in N bzw. $\infty = [\partial D]$ interessant ist. Es reicht, die Komplemente der offenen Umgebungen von N und $[\partial D]$ zu identifizieren. Die Komplemente der offenen Umgebungen von N sind genau die abgeschlossenen Teilmengen, die disjunkt von N sind. Genauso sind die Komplemente der offenen Umgebungen von $[\partial D]$ die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{D}^2$, die disjunkt von $\partial \mathbb{D}^2$ sind. Diese Mengen werden von der stereographischen Projektion identifiziert.

3. Als Quotienten des Quadrates $[0, 1]^2$ mit verschiedenen Orientierungen der Seiten finden wir den Zylinder, das Möbiusband, den Torus, die Kleinsche Flasche und die reelle projektive Ebene (siehe dazu auch Beispiel 5).

Den Torus haben wir schon als $(\mathbb{S}^1)^2$ kennengelernt, einen Beweis der Äquivalenz reichen wir später nach.

4. Seien X, Y mit Punkten $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ wie in 1. gewählt. Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, y_0) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Y & \rightarrow & X \times Y \\ y & \mapsto & (x_0, y) \end{array}$$

induzieren eine Abbildung $X \amalg Y \rightarrow X \times Y$, die x_0 und y_0 auf den gleichen Punkt (x_0, y_0) schickt, sonst aber injektiv ist und daher eine Injektion

$$X \vee Y \rightarrow X \times Y .$$

Dann heißt der topologische Raum $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$ das **Smashprodukt** von X und Y .

Wir überlegen uns als Beispiel das Smashprodukt $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$. Das Produkt $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist ein zweidimensionaler Torus, die Teilmenge $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ darin sind ein Meridian und eine Länge, die sich in einem Punkt schneiden. Kontrahiert man diese auf einen Punkt, so erhält man die Sphäre $\mathbb{S}^2$, das folgt aus Beispielen 2 und 3.

Allgemeiner gilt $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}$.

5. Betrachte die auf $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ von $x \sim -x$ erzeugte Äquivalenzrelation. Der Raum $\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$ heißt **projektive Ebene**.

Betrachte auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $x \approx y$, falls es $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $x = \lambda y$. Ähnlich betrachte auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation mit $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$, bei der antipodale Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe identifiziert werden. Dann gilt

$$\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \approx \cong \mathbb{D}^2 / \sim .$$

Man kann direkt zeigen, dass die natürlichen Abbildungen Homöomorphismen sind. Zum Beispiel induziert die natürliche Einbettung $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Bijektion j der Quotienten. Da

$\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ stetig ist, folgt aus der universellen Eigenschaft der Quotientientopologie (Satz 1.10.2), dass auch j stetig ist. Man kann nun entweder direkt prüfen, dass j auch offen ist, oder mithilfe der Funktion $x \mapsto x/||x||$ ein Inverses von j konstruieren (das wieder nach der universellen Eigenschaft stetig ist).

6. Definiere auf $X := \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ die Äquivalenzrelation $(x, 1) \sim (x, -1)$ für $x \neq 0$. (Aber $(0, 1)$ und $(0, -1)$ sind nicht äquivalent.) Der Quotientenraum ist eine "Gerade mit zwei Ursprüngen". Man kann die beiden Punkte $(0, -1)$ und $(0, 1)$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

1.12 Hausdorffsche Räume

Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist, dass es genug offene Mengen gibt, um alle Punkte voneinander zu unterscheiden.

Definition 1.12.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorff-Raum** oder **Hausdorffscher Raum** wenn es für jedes Paar von verschiedenen Punkten $x, y \in X$ Umgebungen $x \in U$ und $y \in V$ gibt so dass $U \cap V = \emptyset$.

Die Hausdorff-Eigenschaft ist ein Beispiel für eine **Trennungseigenschaft**. Es gibt zahlreiche weitere, die aber deutlich weniger bedeutsam sind.

Satz 1.12.2. *Jeder metrisierbare Raum ist ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Wähle ϵ kleiner als die Hälfte des Abstandes der beiden Punkte. Dann sind die ϵ -Umgebungen der Punkte disjunkt. $\square$

Wir haben in Übungsaufgabe 2.3 gesehen, dass in Hausdorff-Räumen Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, was in allgemeinen topologischen Räumen nicht gilt.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir erinnern uns aus Kapitel 1.9, dass $X \times X$ mit der Produkttopologie wieder ein topologischer Raum ist. Wir können Hausdorff-Räume auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 1.12.3. *Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale*

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times X$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis. Es ist $x \neq y$ genau dann, wenn $(x, y) \notin \Delta$. Die Diagonale Δ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \times X \setminus \Delta$ offen ist, d.h. wenn es für jedes $(x, y) \notin \Delta$ offene Mengen O_1, O_2 gibt mit $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset X \times X \setminus \Delta$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $x \in O_1, y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann ist aber X nach Definition Hausdorffsch. $\square$

Satz 1.12.4. *Ist ein topologischer Raum X Hausdorffsch, so ist auch jede Teilmenge $Y \subset X$ mit der induzierten Topologie Hausdorffsch.*

Beweis. Sei X Hausdorffsch, $Y \subset X$ und $x_1, x_2 \in Y$ mit $x_1 \neq x_2$. Da X Hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann sind $U'_i := U_i \cap Y$ Umgebungen von x_i im Unterraum Y und auch disjunkt, $U'_1 \cap U'_2 = \emptyset$. $\square$

In Beispiel 1.11.5.6 haben wir gesehen (auch wenn wir das Vokabular noch nicht kannten), dass der Quotient eines Hausdorffschen Raumes nicht Hausdorff sein muss. Es gilt aber:

Satz 1.12.5. *Sei X ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \notin A$ disjunkte offene Mengen U und V gibt mit $x \in U$ und $A \subset V$. Dann ist X/A Hausdorffsch.*

Beweis. Seien $x, y \in X/A$ verschiedene Punkte. Sind beide vom Punkt $[A]$ verschieden, so betrachte die eindeutigen Repräsentanten in X und disjunkte Umgebungen in X , die A nicht treffen. (Dies ist möglich da wir stets mit der offenen Umgebung von x schneiden können, die $X \setminus A$ nicht trifft.)

Die Bilder dieser Umgebungen in X/A trennen die Punkte. Ist einer der Punkte $y = [A]$, so benutzen wir die Annahme, um das Urbild von x und A in X durch offenen Umgebungen zu trennen. $\square$

Wir können nun eine wichtige Klasse von topologischen Räumen definieren.

Definition 1.12.6. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffscher Raum $(X, \mathcal{T})$ mit einer abzählbaren Basis (man sagt auch X erfüllt AZ2), der überdies die folgende Eigenschaft erfüllt: Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U \subset X$, die homöomorph zur offenen Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiele sind $\mathbb{R}^n$ selbst, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, der n -torus $(\mathbb{S}^1)^{\times n}$ oder die projektive Ebene $\mathbb{R}P^n$ aus Beispiel 1.11.5.5.

1.13 Zusammenhang

Definition 1.13.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

Ein topologischer Raum ist also nicht zusammenhängend, wenn er disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist und zusammenhängend, wenn er nicht nicht zusammenhängend ist.

Bemerkung 1.13.2. Es gibt die folgenden äquivalenten Charakterisierungen. Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ ist zusammenhängend ...

1. wenn X nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener Teilmengen ist.
2. wenn, immer wenn $X = K_1 \cup K_2$ mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ sowie K_1 und K_2 beide offen (oder beide abgeschlossen), dann gilt $K_1 = \emptyset$ oder $K_2 = \emptyset$.
3. wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Beispiele 1.13.3. 1. Eine Menge X mit diskreter Topologie ist nicht zusammenhängend, falls sie mehr als ein Element hat.

2. $[0, 1] \cup [2, 3]$ ist nicht zusammenhängend, da $[0, 1]$ und $[2, 3]$ offene Teilmengen sind.

Korollar 1.13.4 (Zwischenwertsatz). Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, Y ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist das Bild $f(X) \subset Y$ zusammenhängend.

Beweis. Angenommen, das Bild $f(X)$ lässt sich schreiben als disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen in $f(X)$, $f(X) = O_1 \dot{\cup} O_2$. Dann gilt auch $X = f^{-1}(O_1) \dot{\cup} f^{-1}(O_2)$ mit nicht-leeren offenen Mengen, im Widerspruch zur Annahme, dass X zusammenhängend ist $\square$

Insbesondere ist ein zu einem zusammenhängenden Raum homöomorpher Raum zusammenhängend, Zusammenhang ist also eine topologische Eigenschaft.

Satz 1.13.5. Das Intervall $[0, 1]$ mit der von der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist zusammenhängend.

Da je zwei abgeschlossene Intervalle homöomorph sind, sind alle abgeschlossenen Intervalle zusammenhängend.

Beweis. Angenommen, wir finden eine Zerlegung $[0, 1] = K_0 \amalg K_1$, mit K_0, K_1 offen und nicht-leer. Wir können $1 \in K_1$ annehmen. Weil K_1 offen ist, liegt eine Umgebung von 1 in K_1 , also ist $s := \sup K_0 < 1$.

Angenommen $s \in K_0$. Dann finde, weil K_0 offen ist, ein offenes Intervall $B_\epsilon(s) \subset K_0$. Dann ist aber $s + \frac{\epsilon}{2} \in K_0$ und s nicht das supremum von K_0

Angenommen, $s \in K_1$. Dann finde, weil K_1 offen ist, eine Umgebung $B_\epsilon(s) \subset K_1$ von s . Dann kann aber s nicht das supremum von K_0 sein, weil alle Elemente von K_0 kleiner als $s - \frac{\epsilon}{2}$ sind. $\square$

Aus unseren Ergebnissen folgt nun:

Korollar 1.13.6 (Klassischer Zwischenwertsatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Für jedes ζ mit $f(a) < \zeta < f(b)$ gibt es wenigstens ein $t \in [a, b]$ mit $f(t) = \zeta$.

Beweis. Andernfalls zerlege das Bild

$$f([a, b]) = (f([a, b]) \cap (-\infty, \zeta)) \dot{\cup} (f([a, b]) \cap (\zeta, \infty))$$

in disjunkte nicht-leere offene Teilmengen. Aber nach Satz 1.13.5 ist $[a, b]$ zusammenhängend und nach Korollar 1.13.4 damit auch $f([a, b])$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Das folgende Lemma ist oft sehr hilfreich zur Charakterisierung zusammenhängender Räume.

Lemma 1.13.7. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion von X in den diskreten Raum $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ konstant ist.

Beweis. Ist X nicht zusammenhängend, schreibe $X = A \dot{\cup} (X \setminus A)$ mit A und $X \setminus A$ offen und abgeschlossen. Dann ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbf{2}$ mit $f|_A = 0$ und $f|_{X \setminus A} = 1$ nicht konstant auf X , aber stetig, weil die Urbilder offener Mengen offen sind.

Umgekehrt gebe es eine nicht-konstante stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbf{2}$. Dann ist X die Vereinigung der disjunkten nichtleeren offenen Mengen $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(1)$. $\square$

In Lemma 1.13.7 und seinem Beweis können wir $\mathbf{2}$ mit einer beliebigen diskreten Menge ersetzen, zum Beispiel den ganzen Zahlen.

Korollar 1.13.8. *Ist ein topologischer Raum X von einer Familie (X_j) zusammenhängender Unterräume überdeckt und sind je zwei X_j nicht disjunkt, so ist auch X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow \mathbf{2}$ eine beliebige stetige Funktion. Dann ist $f|_{X_i}$ für alle i nach Lemma 1.13.7 konstant, weil jedes X_i zusammenhängend ist. Da die X_i nicht disjunkt sind, muss f auf ganz X konstant sein. Wiederum nach Lemma 1.13.7 ist daher X zusammenhängend. $\square$

Beispiele 1.13.9.

1. Der topologische Raum $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend. Denn wähle als nicht-disjunkte Überdeckung $(X_j = [-j, j])_{j \in \mathbb{N}}$. Die abgeschlossenen Intervalle sind nach Satz 1.13.5 zusammenhängend.
2. Da nach Beispiel 1.5.5.1 jedes offene Intervall zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist, sind auch offene Intervalle zusammenhängend.
3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als Unterraum der reellen Zahlen sind nicht zusammenhängend. Sei $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann schreibe

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \zeta)) \dot{\cup} (\mathbb{Q} \cap (\zeta, \infty)) .$$

Die Dedekindschen Schnitte zerteilen also $\mathbb{Q}$ in disjunkte offene Mengen.

4. Der Kreis $\mathbb{S}^1$ ist als Bild der nach Beispiel 1.13.9.1 zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

nach dem Zwischenwertsatz 1.13.4 zusammenhängend.

Da Zusammenhang invariant unter Homöomorphie ist, sehen wir leicht dass z.B. $(0, 1) \amalg (1, 2)$ nicht homöomorph zu $(0, 1)$ ist.

Wir können mit einem Trick mehr zeigen.

Satz 1.13.10. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ ein Homöomorphismus und $A \subset X$. Dann ist $X \setminus A \cong Y \setminus f(A)$.*

Beweis. Die Restriktion von f ist eine Bijektion und ist stetig da $X \setminus A \hookrightarrow X$ stetig ist. Wir zeigen, dass $f|_{X \setminus A}$ auch offen ist. Sei also $U \subset X \setminus A$ offen, es gibt also $U' \subset X$ offen mit $U' \cap (X \setminus A) = U$. Dann ist $f(U')$ offen in Y . Da f bijektiv ist gilt $f(U) = f(U') \cap (Y \setminus f(A))$ und ist damit offen. $\square$

Korollar 1.13.11. *Keine zwei der Räume $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ und $\mathbb{S}^1$ sind homöomorph.*

Beweisidee. Angenommen $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist es nach Satz 1.13.10 auch die Einschränkung $f' : [0, 1/2) \cup (1/2, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus f(\frac{1}{2})$.

Aber die rechte Seite ist durch die Exponentialfunktion homöomorph zu $(0, 1)$, und damit zusammenhängend. Die linke Seite hingegen ist nicht zusammenhängend. Die anderen Beweise sind ähnlich, siehe Übungsblatt. $\square$

Satz 1.13.12. Auf der Menge der Punkte eines topologischen Raumes X führen wir die folgende Relation ein: $x \in X$ hängt mit $y \in X$ zusammen, in Zeichen $x \sim y$, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $C \subset X$ gibt, die x und y enthält, $x, y \in C$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Relation ist offensichtlich symmetrisch und sie ist reflexiv, da $C = \{x\}$ zusammenhängend ist. Um zu sehen, dass sie transitiv ist, finde für $x, y, z \in X$ zusammenhängende Mengen C_1, C_2 mit $x, y \in C_1$ und $y, z \in C_2$. Dann ist $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, so dass aus Korollar 1.13.8 folgt, dass die Vereinigung $C_1 \cup C_2$ zusammenhängend ist; offenbar ist $x, z \in C_1 \cup C_2$. $\square$

Definition 1.13.13. Sei X ein topologischer Raum. Die Äquivalenzklasse $Z(x)$ von $x \in X$ unter der Äquivalenzrelation “hängt zusammen” heißt die **Zusammenhangskomponente** von x .

Es ist klar, dass ein topologischer Raum als Menge die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

Satz 1.13.14. Sei X ein topologischer Raum.

1. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist zusammenhängend.
2. Gilt für Teilmengen $A, B \subset X$ die Relation $A \subset B \subset \bar{A}$ und ist A zusammenhängend, so ist B zusammenhängend. Insbesondere ist $\bar{A}$ zusammenhängend.
3. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist abgeschlossen.

Beweis. 1. Betrachte die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eines Punktes $x \in X$. Für jedes $y \in Z(x)$ können wir eine zusammenhängende Menge $Z_y \subset X$ finden, die y und x enthält. Aber jede zusammenhängende Menge, die x enthält muss nach Definition in $Z(x)$ enthalten sein. Die Mengen Z_y überdecken also die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ und sind nicht disjunkt, da sie alle x enthalten. Nach Korollar 1.13.8 ist $Z(x)$ zusammenhängend.

2. Angenommen, $\bar{A}$ ist nicht zusammenhängend. Wähle nach Lemma 1.13.7 eine nicht-konstante Funktion $f : B \rightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$. Die Einschränkung $f|_A$ ist konstant, ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit Wert 0, also ist das Urbild von 1 offen in B und schneidet nicht A . wähle also $b \in f^{-1}(1)$. Nach Satz 1.7.6 ist dies ein Berührungspunkt von A , aber b hat eine Umgebung, die A nicht schneidet. Dies ist ein Widerspruch.

3. Wegen 1. ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend; es gilt natürlich $Z(x) \subset \overline{Z(x)}$ und wegen 2. ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend. Damit hängen nach Definition alle Punkte in $\overline{Z(x)}$ mit x zusammen und es gilt $\overline{Z(x)} \subset Z(x)$. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt einen Raum mit einer Zusammenhangskomponente, die nicht offen ist.

Beispiel 1.13.15. Betrachte

$$X := \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Dann sind die einelementigen Teilmengen $\{\frac{1}{n}\}$ offen und abgeschlossen in X und daher Zusammenhangskomponenten von X . Die Zusammenhangskomponente $\{0\}$ ist nach Satz 1.13.14.3 abgeschlossen, aber nicht offen. Denn jede Umgebung von 0 in der Unterraumtopologie enthält unendlich viele der Punkte $1/n$, die aber jeder in ihrer eigenen Zusammenhangskomponente liegen.

Wir brauchen ein Beispiel mit unendlich vielen Komponenten, denn sonst wäre das Komplement einer Zusammenhangskomponente als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

Wir schließen nun genau die Situation, die im Beispiel 1.13.15 beim Punkt 0 vorliegt, aus:

Definition 1.13.16. Ein topologischer Raum X heißt **lokal zusammenhängend**, falls für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine zusammenhängende Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal-zusammenhängenden Raum bilden die zusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

Beispiel 1.13.17. Vorsicht: Ein zusammenhängender Raum X ist nicht unbedingt lokal zusammenhängend.

Als Beispiel betrachte den “konvergierenden Besen”: sei $Q_n := (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$, $Q_0 := (0, 0)$ und $P := (0, 1)$. Setze $X = \cup_{n \geq 0} \overline{Q_n P}$. Jede der Mengen $\overline{Q_n P}$ ist als homöomorphes Bild eines Intervalls zusammenhängend. Da sich alle Intervalle $\overline{Q_n P}$ in P schneiden, ist X nach Korollar 1.13.8 zusammenhängend. Betrachte aber andererseits Umgebungen des Punktes $(0, \frac{1}{2})$. Jede dieser Umgebungen besteht aus unendlich vielen Intervallen und enthält keine zusammenhängende Umgebung.

Satz 1.13.18. *Der topologische Raum X sei lokal zusammenhängend. Dann ist jede Zusammenhangskomponente offen und abgeschlossen. Wählt man Repräsentanten $(x_i)_{i \in I}$ für die Zusammenhangskomponenten, so ist als topologischer Raum*

$$X \cong \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

Beweis. Nach Satz 1.13.14 sind die Zusammenhangskomponenten auch schon ohne die Annahme “lokal zusammenhängend” abgeschlossen. Sei $y \in Z(x)$ beliebig. Sei V eine zusammenhängende Umgebung von y . Damit ist V nach Definition Teilmenge von $Z(x)$. Damit enthält die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eine Umgebung von y und ist somit offen. Die Behauptung folgt nun aus Bemerkung 1.10.6. $\square$

1.14 Wegzusammenhang

Definition 1.14.1. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für je zwei $x, y \in X$ eine stetige Abbildung

$$w : [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. Eine solche Abbildung heißt **Weg**.

Satz 1.14.2. *Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Wäre X nicht zusammenhängend, so schreibe $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ mit nicht-leeren disjunkten offenen Teilmengen X_1 und X_2 . Wähle $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ und einen Weg w , der x_1 und x_2 verbindet. Dann wäre

$$w^{-1}(X_1) \dot{\cup} w^{-1}(X_2)$$

eine disjunkte Zerlegung des nach Satz 1.13.5 zusammenhängenden Intervalls $[0, 1]$ in nicht-leere offene Mengen, Widerspruch. $\square$

Satz 1.14.3. *Die topologischen Räume $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.*

Beweis. Angenommen $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist nach Satz 1.13.10 $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$.

$\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend, für einen Widerspruch werden wir zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ zusammenhängend ist. Nach Satz 1.14.2 reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ wegzusammenhängend ist.

Wir können beliebige x_1 und x_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ mit einem Geradenabschnitt $w(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ verbinden, es sei denn $f(0)$ liegt im Bild von w . Dann aber wählen wir irgendein z das nicht kollinear mit x_1 und x_2 ist und verbinden x_1 mit z und z mit x_2 durch Geradenabschnitte. Wir definieren den Weg von x_1 nach x_2 durch $w(t) = x_1 + 2t(z - x_1)$, wenn $t \leq \frac{1}{2}$, und $w(t) = z + (1 - 2t)(x_2 - z)$, wenn $t \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Bemerkung 1.14.4. Dieser Satz scheint offensichtlich, aber die Invarianz der Dimension war eine der wichtigen theoretischen Fragen in den Anfangsjahren der Topologie. Die Frage ist jedenfalls nicht trivial, wie man an der Existenz von stetigen Surjektionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ (!) sieht. Wir werden später sehen, dass $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^3$ ist. Für den allgemeine Beweis, dass $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist, wenn $n \neq m$, müssen Sie auf einen Folgekurs warten.

Auf den Punkten eines topologischen Raumes definieren wir eine Relation **Wegzusammenhang** durch $x \approx y$, wenn es einen Weg w gibt mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Satz 1.14.5. *Wegzusammenhang ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Der konstante Weg zeigt $x \approx x$. Aus $x \approx y$ mit einem Weg w folgt mit $\bar{w}(t) = w(1 - t)$, dass auch $y \approx x$. Um die Transitivität der Relation zu zeigen definieren wir die Verkettung von zwei Wegen w und v : Gilt $v(1) = w(0)$ dann definieren wir $w \star v(t) = v(2t)$ wenn $t \leq \frac{1}{2}$ und $w \star v(t) = w(2t - 1)$ wenn $t \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Definition 1.14.6. Wir nennen die Äquivalenzklasse von $x \in X$ die **Wegkomponente** von x , geschrieben als $W(x)$. Die Menge aller Wegkomponenten von X bezeichnen wir auch als $\pi_0(X)$.

Satz 1.14.7. *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt*

1. *Für $x \in X$ ist $W(x) \subset Z(x)$.*
2. *Eine Wegkomponente ist wegzusammenhängend.*

3. Das Bild eines wegzusammenhängend Raumes ist wegzusammenhängend.

Beweis.

1. Für x, y in der gleichen Wegkomponente finde einen Weg w , der x und y verbindet. Dann ist $w([0, 1])$ eine zusammenhängende Teilmenge, die x, y enthält, so dass diese Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.
2. Ist klar wegen der Transitivität der Relation.
3. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $x, y \in X$. Sei w ein Weg von x nach y , dann ist $f \circ w$ ein Weg von $f(x)$ nach $f(y)$. $\square$

Satz 1.14.8. Jede stetige Abbildung $X \rightarrow Y$ induziert eine Funktion $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Für eine zweite stetige Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$. Wenn f ein Homöomorphismus ist, dann ist f_* eine Bijektion.

Beweis. Da Wegkomponenten wegzusammenhängend sind ist das Bild einer Wegkomponente in einer eindeutigen Wegkomponente enthalten, wir erhalten also eine wohldefinierte induzierte Funktion von $\pi_0(X)$ nach $\pi_0(Y)$ die $W(x)$ nach $W(f(x))$ schickt. Es ist klar, dass $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ gilt, da beide Funktionen durch $W(x) \mapsto W(g(f(x)))$ repräsentiert werden

Da die Identität auf X die Identität auf $\pi_0(X)$ induziert können wir folgern, dass für einen Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ mit Inversem g die Abbildungen f_* und g_* ebenfalls invers zueinander sind. Also sind $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ gleichmächtig. $\square$

Ein ähnlicher Beweis, zeigt dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ebenso homöomorphie-invariant ist.

Beispiel 1.14.9. Eine Wegkomponente $W(x)$ eines topologischen Raumes ist im allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. Setze dazu

$$X_1 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \quad X_2 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

und $X := X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Als homöomorphes Bild eines Intervalls in $\mathbb{R}$ sind X_1 und X_2 wegzusammenhängend.

Wir werden zeigen, dass X_1 und X_2 die Wegkomponenten von X sind. Mas sieht leicht, dass X_1 und X_2 wegzusammenhängend sind.

Dann stellen wir fest, dass X_1 offen ist ($X_1 = X \cap \{(x, y) \mid y > 0\}$). Aber X_1 ist nicht abgeschlossen, denn alle Punkte des Geradensegments X_2 sind Berührungspunkte von X_1 , aber nicht in X_1 enthalten, $X_2 \subset \overline{X_1}$.

Die Zusammenhangskomponente X_2 ist als Komplement von X_1 abgeschlossen, aber nicht offen. der Zusammenhangskomponente X_1 enthält.

Nehmen wir nun an, dass X_1 und X_2 Teil der gleichen Wegkomponente sind. Dann gibt es $w : [0, 1] \rightarrow X$ mit $w(0) = (0, 0)$ und $w(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Wir betrachten $T = \{s \mid w([0, s]) \subset X_2\}$ und $t = \sup(T)$. Da $w(0) \in X_1$, ist T nicht leer, also existiert t . Wir stellen fest, dass $t \in T$, denn $w^{-1}(X_2)$ ist abgeschlossen.

Wir versehen nun X mit der Euklidischen Unterraummetrik. Mithilfe der Stetigkeit von f wählen wir δ so dass für $|x - t| \leq \delta$ gilt $d(f(x), f(t)) \leq \frac{1}{2}$. Dann

ist insbesondere der Abstand in der zweiten Koordinate $< \frac{1}{2}$ und $w([t, t + \delta))$ ist in der Untermenge $X' = X \cap \{(x, y) \mid |y - \pi_2(w(t))| \leq \frac{1}{2}\}$ enthalten, wobei π_2 die zweite Projektion ist.

X' ist nicht zusammenhängend, da das Tal oder der Gipfel der Sinuswelle einen Abstand $> \frac{1}{2}$ von $\pi_2(w(t))$ hat. Überdies ist $X_2 \cap X'$ eine Wegkomponente von X' , denn für jedes $(x, y) \in X'$ mit $x > 0$ gibt es einen Tal oder Gipfel der Sinuswelle mit $x' \in (0, x)$ und $(x', \sin(\frac{1}{x'})) \notin X'$. Dann zerlegen die Schnitte mit $U_< = \{(x, y) \mid x < x'\}$ und $U_> = \{(x, y) \mid x > x'\}$ die Menge X' in disjunkte offene Teilmengen und (x, y) kann nicht in der Zusammenhangskomponente von $(0, 0)$ liegen.

Also gilt für alle $t' \in [t, t + \delta)$ dass $w(t') \in X_2$ liegt, was im Widerspruch dazu steht, dass $t = \sup(T)$. Wir folgern, dass X_1 und X_2 nicht in der gleichen Wegkomponente liegen.

Dies ist auch ein Beispiel für einen Raum der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist. X ist zusammenhängend, da $X \subset \bar{X}_1$, vgl. Satz 1.13.14.

Definition 1.14.10. Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn für jeden Punkt x jede Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal wegzusammenhängenden Raum bilden die wegzusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen. Aus Satz 1.14.2 folgt, dass lokal wegzusammenhängende Räume auch lokal zusammenhängend sind.

Satz 1.14.11. Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt $Z(x) = W(x)$ für alle $x \in X$. Die Wegkomponenten sind also die Zusammenhangskomponenten. Sie sind offen und abgeschlossen, und es gilt mit einem Repräsentantensystem $(x_i)_{i \in I}$ der Zusammenhangskomponenten als topologischer Raum

$$X = \coprod_{i \in I} W(x_i) = \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

Beweis. Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist X lokal zusammenhängend. Daher sind nach Satz 1.13.18 die Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen. Nach Bemerkung 1.10.6 gilt

$$X = \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

Als Menge gilt auch

$$X = \dot{\cup}_{i \in I} W(x_i) .$$

Die Wegkomponenten $W(x)$ sind offen, weil jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine wegzusammenhängende Umgebung von x enthält. Nun gilt

$$W(x_i) = X \setminus \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} W(x_j)$$

so dass die Wegkomponente $W(x_i)$ als Komplement offener Mengen auch abgeschlossen ist. Somit gilt auch als topologischer Raum nach Bemerkung 1.10.6

$$X = \coprod_{i \in I} W(x_i) .$$

Nach Satz 1.14.7 gilt immer $W(x) \subset Z(x)$. Angenommen, es wäre $Z(x) \supsetneq W(x)$ für ein $x \in X$. Dann wäre $Z(x) = (Z(x) \setminus W(x)) \dot{\cup} W(x)$, im Widerspruch dazu, dass $Z(x)$ zusammenhängend ist. $\square$

Korollar 1.14.12. Sei U eine zusammenhängende offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist U wegzusammenhängend.

Beweis. Da die offenen Kugeln in $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend sind, ist jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ lokal wegzusammenhängend. Da U die einzige Zusammenhangskomponente ist, ist U wegen Satz 1.14.11 auch wegzusammenhängend. $\square$

1.15 Mehr über Quotientenräume

Wir wenden uns noch ein paar nützlichen Beispielen von Quotientenräumen zu.

Das Argument aus Beispiel 1.11.3 lässt sich verallgemeinern:

Satz 1.15.1. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten auf dem Urbildraum X die Äquivalenzrelation $x \sim_f y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ und versehen $X/\sim_f$ mit der Quotiententopologie. Das Bild $f(X)$ versehen wir mit der Unterraumtopologie in Y . Wir zerlegen mit den kanonischen Abbildungen

$$f : X \xrightarrow{\pi} X/\sim_f \xrightarrow{\bar{f}} f(X) \xrightarrow{j} Y.$$

Dann ist die Abbildung $\bar{f}$ stetig.

Beweis. Nach der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie (Satz 1.6.1) folgt aus der Stetigkeit der Verkettung $f = j \circ (\bar{f} \circ \pi)$, dass $\bar{f} \circ \pi$ stetig ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie (Satz 1.11.2) folgt aus der Stetigkeit der Verkettung $\bar{f} \circ \pi$ die Stetigkeit von $\bar{f}$. $\square$

Da die Abbildung $\bar{f}$ qua Konstruktion bijektiv ist, ist $\bar{f}$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen (oder wenn sie abgeschlossen) ist.

Wenn $\bar{f}$ ein Homöomorphismus ist nennen wir $\bar{f}$ auch **identifizierende Abbildung**.

Beispiel 1.15.2. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

die jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor den zugehörigen Einheitsvektor zuordnet. Sie ist stetig, surjektiv und offen. Sie induziert auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $x \sim_f y$ genau dann, wenn es $\lambda > 0$ gibt mit $x = \lambda y$. Die Quotiententopologie stimmt also mit der Unterraumtopologie überein.

Wir wenden uns noch einem wichtigen Beispiel von Quotientenräumen zu. Wir definieren die Verklebung entlang von Abbildungen.

Definition 1.15.3. Seien X, Y topologische Räume. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf $X \amalg Y$:

$$z_1 \sim_f z_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \begin{cases} z_1 = z_2 & \text{für beliebige } z_1, z_2 \in X \cup Y. \\ z_1, z_2 \in A \text{ und } f(z_1) = f(z_2) \\ z_1 \in A, z_2 \in f(A) \text{ und } f(z_1) = z_2 \\ z_1 \in f(A), z_2 \in A \text{ und } z_1 = f(z_2) \end{cases}$$

Der Quotientenraum $X \amalg Y / \sim_f$ wird mit $X \cup_f Y$ bezeichnet und heißt der durch **Zusammenkleben** von X und Y mittels f entstandene Raum.

Es werden also die Punkte in $f(A) \subset Y$ mit ihren Urbildern in A identifiziert.

Beispiele 1.15.4.

1. Seien $X = Y = [0, 1]$ und $A = \{\frac{1}{2}\}$. Mit $f_1 = \text{id}_A$ erhalten wir durch Zusammenkleben zwei sich in einem Punkt berührende Intervalle (ein “X”)

Für $f_2 : \frac{1}{2} \mapsto 0$ erhalten wir ein “T”.

Man sieht durch Entfernen des Kreuzungspunkts und zählen von Wegkomponenten, dass diese beiden Räume nicht homöomorph sind. Die Abbildung f ist also wesentlich, auch wenn sie manchmal in der Notation unterdrückt wird.

2. Seien $X = Y = [0, 1]$ und $A = \{0, 1\}$. Mit $f = \text{id}_A$ erhalten wir durch Zusammenkleben eine Kreislinie
3. Seien $X = Y = \mathbb{D}^2$ abgeschlossene Kreisscheiben, $A \subset X$ der Rand von X und $f = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$. Dann ist

$$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{D}^2 \cup_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2.$$

Hierbei schreiben wir als Subskript die Teilmenge $A = \mathbb{S}^1$ und notieren nicht die Abbildung.

4. A mathematician named Klein
Thought the Möbius band was divine.
Said he: “If you glue
The edges of two,
You’ll get a weird bottle like mine.”

In anderen Worten, wenn M das Möbiusband ist und K die Kleinsche Flasche, dann gilt $M \cup_{\partial M} M \cong K$. Die Abbildung vom Rand des ersten Möbiusbandes zum zweiten ist die Inklusion des Randes.

Definition 1.15.5. Sei $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $e^n = \mathring{\mathbb{D}}^n \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n \setminus \mathring{\mathbb{D}}^n$, jeweils versehen mit der Unterraumtopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n$. (Es gilt $\mathbb{D}^0 = e^0 = \{*\}$.)

1. Die zu diesen Räumen homöomorphen Räume heißen n -dimensionaler **Ball**, n -dimensionale **Zelle** und $(n - 1)$ -dimensionale **Sphäre**.
2. Sei $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ eine Abbildung in einen topologischen Raum. Man sagt, $X \cup_f \mathbb{D}^n$ sei durch **Ankleben** einer n -Zelle mittels f entstanden.

Beispiele 1.15.6.

1. Die Sphäre erhält man durch Ankleben einer 2-Zelle an die Kreisscheibe $\mathbb{D}$ entlang des Randes, vgl. Beispiel 1.15.4.3.

2. Klebt man an den Rand eines Möbiusschen Bandes eine 2-Zelle, so erhält man die reelle projektive Ebene. Das lässt sich anhand eines Bildes verstehen.

Man kann natürlich auch mehrere disjunkte n -Zellen durch eine Familie stetiger Abbildungen gleichzeitig ankleben.

Definition 1.15.7. Ein n -dimensionaler CW-Komplex ist induktiv definiert wie folgt.

1. Ein 0-dimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, versehen mit der diskreten Topologie.
2. Ein n -dimensionaler CW-Komplex X_n ist ein Raum der Form

$$X_n = X_k \cup_f D_I^n,$$

wobei X_k ein k -dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ ist, $D_I^n = \coprod_{i \in I} \mathbb{D}^n$ eine Summe von n -dimensionalen Bällen und $f : \coprod_{i \in I} \partial \mathbb{D}_i^n \rightarrow X_k$ eine stetige Abbildung.

Ein CW-Komplex heißt endlich, wenn die Gesamtzahl der Zellen endlich sei.

Es gilt $X = \dot{\cup}_{k \leq n} \coprod_{I_k} e^k$. X hat also eine disjunkte Zerlegung in Zellen und wird auch **Zellkomplex** genannt.

Wir werden später auf allgemeine CW-Komplexe zurückkommen.

Beispiel 1.15.8. Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist zu einem 2-dimensionalen CW-Komplex homöomorph. Man kann einfach eine 2-Zelle an einen Punkt kleben, d.h. $f : \partial D^2 \rightarrow *$ ist die konstante Funktion.

Alternativ ist $\mathbb{S}^0$ diskret mit zwei Elementen. Wir erhalten $\mathbb{S}^1$ indem wir zwei 1-Zellen jeweils mit ihren Endpunkten an die beiden Elemente von $\mathbb{S}^0$ kleben. Dann kleben wir zwei 2-Zellen als Hemisphären an $\mathbb{S}^1$ indem wir ihren Rand mit $\mathbb{S}^1$ identifizieren und erhalten so $\mathbb{S}^2$.

Wir können das formeller formulieren: Wir kleben zwei 1-Zellen a und b an zwei Punkte $\{x_0, x_1\}$ indem wir jeweils den Rand $\{0, 1\}$ der 1-Zelle mit den zwei Punkten identifizieren, $i \mapsto x_i$. Das ergibt X_1 . Anschließend kleben wir zwei 2-Zellen jeweils entlang der Abbildung $\bar{b} \star a : S^1 \rightarrow X_1$, wobei wir die Notation aus dem Beweis von Satz 1.14.5 verwenden. Da $\bar{b} \star a : [0, 1] \rightarrow X_1$ ein Weg von x_0 nach x_0 ist, faktorisiert $\bar{b} \star a$ durch S^1 (und wir benutzen die gleiche Notation).

Induktiv erhalten wir $\mathbb{S}^n$ als CW-Komplex mit 2 Zellen in jeder Dimension $\leq n$.

1.16 Kompaktheit

Aus der Analysis wissen Sie, dass das abgeschlossene Intervall viele gute Eigenschaften hat, die im offenen Intervall oder in $\mathbb{R}$ nicht gelten. Folgen haben konvergente Teilfolgen, stetige Funktionen sind beschränkt und erreichen ihre Extremwerte. Der Grund ist eine gewisse Endlichkeit des abgeschlossenen Intervalls, nichts geht in die Unendlichkeit.

Die Verallgemeinerung dieser Eigenschaften ist eines der wichtigsten Konzepte dieses Kurses.

Definition 1.16.1. Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen einer Menge X heißt **Überdeckung** von X , wenn $X = \cup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt.

Eine Überdeckung eines topologischen Raumes X heißt **offen**, wenn jedes $U \in \mathcal{U}$ offen in X ist.

Eine **Teilüberdeckung** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ von X ist eine Teilfamilie $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, die ebenfalls eine Überdeckung ist.

Definition 1.16.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir sagen, dass X **kompakt**, ist, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

Satz 1.16.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn es für jede Familie A_i , $i \in I$ von abgeschlossene Teilmengen mit $\cap_{i \in I} A_i = \emptyset$, endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt, so dass

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset.$$

Beweis. Folgt aus der Definition. □

In mancher Literatur heißen solche Räume auch nur **quasikompakt** und man fordert zusätzlich Hausdorffsch für Kompaktheit.

Unser erstes Beispiel ist wichtig genug, um es als Satz zu formulieren:

Satz 1.16.4. Das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ ist kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Wir betrachten $\mathcal{E}$ die Menge der endlichen Teilmengen von J . Setze

$$T := \{t \in [0, 1] \mid \text{es gibt } E \in \mathcal{E}, \text{ so dass } \cup_{e \in E} U_e \supset [0, t]\}$$

T enthält also die $t \in [0, 1]$, für die sich das Teilintervall $[0, t]$ endlich überdecken lässt.

Es gilt $T \neq \emptyset$, denn $0 \in T$, weil $0 \in U_i$ für ein $i \in J$. Außerdem ist T nach oben beschränkt als Teilmenge von $[0, 1]$. Wir setzen also $s := \sup T$.

Ist $t_2 \in T$ und $0 \leq t_1 < t_2$, so gilt $[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \cup_{i \in E} U_i$ und somit ist $t_1 \in T$. Also ist T ein (halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall.

Angenommen $T = [0, s]$. Wenn $s = 1$ ist, dann ist $[0, 1]$ kompakt. Ist aber $s < 1$ dann ist $s \in U_{i_1}$ für einen Index i_1 und es existiert $t > s$ mit $[s, t] \subset U_{i_1}$. Damit ist aber auch $[0, t] \subset T$, im Widerspruch dazu, dass s das Supremum von T ist.

Sei also T von der Form $[0, s)$ mit $0 < s \leq 1$. Dann ist $s \in U_{i_0}$ für einen Index i_0 . Da U_{i_0} offen ist, gibt es $t < s$ mit $[t, s] \subset U_{i_0}$. Weil $s = \sup T$, ist $t \in T$. Damit hat aber $[0, s] = [0, t] \cup [t, s]$ eine endliche offene Überdeckung bestehend aus U_{i_0} und einer endlichen offenen Überdeckung von $[0, t]$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $s \notin T$. □

Satz 1.16.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist jeder abgeschlossene Teilraum von X kompakt.

Beweis. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zu einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A finde in X offene Mengen $V_i \subset X$ mit $U_i = V_i \cap A$. Dann ist $(X \setminus A) \cup (\cup_{i \in I} V_i)$ eine offene Überdeckung von X , in der wir eine endliche Teilüberdeckung $\cup_{i \in E} V_i \cup (X \setminus A)$ von X finden können. Dann ist $\cup_{i \in E} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung von A . □

Satz 1.16.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv, so ist Y kompakt. Insbesondere ist das Bild eines kompakten Raumes immer kompakt.*

Beweis. Ist $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des Bildes Y , so ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung des Urbilds X . Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(U_i))_{i \in E}$ mit $E \subset I$ endlich. Da f surjektiv ist, ist $(U_i)_{i \in E}$ eine endliche Überdeckung von Y . $\square$

Vorsicht: ist $K \subset Y$ kompakt, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ nicht unbedingt kompakt. Als Gegenbeispiel betrachte eine konstante Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiele 1.16.7.

1. Ein diskreter topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
2. Ein endlicher topologischer Raum $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ist immer kompakt, da alle Überdeckungen endlich sind.
3. $\mathbb{R}^n$ ist nicht kompakt: die offene Überdeckung $(B_1(x))_{x \in \mathbb{R}^n}$ durch Einheitskugeln hat keine endliche Teilüberdeckung.
4. Die Menge $X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt: zum Beispiel hat die Überdeckung $B_{\frac{1}{2n(n+1)}}(\frac{1}{n})$ keine endliche Teilüberdeckung. Aber die Menge $X' := X \cup \{0\}$ ist kompakt: in jeder Umgebung von 0 liegen fast alle Punkte $\frac{1}{n}$, d.h. wir brauchen für eine Überdeckung nur noch endlich viele andere offene Mengen.

Im nächsten Lemma verwenden wir den Begriff der Umgebung einer Teilmenge A . Dies ist einfach eine Obermenge $A \subset B$ so dass es eine offene Menge U mit $A \subset U \subset B$ gibt.

Lemma 1.16.8. *Sei X topologischer Raum, $L \subset X$ und $K \subset X$ kompakt und $L \cap K = \emptyset$. Kann man jeden einzelnen Punkt des Kompaktums K und die ganze Menge L durch offene Umgebungen trennen, dann kann man auch das gesamte Kompaktum K und ganz L durch offene Umgebungen trennen.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x und eine offene Umgebung $V_x \supset L$ von L , die disjunkt sind, $K_x \cap L_x = \emptyset$. In der Überdeckung $(U_x)_{x \in K}$ des kompakten Raums K wähle eine endliche Teilüberdeckung,

$$K \subset U := U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Dann ist der *endliche* Durchschnitt $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ eine offene Umgebung von L , die zur offenen Umgebung U von K disjunkt ist. $\square$

Satz 1.16.9. *Sei $K \subset X$ und X Hausdorffsch. Ist K kompakt, so ist K in X abgeschlossen.*

Beweis. Sei $y \in X \setminus K$. Setze $L = \{y\}$ und finde, da X Hausdorffsch ist, für jeden Punkt $x \in K$ offene Umgebungen, die x und y trennen. Nach Lemma 1.16.8 gibt es dann eine offene Umgebung von y , die die ganze Menge K nicht trifft. Also ist $X \setminus K$ offen und K somit abgeschlossen. $\square$

Der nächste Satz ist bemerkenswert.

Satz 1.16.10. *Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Ist der Urbildraum X kompakt und der Bildraum Y Hausdorffsch, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 1.5.8 müssen wir zeigen, dass f abgeschlossen ist. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A nach Satz 1.16.5 kompakt. Nach Satz 1.16.6 ist $f(A) \subset Y$ kompakt. Nach Satz 1.16.9 folgt aus der Tatsache, dass Y Hausdorffsch ist, dass $f(A)$ abgeschlossen ist. Die Abbildung f ist also abgeschlossen. $\square$

Satz 1.16.10 erleichtert oft die Konstruktion von Homöomorphismen.

Beispiel 1.16.11. Wir vergleichen zum Beispiel das Quadrat mit parallel identifizierten Seiten $X = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$ mit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (dies sind zwei Beschreibungen des Torus, sollten also äquivalent sein). Wir definieren $\hat{f} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ durch $(s, t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$. Die Abbildung $\hat{f}$ ist stetig und da es die Ränder parallel identifiziert, gibt es eine Faktorisierung durch $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Nach Satz 1.15.1 ist f stetig und man sieht leicht, dass f bijektiv ist. Da der Urbildraum als Bild des Quadrats kompakt ist (siehe Satz 1.16.12) und der Bildraum Hausdorffsch ist, muss f ein Homöomorphismus sein.

Wir erreichen nun, nach etlichen Wochen, das erste tiefe Theorem dieses Kurses. Bisher lag der Inhalt dieses Kurses vor allem in Definitionen und Beispielen, die meisten Beweise waren kurz und folgten auf recht natürliche Art aus den Definitionen.

Der Satz von Tychonoff (zuerst in allgemeiner Form bewiesen von Čech) wird uns dagegen einiges an Arbeit abverlangen. Die Mühe lohnt sich aber, dieser Satz ist einer der wichtigsten Sätze der mengentheoretischen Topologie. (Anwendungen finden sich insbesondere in der Analysis, z.B. der Satz von Arzela-Ascoli.)

Satz 1.16.12 (Satz von Tychonoff). *Ein Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn jeder topologische Raum X_i kompakt ist.*

Man beachte, dass hier keine Endlichkeitsannahmen für die Indexmenge I gemacht werden. Der Beweis ist deutlich einfacher wenn wir annehmen, dass I endlich ist.

Aus der Analysis wissen Sie vielleicht, dass sich Folgenkompaktheit für ein abzählbares Produkt mit einer Idee aber ohne allzu großen Aufwand beweisen lässt. Es scheint unmöglich, diesen Beweis zu verallgemeinern, denn er hängt entscheidend von der Verwendung von Folgenkompaktheit und von der Abzählbarkeit der Indexmenge ab.

Wir werden diese Probleme im nächsten Abschnitt durch Einführung einer neuen Idee von Konvergenz überwinden, um dann im übernächsten Abschnitt den Beweis vom Satz von Tychonoff nachzureichen.

Für das nächste Korollar brauchen wir nur endliche Indexmengen.

Korollar 1.16.13 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist K nach Satz 1.16.9 abgeschlossen, weil $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum nach Satz 1.12.2 Hausdorffsch ist. Die offene

Überdeckung $(B_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ durch Kugeln wachsenden Radius hat eine endliche Teilüberdeckung, weshalb K auch beschränkt ist.

Sei umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt. Weil K beschränkt ist, existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $K \subset [-a, a]^n$. Der Würfel $[-a, a]^n$ ist wegen des Satzes von Tychonoff 1.16.12 und Beispiel 1.16.4 kompakt. Wegen Satz 1.16.5 ist K als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Würfels $[-a, a]^n$ kompakt. $\square$

Bemerkung 1.16.14. Aus der Analysis kennen Sie Folgenkompaktheit und haben gezeigt, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann folgenkompakt ist, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist, also nach Satz 1.16.12 genau dann wenn K kompakt ist. Dies gilt nicht in allgemeinen topologischen Räumen.

Korollar 1.16.15. *Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und X kompakt, so nimmt f sein Maximum und Minimum an.*

Beweis. Nach Satz 1.16.6 ist $f(X)$ kompakt und damit nach Satz 1.16.13 beschränkt und abgeschlossen. $\square$

1.17 Filter

Wir formalisieren die Eigenschaften der Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen eines Punktes $x \in X$ in einem topologischen Raum X und verallgemeinern gleichzeitig den Folgenbegriff.

Definition 1.17.1. Ein **Filter** F auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

1. $X \in F$, aber $\emptyset \notin F$.
2. Abgeschlossenheit unter endlichen Schnitten: aus $A, B \in F$ folgt $A \cap B \in F$.
3. Abgeschlossenheit unter Obermengen: aus $B \in F$ und $B \subset C$ folgt $C \in F$.

Die Anschauung ist, dass ein Filter aus allen Mengen besteht, die hängen bleiben. (Er ist also der Filterkuchen, nicht das Filtrat.)

Beispiel 1.17.2. Sei X ein topologischer Raum; die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen eines Punktes $x \in X$ bildet einen Filter, den **Umgebungsfilter** von x .

Definition 1.17.3. Ein nicht-leeres System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X heißt **Filterbasis** auf X , falls

1. der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält,
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ gilt.

Dann ist die Menge aller Obermengen von Mengen in $\mathcal{B}$

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{Y \subset X \mid \text{es gibt } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset Y\}$$

ein Filter. Wir nennen ihn den von $\mathcal{B}$ **erzeugten Filter** und $\mathcal{B}$ heißt Filterbasis für $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Beispiele 1.17.4.

1. Wähle $A \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge einer Menge X . $\mathcal{B} := \{A\}$ ist eine Filterbasis und erzeugt den Filter, der alle Obermengen von A enthält. Zum Beispiel gibt es für jedes $x \in X$ einen Filter $F_x := \{A \subset X \mid x \in A\}$. Für jede Menge X ist $F = \{X\} = \langle \{X\} \rangle$ ein Filter.
2. Sei (x_n) eine Folge mit Werten in einer Menge X . Dann ist das System der Mengen $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, nämlich der Endstücke der Folge, eine Filterbasis auf X .
3. Ist F ein Filter auf einer Menge X und $f : X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung, so ist

$$\mathcal{B}_{f(F)} := \{f(A) \mid A \in F\}$$

eine Filterbasis für den **Bildfilter** $f(F)$ des Filters F unter der Abbildung f . Man beachte, die Notation, $f(F)$ ist nicht die Menge aller Bilder von Elementen von F .

Definition 1.17.5. Seien F_1 und F_2 Filter auf einer Menge. F_1 heißt **feiner** als F_2 und F_2 heißt **gröber** als F_1 , falls $F_2 \subset F_1$ gilt.

Denn in einem feineren Filter “bleibt mehr hängen”.

Beispiel 1.17.6. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Der Filter $F = \{X\}$ ist der gröbste Filter auf X . Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist feiner, aber er ist gröber als der Filter F_x aus Beispiel 1.17.4.1.

Definition 1.17.7. Ein Filter F auf einer Menge X heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

Beispiel 1.17.8. Der Filter F_x aus Beispiel 1.17.4.1 ist für jedes $x \in X$ ein Ultrafilter.

Angenommen, F ist ein Filter, der feiner als der Filter F_x ist, $F_x \subsetneq F$. Dann existiert $Y \in F \setminus F_x$. Das heißt aber nach Definition von F_x , dass $x \notin Y$. Andererseits ist $\{x\} \in F_x \subset F$. Damit muss der Schnitt $\{x\} \cap Y$ im Filter F liegen, aber der Schnitt ist leer. Ein Filter darf aber nicht die leere Menge enthalten.

Das nächste sehr nützliche Lemma lässt sich vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom herleiten. Das Ultrafilterlemma ist aber nicht äquivalent zum Auswahlaxiom. Wir können es also auch anstelle des Auswahlaxioms annehmen.

Lemma 1.17.9 (Ultrafilterlemma). *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Siehe Anhang A. □

Zum Beispiel ist für $\emptyset \neq A \subset X$ nach Beispiel 1.17.4.1 das System von Teilmengen $F_A = \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$ ein Filter. Ist $a \in A$, so ist der Filter $F_a = \{Z \subset X \mid a \in Z\}$ aus Beispiel 1.17.4.1 nach Beispiel 1.17.8 ein Ultrafilter. Er enthält den Filter F_A . Dies zeigt auch, dass der Ultrafilter im Allgemeinen nicht eindeutig durch den Filter bestimmt ist (wie üblich bei maximalen Elementen, die man mit dem Zornschen Lemma findet).

Satz 1.17.10. *Ein Filter F auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in F$ oder $A^C = X \setminus A \in F$ gilt.*

Beweis. Sei F ein Ultrafilter und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir nehmen an $A^C \notin F$. Betrachte ein beliebiges $Y \in F$. Es muss gelten $Y \cap A \neq \emptyset$, denn sonst ist $Y \subset A^C$ und $A^C \in F$. Aber dann ist

$$\mathcal{B} := \{Y \cap A \mid Y \in F\}$$

eine Filterbasis, denn $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und für $Y, Y' \in F$ ist $Y \cap Y' \in F$ und damit ist $(Y \cap A) \cap (Y' \cap A) = (Y \cap Y') \cap A \in \mathcal{B}$.

Der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter $\langle \mathcal{B} \rangle$ ist per Definition feiner als F . Da F ein Ultrafilter ist, gilt $\langle \mathcal{B} \rangle = F$. Wegen $X \cap A = A$ ist $A \in \langle \mathcal{B} \rangle = F$.

Für alle Teilmengen $A \subset X$ sei nun entweder $A \in F$ oder $X \setminus A \in F$. Wir nehmen an, der Filter G ist echt feiner als F . Dann gibt es $Y \in G$ mit $Y \notin F$. Wegen der Annahme ist $X \setminus Y \in F$ und damit auch $X \setminus Y \in G$. Die disjunkten Mengen Y und $X \setminus Y$ können aber nicht gleichzeitig Elemente eines Filters sein. $\square$

Definition 1.17.11.

1. Ein Filter F auf einem topologischen Raum X **konvergiert gegen** $x \in X$, in Zeichen $F \rightarrow x$, falls $\mathcal{U}(x) \subset F$ gilt, also falls der Filter F feiner als der Umgebungsfiler $\mathcal{U}(x)$ von x ist, $\mathcal{U}(x) \subset F$.
2. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** eines Filters F , falls für alle $Y \in F$ und alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $Y \cap U \neq \emptyset$. (Jede Menge im Filter trifft jede Umgebung.)

Beispiele 1.17.12.

1. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in einem topologischen Raum X und F der von (x_n) erzeugte Filter mit der Basis aus Mengen von Endfolgen $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$ wie in Beispiel 1.17.4.5. Dann ist $x \in X$ genau dann Berührungspunkt der Folge, wenn x Berührungspunkt des Filters F ist.

Denn ein Punkt $x \in X$ ist nach Definition 1.7.5 genau dann Berührungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele Glieder der Folge enthält. Genau dann ist aber $B_n \cap U \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. In der gleichen Situation ist $x \in X$ genau dann Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn der Filter F gegen x konvergiert.

Denn gilt $x_n \rightarrow x$, so gibt es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N = N(U)$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$. Dann ist aber $B_n \subset U$ für alle $n \geq N$ und somit $U \in F$.

Umgekehrt gelte $\mathcal{U}(x) \subset F$. Gegeben eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$, finde $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $B_{N_0} \subset U$; das heißt aber, $x_n \in U$ für alle $n \geq N_0$.

Satz 1.17.13. *Die Menge aller Berührungspunkte eines Filters F ist $\cap_{Y \in F} \overline{Y}$.*

Beweis. Der Beweis ist eine Übung. $\square$

Satz 1.17.14. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn das Bild jeden Filters F auf X , der gegen x konvergiert, gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. Sei f stetig und gelte für einen Filter auf X , dass $F \rightarrow x$. Für jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x))$ des Bildes $f(x)$ gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$. Wegen $F \rightarrow x$ gilt $U \in \mathcal{U} \subset F$ und somit $f(U) \subset \mathcal{B}_{f(F)}$. Wegen $f(U) \subset V$ folgt, dass auch V im Bildfilter $f(F)$ ist. Da V eine beliebige Umgebung von $f(x)$ war, folgt $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(F)$ und somit $F(f) \rightarrow f(x)$.

Die umgekehrte Richtung ist eine Übung. $\square$

Satz 1.17.15. *Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume und $(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$ Abbildungen. Wir versehen die Menge X mit der Initialtopologie. Dann konvergiert ein Filter F auf X genau dann gegen $x \in X$, wenn $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.*

Beweis. Konvergiere $F \rightarrow x$. Da die Abbildungen f_i bezüglich der Initialtopologie stetig sind, folgt mit Satz 1.17.14, dass $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.

Umgekehrt hat $x \in X$ in der Initialtopologie nach Satz 1.9.3 die Umgebungsbasis aus Mengen

$$\cap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e) \quad \text{mit } E \subset I \text{ endlich und } V_e \in \mathcal{U}(f_e(x)) .$$

Nach Annahme gibt es für jedes V_e mit $e \in E$ ein $U_e \in F$ mit $f_e(U_e) \subset V_e$. Es ist der endliche Schnitt $U := \cap_{e \in E} U_e \in F$. Aus $f_e(U_e) \subset V_e$ folgt

$$f_e^{-1}(V_e) \supset f_e^{-1}f_e(U_e) \supset U_e$$

und somit $U \subset \cap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e)$. Damit ist jedes Element der Umgebungsbasis von $x \in X$ im Filter F enthalten, also $F \rightarrow x$. $\square$

Als Spezialfall erhalten wir:

Korollar 1.17.16. *Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume und $X := \prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt mit Projektionen $\pi_i : X \rightarrow X_i$. Ein Filter F auf X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn alle Bildfilter $\pi_i(F) \rightarrow \pi_i(x)$ konvergieren.*

1.18 Filter und Kompaktheit

Wir verbinden nun die Ideen der letzten beiden Abschnitte.

Lemma 1.18.1. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

1. X ist kompakt.
2. Jeder Filter auf X hat einen Berührungspunkt.
3. Jeder Ultrafilter konvergiert.

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2. Sei $F := \{Y_i\}_{i \in I}$ ein beliebiger Filter auf X . Betrachte die abgeschlossenen Mengen $A_i := \overline{Y_i}$. Dann sind alle endlichen Schnitte nicht-leer,

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_n ,$$

weil F ein Filter ist. Nach Satz 1.16.3 ist dann $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, wenn X kompakt ist. Jeder Punkt $x \in \cap_{i \in I} A_i$ ist dann Berührungspunkt von F nach Satz 1.17.13.

2. $\Rightarrow$ 3. Jeder Filter F habe einen Berührungspunkt x . Es ist leicht zu prüfen, dass

$$\mathcal{B} := \{U \cap Y \text{ mit } U \in \mathcal{U}(x) \text{ und } Y \in F\}$$

eine Filterbasis für einen Filter G ist. G ist feiner $\mathcal{U}(x)$ und konvergiert somit gegen x . G ist außerdem feiner als F , wenn also F Ultrafilter ist, dann gilt $F = G$ und F konvergiert nach x .

3. $\Rightarrow$ 1. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ betrachte das Komplement

$$A_E := X \setminus (\cup_{e \in E} U_e) \neq \emptyset,$$

das wegen der Widerspruchsannahme nicht leer ist. Der Schnitt zweier Mengen A_E und $A_{E'}$ ist

$$A_E \cap A_{E'} = X \setminus (\cup_{e \in E \cup E'} U_e) = A_{E \cup E'}$$

und enthält daher eine Menge der Form $A_{E''}$. Die Mengen (A_E) bilden daher die Basis eines Filters, der nach Lemma 1.17.9 in einem Ultrafilter F enthalten ist.

Nach Annahme gilt dann $F \rightarrow x$ für ein $x \in X$, was heißt, dass F feiner ist als der Umgebungsfiler von x . Da eine Überdeckung vorliegt, gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Es muss wegen $F \rightarrow x$ die Umgebung U_i von x in F liegen, also $U_i \in F$ gelten. Aber nach Konstruktion von F muss auch $A_{\{i\}} = X \setminus U_i \in F$ gelten. Aber da F ein Filter ist, ist dies unmöglich. $\square$

Wir brauchen noch ein Lemma, dann folgt der Beweis des Satzes von Tychonoff auf sehr natürliche Art und Weise.

Lemma 1.18.2. . Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und F ein Ultrafilter auf X . Dann ist $f(F)$ ein Ultrafilter auf Y .

Beweis. Wir verwenden Satz 1.17.10. Sei also $A \subset Y$. Dann ist $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$. Da F ein Ultrafilter ist gilt $f^{-1}(A) \in F$ oder $f^{-1}(Y \setminus A) \in F$. Aber im ersten Fall gilt $f(f^{-1}(A)) \subset A$ und $A \in f(F)$, im zweiten Fall gilt $f(f^{-1}(Y \setminus A)) \subset Y \setminus A$ und $Y \setminus A \in f(F)$. $\square$

Beweis von Satz 1.16.12. Die Projektionen $\pi_j : X \rightarrow X_j$ sind nach Satz 1.9.5 stetig und surjektiv. Daher sind nach Satz 1.16.6 die Bilder X_j kompakt, wenn X kompakt ist.

Seien umgekehrt alle X_i kompakt. Sei F ein Ultrafilter auf X . Nach Lemma 1.18.2 ist für jedes i der Bildfilter $\pi_i(F)$ ein Ultrafilter. Nach Lemma 1.18.1 konvergiert $\pi_i(F)$ gegen ein $x_i \in X_i$, weil X_i kompakt ist. Nach Satz 1.17.15 konvergiert dann $F \rightarrow (x_i)_{i \in I}$. Also ist das Produkt kompakt. $\square$

Der Satz von Tychonoff lässt sich auch ohne Betrachtung von Ultrafiltern beweisen, siehe die Bücher von Munkres und Kelley.

Filter und Ultrafilter sind aber ein nützliches Konstrukt, zum Beispiel für die Analysis. Viele Beweise mithilfe von Folgen, die in allgemeinen topologischen Räumen nicht funktionieren, lassen sich stattdessen mit Filtern führen.

1.19 Abbildungsräume

Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass die linearen Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen selbst einen Vektorraum bilden. In der Topologie hätten wir gerne, dass die stetigen Abbildungen von X nach Y selbst einen topologischen Raum bilden.

Definition 1.19.1. Die **kompakt-offene Topologie** oder **KO-Topologie** auf $\text{Hom}(X, Y)$ ist die Topologie mit der Subbasis $B(K, V)$, die wir wie folgt definieren. K variiert über die kompakten Teilmengen von X und V über die offenen Teilmengen von Y ; $B(K, V)$ ist definiert als Menge aller stetigen Abbildungen f mit $f(K) \subset V$.

Wir schreiben $\text{Map}(X, Y)$ für den topologischen Raum $(\text{Hom}(X, Y), \mathcal{T}_{KO})$, also die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y , ausgestattet mit der KO-Topologie.

Zur Motivation bemerken wir ohne Beweis: Wenn Y ein metrischer Raum ist, dann ist die KO-Topologie identisch mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Untermengen. (Siehe zum Beispiel von Querenburg Abschnitt 14B.)

Beispiel 1.19.2. Sei I eine Menge bzw. ein diskreter topologischer Raum und X ein beliebiger topologischer Raum. Mit KO-Topologie und Produkttopologie gilt $\text{Map}(I, X) \cong \prod_I X$.

Die KO-Topologie hat gute Eigenschaften, wenn wir uns auf bestimmte topologische Räume beschränken.

Definition 1.19.3. Ein Raum X heißt **lokal kompakt** wenn es für jeden Punkt x und jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x gibt mit $x \in K \subset U$.

Man definiert X auch manchmal als lokal kompakt, wenn in X jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Wenn X auch Hausdorff ist, lässt sich unsere Definition daraus herleiten, siehe von Querenburg, Abschnitt 8B.

Der folgende Satz ist Grundlage für die topologische Bedeutung der KO-Topologie.

Satz 1.19.4. Seien X, Y, Z topologische Räume und sei Y lokal kompakt. Dann gibt es eine natürliche Bijektion $G : \text{Hom}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}(X, \text{Map}(Y, Z))$. Wir schicken dazu $f(-, -)$ mit zwei Variablen zu der Funktion $x \mapsto f(x, -)$.

Beweis. Wir prüfen zuerst, dass G eine Bijektion von Mengen ist. Zuerst einmal ist G wohldefiniert: Wenn f stetig ist, dann ist auch $G(f)(x)$ für jedes x stetig. Das Inverse G^{-1} schickt $h : X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ nach $(x, y) \mapsto h(x)(y)$.

Es bleibt zu prüfen, dass $G(f)$ genau dann stetig ist, wenn f stetig ist.

Sei also $f : X \times Y \rightarrow Z$ stetig, $x \in X$ und $B(K, V)$ in der Subbasis von $\text{Map}(Y, Z)$ sodass $G(f)(x) \in B(K, V)$. Die letzte Bedingung bedeutet, dass $\{x\} \times K \subset f^{-1}(V)$. Da $f^{-1}(V)$ offen ist, gibt es Umgebungen $U_k \times W_k \subset f^{-1}(V)$ von (x, k) für jedes $k \in K$, und da K kompakt ist finden wir eine endliche Teilüberdeckung K_0 der W_k . Sei $U = \bigcap_{k \in K_0} U_k$. Dann ist U eine offene Umgebung von x in $f^{-1}(V)$ und $f(U \times K) \subset V$, anders ausgedrückt $U \subset G(f)^{-1}(B(K, V))$. Wir haben nicht benutzt, dass Y lokalkompakt ist.

Sei umgekehrt $G(f)$ stetig, $x \in X$, $y \in Y$ und V eine offene Umgebung von $f(x, y)$ in Z . Wir suchen Umgebungen U von x und W von y mit $f(U \times W) \subset V$. Es ist $f(x, -) : Y \rightarrow Z$ eine stetige Funktion. Da Y lokalkompakt ist, können wir eine kompakte Umgebung K von y wählen so dass $f(\{x\} \times K) \subset V$. Aus der Stetigkeit von $G(f)$ folgt, dass $U = \{x' \in X \mid G(f)(x) \in B(K, V)\}$ offen in X ist. Also ist $U \times K$ die gesuchte Umgebung von (x, y) . $\square$

Korollar 1.19.5. *Sei X lokal kompakt. Die Evaluierung $ev : (f, x) \mapsto f(x)$ von $\text{Map}(X, Y) \times X$ nach Y ist stetig. Insbesondere ist $ev_x : f \mapsto f(x)$ stetig für jedes $x \in X$.*

Beweis. Nach Satz 1.19.4 gilt, dass $ev : \text{Map}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ stetig ist, wenn $G(ev) : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ stetig ist. Aber $G(ev) : f \mapsto ev(f, -)$. Also gilt $G(ev)(f) : x \mapsto f(x)$, und $G(ev)$ ist die Identität.

Die zweite Aussage folgt durch Komposition mit der stetigen Inklusion $\text{Map}(X, Y) \times \{x\} \rightarrow \text{Map}(X, Y) \times X$. $\square$

Bemerkung 1.19.6. Durch Inspektion des Beweises von Korollar 1.19.5 lässt sich auch zeigen, dass die KO-Topologie die grösste Topologie ist, so dass die Evaluierungsabbildung stetig ist.

1.20 Normale Räume und Urysohn's Lemma

Wir kehren noch einmal zurück zur mengentheoretischen Topologie und befassen uns mit Urysohns Lemma. Um es überhaupt formulieren zu können wenden wir uns zuerst einer Variante der Hausdorff-Begriffs zu.

Wir erinnern, dass sich der Umgebungsbegriff erweitern lässt: eine **Umgebung** V einer beliebigen Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ ist eine Obermenge einer offenen Menge $O \in \mathcal{T}$, welche die Teilmenge enthält, es gilt also $A \subset O \subset V$.

Definition 1.20.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **normal** wenn es für je zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte Umgebungen U von A und V von B gibt.

Vorsicht: Die Literatur ist uneinheitlich. Manchmal wird zusätzlich verlangt, dass normale Räume Hausdorff sind. Es kursiert auch der Begriff T4, in unserer Konvention bezeichnet er normale Hausdorffsche Räume, anderswo wird er für diejenigen Räume verwendet, die wir normal nennen.

Solange alle Punkte abgeschlossen sind (diese Eigenschaft heißt T1), folgt die Hausdorff-Eigenschaft sofort aus Normalität.

Wir erinnern uns, dass sich die Hausdorff-Eigenschaft auf beliebige Teilmengen vererbt, vgl. Satz 1.12.4. Allgemeine Teilmengen normaler Räume müssen hingegen nicht normal sein! Abgeschlossene Teilmengen normaler Räume hingegen sind normal. (Der Beweis ist Routine.)

Auch Produkte normaler Räume sind nicht immer normal. Die Gegenbeispiele sind recht kompliziert, siehe Abschnitt 6B in von Querenburg.

Wir werden in Kürze sehen, dass alle metrischen Räume normal sind. Eine weitere wichtige Klasse von normalen Räumen ist die folgende.

Satz 1.20.2. *Jeder kompakte Hausdorffraum X ist normal.*

Beweis. Seien A, B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X ; sie sind nach Satz 1.16.5 beide kompakt. Weil X Hausdorffsch ist, finde für jedes Paar $a \in A$ und $b \in B$ disjunkte offene Umgebungen U_{ab} von a und V_{ab} von b . Dann hat für festes $a \in A$ die offene Überdeckung $\cup_{b \in B} V_{a,b}$ der kompakten Menge B eine endliche offene Teilüberdeckung $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$. Dann ist der endliche Durchschnitt $\cap_{i=1}^n U_{a,b_i}$ eine offene Umgebung von a , die disjunkt zur offenen Menge $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$ ist, die B enthält. Man kann also B und jeden Punkt $a \in A$ durch offene Umgebungen trennen. Nach Lemma 1.16.8 kann man dann auch A und B durch offene Mengen trennen, also ist X normal. $\square$

Wir erreichen nun das zweite zentrale Theorem der mengentheoretischen Topologie. Urysohns Lemma erlaubt die Konstruktion von zahlreichen (reellwertigen) Funktionen auf einem beliebigen normalen Raum. Das ist ein sehr mächtiges Resultat. Zum Beispiel lässt sich mithilfe von Urysohns Lemma zeigen, dass alle normalen Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis metrisierbar sind, oder dass man kompakte Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ einbetten kann.

Theorem 1.20.3 (Urysohns Lemma). *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal wenn gilt: Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B existiert eine stetige reellwertige Funktion*

$$f : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} ,$$

so dass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Man nennt eine solche Funktion eine Urysohn-Funktion.

Beweis. Nehmen wir zuerst 2. an. Dann ist X normal, denn für jede Urysohn-Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ trennen die disjunkten offenen Umgebungen

$$A \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \quad \text{und} \quad B \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

die abgeschlossenen Teilmengen A und B .

Wir wenden uns nun dem deutlich schwierigeren zweiten Teil zu.

Wir nennen eine endliche Kette von Teilmengen

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k \subset X \setminus B$$

zulässig, wenn $\overline{A_{i-1}} \subset \overset{\circ}{A}_i$ und $\overline{A_k} \subset X \setminus B$ gilt.

Ist X normal und sind A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen, so existiert jedenfalls eine zulässige Kette der Länge $k = 1$: finde disjunkte Umgebungen $A \subset U$ und $B \subset V$. Dann gilt

$$A \subset \overset{\circ}{U} \subset \overline{U} \subset X \setminus B .$$

Die erste Inklusion gilt, weil U Umgebung von A ist; die dritte Inklusion, weil die Teilmenge $X \setminus \overset{\circ}{V} \subset X \setminus B$ in X abgeschlossen ist und daher $\overline{U} \subset X \setminus \overset{\circ}{V}$ gilt.

Gegeben eine zulässige Kette, können wir eine zulässige Kette

$$A = A_0 \subset A'_0 \subset A_1 \subset A'_1 \dots \subset A_k \subset A'_k \subset X \setminus B$$

doppelter Länge finden, indem wir das Argument auf die disjunkten abgeschlossenen Mengen $\overline{A_{i-1}}$ und $X \setminus \overset{\circ}{A}_i$ anwenden.

Nachdem wir n -mal verfeinert haben, erhalten wir eine zulässige Kette $\mathcal{A}_n = (A_0^n \subset A_1^{(n)} \subset \dots \subset A_{2^n-2}^{(n)} \subset A_{2^n-1}^{(n)})$. Wir definieren noch $A_{2^n}^{(n)} := X$ und $A_{-1}^{(n)} := \emptyset$ um uns spätere Fallunterscheidungen zu ersparen.

Für jedes $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren wir nun eine Treppenfunktion $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ durch

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{für} \quad x \in A_k \setminus A_{k-1}.$$

Die Funktionenfolge ist monoton fallend und beschränkt, konvergiert also punktweise gegen eine Grenzfunktion f . Da $A \subset A_0$, ist f konstant 0 auf A und ebenso konstant 1 auf B .

Es bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktion f stetig ist. Dazu beachte, dass für jedes $x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-(n+1)}.$$

In der Kette $\mathcal{A}_n$ gilt für $x, y \in U := \overset{\circ}{A}_k \setminus \overline{A_{k-1}}$

$$f_n(x) = f_n(y).$$

Damit folgt für solche x, y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \sum_{k=n+1} 2^{-k} + 0 + \sum_{k=n+1} 2^{-k} \end{aligned}$$

und somit ist U eine Umgebung von x mit $f(U) \subset B_{3 \cdot 2^{-n}}(f(x))$. Also ist f stetig in x . $\square$

Das folgende Korollar folgt aus der einfachen Richtung von Urysohns Lemma.

Korollar 1.20.4. *Metrische Räume sind normal.*

Beweis. Sie haben in Übung 1.3(c) eine Urysohn-Funktion für abegeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes konstruiert! Aus Theorem 1.20.3 folgt nun, dass X normal ist. $\square$

1.21 Kategorien

Wir wollen die Konstruktion von Produkt und Koprodukt und die entscheidende Rolle der universellen Eigenschaften verallgemeinern und besser verstehen. Das ist Gegenstand der Kategorientheorie.

Definition 1.21.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

- eine Klasse von **Objekten** $\text{Ob}(\mathcal{C})$,
- für jedes Paar von Objekten $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Klasse von **Morphismen** $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (manchmal auch Pfeile genannt),
- für jedes Objekt X einen ausgezeichneten Morphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, die **Identität**,

- für je drei Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine **Verknüpfung** $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$,

so dass gilt:

- die Verknüpfung ist assoziativ: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- die Identität ist eine Identität für die Verknüpfung: $\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X$ für $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Wenn $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dann nennen wir X die **Quelle** und Y das **Ziel** von f .

Beispiele 1.21.2.

1. Mengen und Abbildungen formen eine Kategorie, die wir mit **Set** bezeichnen.
2. Topologische Räume und stetige Abbildungen formen eine Kategorie, die wir mit **Top** bezeichnen.
3. In der Algebra finden wir viele weitere Kategorien: Gruppen und Homomorphismen formen eine Kategorie **Group**, Vektorräume und lineare Abbildungen formen die Kategorie **Vect**, auch abelsche Gruppen, Ringe, Körper etc. formen Kategorien.
4. Es gibt eine Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismen. Allgemein heißt eine Kategorie **diskret** wenn die einzigen Morphismen die Identitäten sind. Jede Menge I kann auch als diskrete Kategorie **I** mit $\text{Ob}(\mathbf{I}) = I$ aufgefasst werden.
5. Es gibt eine Kategorie $(\mathbb{N}, \leq)$ deren Objekte die natürlichen Zahlen sind und $\text{Hom}_{\mathbb{N}}(i, j)$ hat genau ein Element, wenn $i \leq j$ und sonst kein Element.
6. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es eine **duale Kategorie** $\mathcal{C}^{op}$ mit den gleichen Objekten, $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ und $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f$. $\mathcal{C}^{op}$ entsteht also aus $\mathcal{C}$, indem wir alle Pfeile umdrehen.

Definition 1.21.3. Ein Morphismus $f : C \rightarrow D$ heißt Isomorphismus, wenn es $g : D \rightarrow C$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_C$ und $f \circ g = \text{id}_D$.

Homöomorphismen und (Gruppen-)Isomorphismen sind Beispiele. In allen Kategorien werden wir isomorphe Objekte als äquivalent betrachten.

Bemerkung 1.21.4. Da wir Kategorien wie die Kategorie aller Mengen betrachten wollen, ist es wichtig, dass wir nicht nur eine Menge sondern eine Klasse von Objekten zulassen. Man kann auch Hierarchen von Mengen verwenden, so genannte *Universen*. Wir werden uns in diesem Kurs nicht weiter für diese Grundlagenfragen interessieren.

Wenn eine Kategorie eine Menge von Objekten und Morphismen hat, dann sprechen wir von einer **kleinen Kategorie**.

Beispiel 1.21.5. Eine kleine Kategorie in der es zwischen je zwei Objekten höchstens einen Morphismus gibt, und in der jeder Isomorphismus eine Identität ist, heißt **partielle Ordnung**. Die Verknüpfung ist dann eindeutig von den Morphismen bestimmt (da es nur eine Funktion in eine Menge mit einem Element gibt). Ein Beispiel ist die Kategorie $\mathbb{N}$ auf Beispiel 1.21.2.5.

Wir kennen eine partielle Ordnung schon als Relation $\leq$, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Man kann zeigen, dass die beiden Begriffe äquivalent sind.

Ein wichtiger Impetus zum Studium von Kategorien ist die Beobachtung, dass wir mathematische Objekte oft am besten durch die Abbildungen zwischen ihnen verstehen. Das gleiche Prinzip gilt natürlich für Kategorien.

Definition 1.21.6. Ein **Funktor** F zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus den folgenden Daten:

- eine Abbildung, die jedem $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ zuweist
- für jedes Paar von Objekten $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung von $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ nach $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, die wir als $f \mapsto F(f)$ schreiben,

so dass gilt:

- F ist kompatibel mit Verknüpfungen: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,
- F bewahrt Identitäten: $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.

Beispiele 1.21.7.

1. Eine Familie topologischer Räume $(X_i)_{i \in I}$ ist genau ein Funktor von I , betrachtet als diskrete Kategorie, nach **Top**.

Die einzigen Morphismen in I sind die Identitäten, und $X(\text{id}_i) = \text{id}_{X_i}$ nach Definition 1.21.6. Also brauchen wir nur den ersten Teil der Definition eines Funktors, und das ist eine Familie von Objekten.

2. Für jeden topologischen Raum X sei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten. Wir haben im Beweis von Satz 1.14.8 gesehen, dass jede stetige Abbildung eine Abbildung von Wegkomponenten induziert und π_0 so zum Funktor **Top** $\rightarrow$ **Set** wird.
3. Von jeder Kategorie, deren Objekte eine zugrundeliegende Menge haben (z.B. **Top**, **Group**, **Vect**) gibt es einen **Vergessfunktor** nach **Set**, der alle zusätzliche Struktur vergisst und nur die zugrundeliegende Menge betrachtet.

Es gibt nun eine Kategorie der Kategorien, deren Objekte kleine Kategorien sind und deren Morphismen Funktoren sind. Hier beschränken wir uns auf kleine Kategorien, um die üblichen mengentheoretischen Paradoxa zu vermeiden.

1.22 Limes und Kolimes

Wir haben bereits verschiedene Konstruktionen mit universellen Eigenschaften getroffen, zum Beispiel Produkte und Quotienten von topologischen Räumen. Diese Eigenschaften lassen sich im folgenden Begriff zusammenfassen:

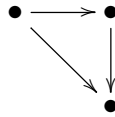
Definition 1.22.1. Sei I eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein **Diagramm** über I in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D : I \rightarrow \mathcal{C}$.

Beispiele 1.22.2. 1. Sei I eine diskrete Kategorie. Dann ist ein Diagramm über I in $\mathcal{C}$ genau eine Familie von Objekten in $\mathcal{C}$ mit Indexmenge I .

2. Ein "kommutatives Diagramm" wie z.B.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & (M, \mathcal{T}) \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{array}$$

ist ein Funktor aus der folgenden Kategorie mit drei Objekten und drei Morphismen, die nicht Identitäten sind:



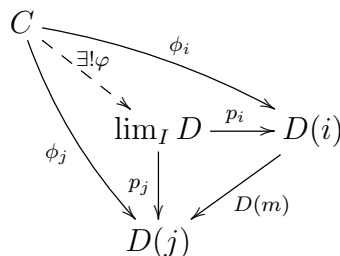
Da es nur einen Morphismus von links oben nach rechts unten gibt, ist die Verknüpfung $f_i \circ g$ gleich der diagonalen Abbildung.

Definition 1.22.3. Sei D ein Diagramm. Ein **Kegel** von $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ auf D ist eine Familie $\phi_i : C \rightarrow D(i)$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ so dass für jeden Morphismus $m : i \rightarrow j$ in I gilt $D(m) \circ \phi_i = \phi_j$.

Ein **Limes** für das Diagramm D ist ein Kegel $(p_i : L \rightarrow D(i))_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ so dass für jeden Kegel $(\phi_i : C \rightarrow D(i))$ auf D genau einen Morphismus $\varphi : C \rightarrow L$ gibt so dass $\phi_i = p_i \circ \varphi$ für alle i .

Wir nennen dann auch L einen Limes für D und schreiben $L = \lim_I D$.

Als Diagramm, sieht das so aus:



Ein Limes ist also ein universeller Kegel.

Wir schreiben in einem Diagramm D oft D_i für $D(i)$. Des weiteren schreiben wir $\lim_I D_i$. Diese Schreibweise ist etwas gefährlich, da sie die Morphismen zwischen den D_i unterdrückt, die für den Limes natürlich sehr wichtig sind.

Wir interessieren uns vor allem für Fälle in denen die Kategorie I eine recht einfache Struktur hat.

Ein wichtiges motivierendes Beispiel ist das folgende:

Beispiel 1.22.4. Sei I eine diskrete Kategorie und X ein Diagramm über D in **Top**. Dann ist nach Satz 1.9.6 $\prod_{i \in I} X_i$ ein Limes für X . Betrachten wir ein Diagramm über I in **Set** dann ist genauso $\prod_{i \in I} X_i$ ein Limes für X .

Wie jede universelle Konstruktion ist auch der Limes eindeutig – wenn er existiert. Wir benutzen deswegen auch den bestimmten Artikel.

Satz 1.22.5. Seien L und L' Limites für ein Diagramm D . Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus zwischen L und L' .

Beweis. Nach Definition eines Limes gibt es $p : L \rightarrow L'$ und $q : L' \rightarrow L$ die mit allen Morphismen $L \rightarrow D(i)$ und $L' \rightarrow D(i)$ kompatibel sind. Dann ist aber auch $q \circ p : L \rightarrow L$ mit allen Morphismen kompatibel. Nach Definition gibt es genau einen Morphismus $L \rightarrow L$ mit dieser Eigenschaft. Es ist aber klar, dass id_L diese Eigenschaft hat. Also ist $p \circ q = \text{id}_L$. Genauso ist $q \circ p = \text{id}_{L'}$ und p ist ein Isomorphismus. $\square$

Wir sprechen hier auch von einem **kanonischen** Isomorphismus, was allgemein bedeutet, dass wir bei der Konstruktion des Isomorphismus keine Wahl hatten.

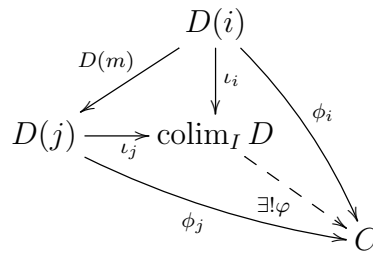
Man kann in der Definition eines Limes alle Morphismen umdrehen (man spricht von der *dualen* Definition) und erhält die Definition eines **Kolimes**.

Definition 1.22.6. Sei I eine kleine Kategorie, $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und D ein Diagramm über I in $\mathcal{C}$. Ein **Kokegel** von $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ auf D ist eine Familie $\phi_i : D(i) \rightarrow C$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ so dass für jeden Morphismus $m : i \rightarrow j$ in I gilt $\phi_j \circ D(m) = \phi_i$.

Ein **Kolimes** für das Diagramm D ist ein Kokegel $(\iota_i : D(i) \rightarrow K)_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ so dass für jeden Kokegel $(\phi_i : D(i) \rightarrow C)$ auf D genau einen Morphismus $\varphi : K \rightarrow C$ gibt so dass $\phi_i = \varphi \circ \iota_i$ für alle i .

Wir nennen dann auch K einen Kolimes für D und schreiben $K = \text{colim}_I D$.

Als Diagramm:



Auch der Kolimes ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Satz 1.22.7. Seien K und K' Kolimites für ein Diagramm D . Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus zwischen K und K' .

Beweis. Wie für Satz 1.22.5. $\square$

Beispiel 1.22.8. Sei I eine diskrete Kategorie. Wir schreiben ein Diagramm $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ über I als Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ von Objekten. Wir nennen das Kolimes von X auch das **Koprodukt**.

Für X in **Set** ist $\text{colim}_I X$ die disjunkte Vereinigung der X_i .

Für X in **Top** ist nach Satz 1.10.5 $\text{colim}_I X \cong \coprod_{i \in I} X_i$, die disjunkte Vereinigung mit der Summentopologie.

1.23 Limes und Kolimes von topologischen Räumen

Wir lassen nun die allgemeine Theorie hinter uns und studieren. Wir werden alle Limes und Kolimes in **Top** über partiellen Ordnungen explizit berechnen. (Der allgemeine Fall ist nicht viel schwieriger.)

Sei also I eine partielle Ordnung. Wir schreiben $i \leq j$ wenn es einen Morphismus von i nach j gibt.

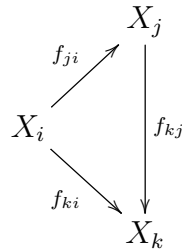
Sei X ein Diagramm über I . Per definition ist dies ein Funktor $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$ und besteht aus

- einem topologischen Raum X_i für jedes $i \in I$,
- einer stetigen Abbildung

$$f_{ji} : X_i \rightarrow X_j \quad \text{für alle } i \leq j,$$

so dass gilt:

- $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$ für alle $i \in I$,
- $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$ für alle $i \leq j \leq k$.



Wir betrachten nun auf der Summe $\coprod_{i \in I} X_i$ die Äquivalenzrelation mit $(x_i, i) \sim (f_{ji}(x_i), j)$ für $i \leq j$ und $(f_{ji}x_i, j) \sim (x_i, i)$ für $i \leq j$. (Es ist leicht zu sehen, dass diese Relation transitivität und Reflexivität erfüllt.)

Wir definieren temporär den topologische Raum

$$\text{colim}'_I X_i = \coprod_{i \in I} X_i / \sim$$

mit der Quotiententopologie aus Definition 1.11.1.

Man beachte, dass sowohl die topologische Summe nach Definition 1.10.3 als auch der Quotientenraum nach Definition 1.11.1 mit einer Finaltopologie versehen sind.

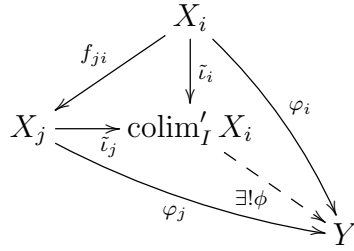
Satz 1.23.1. *Sei I eine partielle Ordnung und $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$ ein Diagramm. Dann ist $\text{colim}'_I X_i$ der Kolimes von X .*

Wir schreiben noch einmal aus, was das bedeutet. Sei Y ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie $(X_i \xrightarrow{\varphi_i} Y)_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen mit $\varphi_j \circ f_{ji} = \varphi_i$ für alle $i \leq j$ genau eine stetige Abbildung

$$\phi : \text{colim}'_I X_i \rightarrow Y$$

mit $\phi \circ f_{ij} = \varphi_j$.

Als Diagramm, mit $i \leq j$,



Beweis. Wir stellen zuerst aus den Definitionen fest, dass $\text{colim}'_I X_i$ die korrekte universelle Eigenschaft für Mengen hat: Für $[x_i] \in \text{colim}'_I X_i$ definieren wir $\phi[x_i] = \phi_i(x_i)$. Falls $[x_i] = [x_j]$ mit $f_{ij}(x_j) = x_i$ dann ist $\phi_i(x_i) = \phi_i \circ f_{ij}(x_j) = \phi(x_j)$. Also ist ϕ wohldefiniert. Da $\phi_i = \phi \circ \tilde{t}_i$ gelten muss, ist die Funktion eindeutig.

Wir müssen nun prüfen, dass ϕ stetig ist, wenn alle ϕ_i stetig sind. In der Definition

$$\tilde{t}_j : X_j \xrightarrow{\iota_j} \coprod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\pi} \coprod_{i \in I} X_i / \sim = \text{colim}'_I X_i$$

treten zweimal Finaltopologien auf, so dass colim' die Finaltopologie bezüglich den $\tilde{t}_j$ hat. Die universelle Eigenschaft aus Satz 1.10.2 garantiert, dass ϕ stetig ist. Damit erfüllt colim' die universelle Eigenschaft für topologische Räume. $\square$

Der Beweis zeigt auch, dass die Abbildungen $\tilde{t}_j : X_j \rightarrow \text{colim}'_I X_i$ stetig sind.

Beispiele 1.23.2.

1. Sei $I = (\mathbb{N}, \leq)$. Dann ist ein Diagramm über I eine aufsteigende Kette $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$. Nehmen wir weiterhin an, dass jedes $X_i \rightarrow X_{i+1}$ eine Einbettung ist, dann ist unser Diagramm eine aufsteigende Kette $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ und es ist

$$\text{colim}_{\mathbb{N}} X_i = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i ,$$

der Kolimes ist also die Vereinigung mit der Finaltopologie.

2. I kann die leere Kategorie sein. Dann ist X das leere Diagramm. Also ist jedes Objekt ein Kokegel und der Kolimes K hat die universelle Eigenschaft, dass es für jedes Objekt Y genau einen Morphismus $K \rightarrow Y$ gibt. Es gilt also $\text{colim}_{\emptyset} = \emptyset$.

In allgemeinen Kategorien nennt man den Kolimes über die leere Kategorie auch ein **initiales Objekt**.

3. Betrachte die partielle Ordnung $I = \{0, 1, 2\}$ mit Morphismen $0 \leq 1$ und $0 \leq 2$, aber $1 \not\leq 2$. Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{f_{10}} & X_1 \\
 f_{20} \downarrow & & \\
 X_2 & &
 \end{array}$$

Der Kolimes über I heißt auch **pushout**.

Nehmen wir nun an, dass $X_0 \subset X_1$ ein abgeschlossener Unterraum ist und benennen Objekte und Morphismen um.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & X \\ f \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{colim} X_i &= A \amalg X \amalg Y / (a,0) \sim (a,1) \sim (f(a),2) \\ &= X \amalg Y / (a,1) \sim (f(a),2) \\ &= X \cup_f Y. \end{aligned}$$

Das ist genau die Verklebung entlang f aus Definition 1.15.3.

4. Setze wieder $I = (\mathbb{N}, \leq)$. Wir betrachten $X_n := \mathbb{S}^n$ und $X_n \rightarrow X_{n+1}$ ist die Einbettung, die $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Äquator von $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ auffasst,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $\mathbb{S}^\infty := \operatorname{colim} \mathbb{S}^n$.

5. Ein (allgemeiner) **CW-Komplex** ist der Kolimes von $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ wobei X_0 diskret ist und jedes X_n die Form $X_{n-1} \cup_f D_{I_n}^n$ hat, für eine stetige Funktion $f : \amalg_{i \in I_n} \partial \mathbb{D}^n \rightarrow X_{n-1}$. I_n kann leer sein und dann ist $X_n = X_{n-1}$.

Jedes X_n ist dann ein CW-Komplex, vgl. Beispiel 1.15.7, und X ist endlich-dimensional wenn das Systems schließlich konstant ist.

CW steht für *closure-finite weak-topology*. Closure-finite bedeutet dass der Abschluss jeder Zelle von endlich vielen offenen Zellen überdeckt wird. Weak topology bezieht sich auf folgende Charakterisierung der Topologie: Eine Teilmenge von X ist dann genau dann abgeschlossen, wenn sie den Abschluss jeder Zelle in einer abgeschlossenen Teilmenge schneidet.

$\mathbb{S}^\infty$ aus dem vorherigen Beispiel kann als unendlich-dimensionaler CW-Komplex $\mathbb{S}^\infty = \amalg_{\mathbb{N}} (e^n \amalg e^n)$ aufgefasst werden.

Wir berechnen Limites dual:

Definition 1.23.3. Sei $Y : I \rightarrow \mathbf{Top}$ ein Diagramm über einer partiellen Ordnung. Wir schreiben g_{ji} für $Y(i \leq j)$. Wir definieren

$$\lim_I' Y_i = \{(y_i)_{i \in I} \text{ mit } y_j = g_{ji}(y_i) \text{ für alle } i \leq j\},$$

mit der Unterraumtopologie. Dies ist der Unterraum der “kompatiblen Elemente” im Produkt $\prod_{i \in I} Y_i$.

Man beachte, dass sowohl das Produkt nach Definition 1.9.4 als auch der Unterraum nach Definition 1.6.1 mit einer Initialtopologie versehen sind.

Vollkommen analog zu Satz 1.23.1 kann man beweisen:

Satz 1.23.4. Sei I eine partielle Ordnung und $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$ ein Diagramm. Dann ist $\lim'_I X_i$ der Limes von X .

Beispiele 1.23.5.

1. Für $I = \emptyset$ gilt $\lim_\emptyset = *$, der topologische Raum mit einem Punkt. Der Limes über ein leeres Diagramm heißt auch das **finale Objekt**.
2. Betrachte $I = \{0, 1, 2\}$ mit $1 \leq 0, 2 \leq 0$, aber $2 \not\leq 1$. Dies ist die duale Kategorie zu I aus Beispiel 1.23.2.4. (Da Kolimes und Limes dual sind, ist es oft interessant den Limes über einem Diagramm I und den Kolimes über dem dualen Diagramm I^{op} zu betrachten.)

Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \downarrow g_{02} & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0 \end{array}$$

Der Limes

$$\lim_I Y_i \cong \{(y_0, y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = y_0 = g_{01}(y_1)\} \cong \{(y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = g_{01}(y_1)\}$$

ist das **Faserprodukt** $Y_1 \times_{Y_0} Y_2$ oder der **pullback** von Y_1 und Y_2 über Y_0 . Wir schreiben

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \times_{Y_0} Y_2 & \longrightarrow & Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow g_{02} \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0 \end{array}$$

3. Sei (X, x_0) ein topologischer Raum mit Grundpunkt und PX die Menge aller Wege, die in $x_0 \in X$ starten. Als Unterraum von $\text{Map}([0, 1], X)$ ist dies nach Definition 1.19.1 ist PX ein topologischer Raum.

PX ist auch der Limes von

$$\begin{array}{ccc} & \text{Map}([0, 1], X) & \\ & \downarrow ev_0 & \\ \{x_0\} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Wir beachten, dass die Abbildung ev_0 , die einem Weg $w : [0, 1] \rightarrow X$ seinen Anfangspunkt zuordnet, $ev_0(w) := w(0)$, nach Korollar 1.19.5 stetig ist.

Betrachte nun den Pullback von

$$\begin{array}{ccc} & PX & \\ & \downarrow ev_1 & \\ \{x_0\} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dies ist

$$\lim_I Y_i = \{(w, x_0) \in PX \times \{x_0\} \mid w(1) = x_0\},$$

also der Raum aller Wege in X , die in x_0 anfangen und aufhören. Wir nennen dies den **Schleifenraum** von (X, x_0) , geschrieben $\Omega(X, x_0)$.

4. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte Primzahl. Wir betrachten das Diagramm über $(\mathbb{N}, \leq)^{op} = (\mathbb{N}, \geq)$

$$\left(\mathbb{Z}/p \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}/p^2 \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/p^3 \xleftarrow{\quad} \dots \right)$$

mit den üblichen Projektionen $\mathbb{Z}/p^{n+1} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}/p^n$. Wir versehen hierbei $\mathbb{Z}/p^n$ mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n, \pi_n(x_{n+1}) = x_n\} \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n.$$

Dies ist die Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ mit der p -adischen Metrik aus Übungsaufgabe 1.4!

Obwohl alle $\mathbb{Z}/p^n$ diskret sind ist $\mathbb{Z}_p$ nicht diskret!

Wir nennen $\mathbb{Z}_p$ die ganzen p -adischen Zahlen. Sie haben nicht nur eine Topologie, sondern auch eine (kompatible) Ringstruktur.

2 Einführung in die algebraische Topologie

2.1 Homotopien

Im folgenden seien X, Y, Z topologische Räume. Abbildungen $f, g, H, \dots$ seien stetig, wenn nichts anderes vorausgesetzt wurde. Mit $I = [0, 1]$ bezeichnen wir das Standard-Intervall.

Definition 2.1.1.

1. Eine **Homotopie** ist eine (stetige) Abbildung

$$H : X \times I \rightarrow Y .$$

2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **homotop** zu einer Abbildung $g : X \rightarrow Y$, wenn es eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ gibt mit $f(x) = H(x, 0)$ und $g(x) = H(x, 1)$ für alle $x \in X$. Wir schreiben dann $f \simeq g$ und betrachten die durch das Intervall I parametrisierte Familie von Abbildungen $H_t : X \rightarrow Y$ mit $H_t(x) = H(x, t)$.

Beispiel 2.1.2. Wenn X ein Punkt ist dann ist eine Homotopie genau ein Weg in Y .

Sei $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die übliche Inklusion und $c_0 : S^1 \rightarrow (0, 0)$ die konstante Funktion. Dann ist $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $H(z, t) = (1 - t)z$ eine Homotopie von ι nach c_0 .

Wir werden auch zukünftig c_y für die Abbildung $X \rightarrow Y$ schreiben, die konstant den Wert $y \in Y$ annimmt.

Lemma 2.1.3. *Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Es gilt $f \simeq f$, wegen der konstanten Homotopie $H(x, t) = f(x)$ für alle $t \in I$. Gilt $f \simeq g$ mit Homotopie $H(x, t)$, so ist $\tilde{H}(x, t) := H(x, 1 - t)$ eine Homotopie von g nach f .

Sei H Homotopie von f nach g und H' von g nach h . Dann ist

$$H''(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h . □

Definition 2.1.4. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die Äquivalenzklasse

$$[f] := \{g : X \rightarrow Y \mid g \simeq f\}$$

heißt die **Homotopieklasse** von f .

Die **Homotopiemenge** von zwei topologischen Räumen X, Y ist die Menge von Homotopieklassen von Abbildungen

$$[X, Y] := \{[f] \mid f : X \rightarrow Y\} .$$

Lemma 2.1.5. *Seien $f, g : X \rightarrow Y$ Abbildungen mit $f \simeq g$ und seien $k, h : Y \rightarrow Z$ Abbildungen mit $k \simeq h$. Dann ist $k \circ f \simeq h \circ g$.*

Beweis. Ist $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g , so ist

$$k \circ H : X \times I \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{k} Z$$

eine Homotopie von $k \circ f$ nach $k \circ g$. Ebenso ist

$$H' \circ (f \times \text{id}) : X \times I \xrightarrow{f \times \text{id}} Y \times I \xrightarrow{H'} Z$$

eine Homotopie von $k \circ f$ nach $h \circ f$ wenn H' eine Homotopie von k nach h ist. Dank der Transitivität von $\simeq$ vervollständigt dies den Beweis. $\square$

Definition 2.1.6. Gegeben

$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} Z$$

haben wir wegen Lemma 2.1.5 wohldefinierte Abbildungen

$$\begin{aligned} k_* : [X, Y] &\rightarrow [X, Z] \\ [f] &\mapsto [k \circ f] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h^* : [X, Y] &\rightarrow [W, Y] \\ [f] &\mapsto [f \circ h] \end{aligned}$$

Korollar 2.1.7. Für $k_1 \simeq k_2 : Y \rightarrow Z$ gilt $(k_1)_* = (k_2)_*$. Für $h_1 \simeq h_2 : W \rightarrow X$ gilt $(h_1)^* = (h_2)^*$.

Mit Notation wie in der Definition gilt auch $k_* \circ f_* = (k \circ f)_* : [W, X] \rightarrow [W, Z]$ und $h^* \circ f^* = (f \circ h)^* : [Y, Z] \rightarrow [W, Z]$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Lemma 2.1.5.

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition. $\square$

Definition 2.1.8.

1. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homotopieäquivalenz**, falls es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y .$$

Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation dank Lemma 2.1.5.

Die topologischen Räume X, Y heißen dann **homotopieäquivalent**, in Zeichen $X \simeq Y$.

2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **nullhomotop**, falls f homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Es gibt also einen Punkt $y_0 \in Y$ und eine Homotopie $f \simeq c_{y_0}$. Wir schreiben dann $f \simeq *$.
3. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn id_X nullhomotop ist. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ mit $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$. Wir schreiben dann $X \simeq *$.

Beispiele 2.1.9.

1. Jeder Homöomorphismus ist auch eine Homotopieäquivalenz.
2. Der $\mathbb{R}^n$ ist in Bezug auf jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar. Eine Homotopie ist

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0 .$$

Genauso sind alle offenen oder abgeschlossenen Bälle in $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

3. Ein Raum ist genau dann zusammenziehbar, wenn er homotopieäquivalent zu einem Einpunktraum ist. Dazu betrachte die eindeutige Abbildung $f : X \rightarrow *$ und die Abbildung $g : * \rightarrow X$ mit $g(*) = x_0$. Dann ist $f \circ g = \text{id}_*$ und $g \circ f : X \rightarrow X$ die konstante Abbildung mit Wert x_0 , die wir mit c_{x_0} bezeichnen.

Da $fg = \text{id}_*$ ist X genau dann zusammenziehbar, wenn es eine Homotopie H von id_X zu $g \circ f$ gibt. Dies rechtfertigt die Notation $X \simeq *$ für einen zusammenziehbaren Raum.

4. Wir erinnern uns aus Beispiel 1.23.5.3 an PX , den Raum aller Wege in X , die von x_0 ausgehen, ausgestattet mit der KO-Topologie.

PX ist zusammenziehbar. Wir konstruieren eine Homotopie $H : PX \times I \rightarrow PX$ von der Identität zum konstant Pfad x_0 . Dafür definieren wir $H(w, t)(s) = w((1 - t)s)$. Es gilt $H(w, 0) = w$, $H(w, 1) \equiv w(0) = x_0$. Schließlich ist H stetig: Da $PX \subset \text{Map}(I, X)$ die Unterraumtopologie hat ist $H : PX \times I \rightarrow PX$ stetig genau wenn $PX \times I \rightarrow \text{Map}(I, X)$ stetig ist. Da I lokal kompakt ist, gilt dies nach Satz 1.19.4 genau dann der Fall, wenn $PX \times I \times I \rightarrow X$ stetig ist. Aber das ist die Verknüpfung von der stetigen Abbildung $s, t \mapsto (1 - t)s$ mit der Evaluierungsabbildung (eingeschränkt auf PX), die nach Korollar 1.19.5 stetig ist.

Wir können nun eine neue Kategorie definieren.

Definition 2.1.10. Die **Homotopie-Kategorie** hat als Objekte alle topologischen Räume und als Morphismen von X nach Y die Homotopiemenge. Wir schreiben kurz **hTop** und es gilt $\text{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X, Y) = [X, Y]$.

Es folgt aus Lemma 2.1.5 dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. Homotopie-Äquivalenzen sind genau Isomorphismen in **hTop** und es gilt:

Korollar 2.1.11. Gilt $X \simeq X'$, so haben wir für jeden topologischen Raum Y, Z Bijektionen

$$[X, Y] \cong [X', Y] \quad \text{und} \quad [Z, X] \cong [Z, X'] .$$

Beweis. Sei $f : X \simeq X'$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen g . Dann sind f_* und g_* inverse Abbildungen zwischen $[Z, X]$ und $[Z, X']$ dank Korollar 2.1.7. $\square$

Insbesondere gilt für $X \simeq *$, dass $||[W, X]|| = ||[W, *]|| = 1$ für alle topologischen Räume W . Es gilt auch $[X, W] \cong ||[* , W]|| \cong \pi_0(W)$ und damit ist nach Korollar 2.1.11 $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ immer wenn $X \simeq Y$ gilt.

Definition 2.1.12.

1. Eine Teilmenge $Y \subset X$ mit Einbettung $\iota : Y \rightarrow X$ heißt **Deformationsretrakt**, falls es einen Retrakt von X auf Y gibt, also $r : X \rightarrow Y$ mit $r \circ \iota = \text{id}_Y$ sodass $\iota \circ r \simeq \text{id}_X$.

Explizit gibt es also eine Abbildung

$$R : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit $R(x, 0) = x$ und $R(x, 1) \in Y$ für alle $x \in X$ und $R(y, 1) = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $R_1 \circ \iota = \text{id}_Y$ und $R_0 = \text{id}_X$ und $R_1(X) \subset Y$.

2. Gilt zusätzlich $r(y, t) = y$ für alle $t \in I$ und alle $y \in Y$, so heißt $Y \subset X$ **starker Deformationsretrakt**.

Beispiele 2.1.13.

1. Der Unterraum $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Deformationsretrakt, wie die Abbildung

$$r_t(x) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

zeigt. Es liegt sogar ein starker Deformationsretrakt vor.

2. Indem man ein Möbiusband auf seine Mittellinie zusammenzieht, sieht man, dass es homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$ ist. Genauso ist der Zylinder homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$. (Man beachte, dass Zylinder und Möbiusband nicht homöomorph sind. Das ist nicht trivial zu zeigen!)

Definition 2.1.14.

1. Sei $A \subset X$ und seien zwei Abbildungen $X \xrightarrow{f,g} Y$ gegeben mit $f|_A = g|_A$. f heißt **homotop** zu g **relativ** zu A , $f \simeq g \text{ rel } A$, falls es eine Homotopie H gibt mit

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X$$

und

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \text{ für alle } a \in A \text{ und } t \in I.$$

2. Für $A \subset X$ und $B \subset Y$ setzen wir

$$[X, A; Y, B] = \{[f] \mid f(A) \subset B, [\cdot] \text{ Homotopieklassen relativ zu } A\}.$$

Insbesondere ist also $Y \subset X$ ein starker Deformationsretrakt wenn $\iota \circ r_1$ homotop zu id_X ist relativ zu Y .

Wir werden bald wichtige Beispiele treffen.

2.2 Homotopieerweiterungseigenschaft

Um Homotopieäquivalenzen in der Praxis besser zu verstehen, würden wir gerne zusammenziehbare Unterräume zusammenziehen, ohne den Raum dabei allzu sehr zu verändern. Sei also $A \subset X$ und $A \simeq *$. Wann ist $X \simeq X/A$?

Man sieht leicht, dass A zumindest abgeschlossen sein sollte, aber auch das ist nicht genug. Betrachte zum Beispiel die topologische Sinuskurve aus Beispiel 1.14.9. Wenn wir den abgeschlossenen Teilraum X_2 kontrahieren dann ist X/X_2 wegzusammenhängend! Aber X ist nicht wegzusammenhängend.

Definition 2.2.1. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann sagen wir das Paar (X, A) hat die **Homotopieerweiterungseigenschaft**, wenn jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und Homotopie $h : A \times I \rightarrow Y$ mit $h_0 = f|_A$ auch eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$ gibt.

Lemma 2.2.2. (X, A) hat die Homotopieerweiterungseigenschaft genau dann, wenn $X \times \{0\} \cup A \times I$ in $X \times I$ ein Retrakt ist.

Beweis. Habe (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft. Insbesondere können wir also die Identität auf $X \times \{0\} \cup A \times I$ zu einer Homotopie $H : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ erweitern. Aber wegen $H \circ \iota = \text{id}_{X \times \{0\} \cup A \times I}$ ist dies genau ein Retrakt.

Umgekehrt sei $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ ein Retrakt und $f : X \rightarrow Y$ und $h : A \times I \rightarrow Y$ stetig mit $h_0 = f|_A$. Dann definierten f und h zusammen $F : A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$ und $F \circ r$ ist die gesuchte Homotopieerweiterung. $\square$

Die wichtigsten Beispiele für Paare mit dieser Eigenschaft sind eine relative Version der CW-Komplexe:

Definition 2.2.3. Sei X ein topologischer Raum und A ein abgeschlossener Unterraum so dass es eine Kette von Einbettungen $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots$ gibt sodass für jedes n gilt $X_n = X_{n-1} \cup_f D_J^n$ mit $D_J^n = \coprod_J \mathbb{D}^n$ und $f : \coprod_J \partial \mathbb{D}^n \rightarrow X_{n-1}$. Sei weiterhin $X = \text{colim } X_i$.

Dann heißt (X, A) ein relativer CW-Komplex.

Sei insbesondere X ein CW-Komplex. Dann ist jedes (X_{k+1}, X_k) ein relativer CW-Komplex und auch $(X, \emptyset)$ ist ein relativer CW-Komplex. (Hier kleben wir im ersten Schritt mit $n = 0$ eine Menge von Punkten entlang der leeren Abbildung von ihrem Rand.)

Beispiel 2.2.4. Wir betrachten den Raum $Y \subset \mathbb{R}^3$ gegeben als $S^2 \cup Y_0$, mit S^2 als Standardsphäre und $Y_0 = [-1, 1] \times \{0\} \times \{0\}$. Dann ist (Y, Y_0) ein relativer CW-Komplex.

Wir definieren Y_1 indem wir zwei 1-Zellen an Y_0 ankleben, so dass wir einen Kreis mit einer zusätzlichen Achse erhalten. Dann kleben wir zwei 2-Zellen an Y_1 und erhalten Y .

Da Y_0 ein CW-Komplex ist, ist auch Y ein CW-Komplex. Wir könnten aber auch Y_0 durch Y'_0 homöomorph zur Cantorschen Menge aus Übung 6.4 ersetzen. Dann ist $(S^2 \cup Y'_0, Y'_0)$ ein relativer CW-Komplex, obwohl keiner der beiden Räume ein CW-Komplex ist.

Satz 2.2.5. Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Dann ist $X \times \{0\} \cup A \times I$ in $X \times I$ ein Deformationsretrakt von $X \times I$. Insbesondere ist es ein Retrakt und die Inklusion $A \subset X$ hat die Homotopieerweiterungseigenschaft.

Beweis. Wir fixieren n und betrachten X_{n-1} und $X_n = X_{n-1} \cup_f D_J^n$ mit $D_J^n = \coprod_J \mathbb{D}^n$ und $f : \coprod_J \partial \mathbb{D}^n \rightarrow X_{n-1}$.

Nach Lemma 2.2.2 reicht es, einen Retrakt $r : X_n \times I \rightarrow X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I$ für die Inklusion $\iota : X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I \rightarrow X_n$ zu konstruieren, also eine stetige Abbildung r mit $r \circ \iota = \text{id}_{X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I}$.

Die Inklusion $\mathbb{D}^n \times \{0\} \cup \partial \mathbb{D}^n \times I \subset \mathbb{D}^n \times I$ hat einen Retrakt, zum Beispiel in dem wir $\mathbb{D}^n \times [0, 2]$ einbetten und dann vom Punkt $(0, 2)$ radial projizieren.

Dadurch erhalten wir auch einen Retrakt $r_n^{\mathbb{D}}$ von $D_J^n \times I$ nach $D_J^n \times \{0\} \cup \Pi_J \partial \mathbb{D}^n \times I$.

Nun ist $X_n \times I$ gegeben durch Ankleben von $D_J^n \times I$ an $X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I$ entlang $g : D_J^n \times \{0\} \cup \Pi_J \partial \mathbb{D}^n \times I \rightarrow X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I$. Wir definieren hier g auf $D_J^n \times \{0\}$ durch die Standardabbildung $p : D_J^n \times \{0\} \rightarrow X_n \times \{0\}$ und auf $\Pi_J \partial \mathbb{D}^n \times I$ durch $f \times \text{id}_I$.

$$\begin{array}{ccc} D_J^n \times \{0\} \cup \partial D_J^n \times I & \xrightarrow{g} & X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_J^n \times I & \longrightarrow & X_n \times I \end{array}$$

Wir definieren nun $r_n : X_n \times I \rightarrow X_n \times \{0\} \cup X_{n-1} \times I$ durch $r_n(x) = g(r_{\mathbb{D}}(y))$, wenn $x = g(y)$ ist mit y in $D_J^n \times I$ und $r(x) = x$ andernfalls.

Es bleibt zu prüfen, dass r_n wohldefiniert ist. Sei also $y \in \Pi_J \partial \mathbb{D}^n \times I$ und $x = g(y)$ in $X_n \times I$. Dann gilt $r_n x = g(r_n^{\mathbb{D}}(y)) = g(y) = x$. und die beiden Definitionen stimmen überein.

Es bleibt, $X = \text{colim } X_n$ zu betrachten. Wir benutzen den Homöomorphismus $X \times I \cong \text{colim}(X_n \times I)$ aus Übung 8.5 und müssen den Retrakt $X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ nur auf $X_n \times I$ definieren.

Wir definieren $x \mapsto r_0 r_1 \cdots r_n(x)$. Dies definiert den gewünschten Retrakt. $\square$

Satz 2.2.6. *Erfülle $A \subset X$ die Homotopieerweiterungseigenschaft. Dann ist die Quotientenabbildung $q : X \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Die Zusammenziehung von A definiert eine Abbildung $f : A \times I \rightarrow X$ mit $f_0 = \text{id}_A$ und $f_1 = c_a$ für ein festes $a \in A$.

Sei $H : X \times I \rightarrow X$ eine Homotopie, die f erweitert, mit $H_0 = \text{id}_X$. Da $q \circ H : X \times I \rightarrow X/A$ den Teilraum $A \times I$ auf einen Punkt zusammenzieht (denn $H(A \times I) \subset A$) gibt es eine Faktorisierung $q \circ H = \tilde{H} \circ q' : X \times I \rightarrow (X \times I)/(A \times I) \rightarrow X/A$.

Das ist noch nicht die richtige Abbildung, da wir eine Homotopie auf X/A definieren wollen. Wir faktorisieren als nächstes $q' : X \times I \rightarrow (X \times I)/(A \times I)$ als $r \circ q$ mit $q : X \times I \rightarrow X/A \times I$ und $r : X/A \times I \rightarrow (X \times I)/(A \times I)$. Man sieht leicht, dass dies eine Faktorisierung als Abbildung von Mengen ist. Weiterhin ist q per Definition stetig und man kann von Hand prüfen, dass r stetig ist: Sei U offen in $(X \times I)/(A \times I)$, dann ist $r^{-1}(U) = q(q'^{-1})(U)$ offen, da q' stetig ist und q eine offene Abbildung. (Ein eleganterer Beweis folgt aus einer Kombination von Übung 8.1(a) und 8.5(e).)

Dann definieren wir $\bar{H} = \tilde{H} \circ r$ und haben $q \circ H = \bar{H} \circ q$.

$H_1(A) = \{a\}$ ist ein Punkt, also können wir H_1 durch q faktorisieren und schreiben $H_1 = s \circ q$ faktorisieren mit $s : X/A \rightarrow X$. H gibt eine Homotopie $\text{id}_X \simeq s \circ q$.

Sei nun $\bar{x} \in X/A$ repräsentiert von $x \in X$. Es gilt $qs(\bar{x}) = qs(q(x)) = qH_1(x) = \bar{H}_1(q(x)) = \bar{H}_1(\bar{x})$. Also ist $qs = \bar{H}_1$ und da $\bar{H}_0 = \text{id}_{X/A}$ haben wir gezeigt, dass s und q eine Homotopieäquivalenz zwischen X und X/A formen. $\square$

Beispiel 2.2.7. Wir betrachten wieder den Raum $Y \subset \mathbb{R}^3$ aus Beispiel 2.2.4.

Sei außerdem $Z = S^2/\{N \sim S\}$, die Sphäre, in der wir zwei antipodale Punkte identifiziert haben.

Es gilt nun $Y \simeq Z$. Es ist klar, dass $Y/Y_0 \cong Z$, also folgt das gewünschte Resultat aus Satz 2.2.6 da (Y, Y_0) ein relativer CW-Komplex ist.

Mit ähnlichen Argumenten sieht man, dass $Y \simeq S^2 \vee S^1$.

A Erinnerungen und Ergänzungen

A.1 Das Zornsche Lemma

Sei S eine Menge. Wir erinnern an die folgenden Begriffe und Resultate der Mengenlehre:

- (i) Eine **partielle Ordnung** auf S ist eine Relation $x \leq y$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$x \leq x \quad \text{Reflexivität}$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \text{Transitivität}$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \quad \text{Antisymmetrie.}$$

- (ii) Eine **Totalordnung** auf S ist eine partielle Ordnung, für die je zwei Elemente vergleichbar sind:

$$x, y \in S \Rightarrow x \leq y \text{ oder } y \leq x.$$

- (iii) Sei S partiell geordnet, $T \subset S$ eine Teilmenge.

Ein Element $b \in S$ heißt eine **obere Schranke** der Teilmenge T , falls

$$x \leq b \text{ für alle } x \in T.$$

- (iv) Sei S partiell geordnet. Ein Element $m \in S$ heißt ein **maximales Element**, falls

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Das maximale Element muss nicht eindeutig sein. Als Beispiel betrachte die Menge der Ideale des Rings $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit Teilordnung durch Inklusion. In ihr sind alle Primideale (p) mit p Primzahl maximal.

- (v) Eine partiell geordnete Menge S heißt **induktiv geordnet**, falls jede nicht-leere, total geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke besitzt.

Lemma A.1.1 (Zornsches Lemma). *Sei S eine nicht-leere, induktiv geordnete Menge. Dann besitzt S maximale Elemente.*

Lemma A.1.2 (Ultrafilterlemma). *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Filter auf X , die feiner sind als ein gegebener Filter F_0 . Die Menge $\mathcal{F}$ wird durch Inklusion partiell geordnet. Ist $\mathcal{F}_0$ eine nicht-leere total geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$, so ist $\cup_{F \in \mathcal{F}_0} F$ ein Filter und eine obere Schranke von $\mathcal{F}_0$. Nach dem Zornschen Lemma A.1.1, gibt es ein maximales Element von $\mathcal{F}$, das per Definition ein Ultrafilter ist $\square$