

## Hörsaalübungsaufgaben zu komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen  $z_1 := \frac{(1+2i)^2}{2-i}$  und  $z_2 := \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ .

- Man ermittle Real- und Imaginärteil von  $z_1$  und die Polardarstellungen von  $z_1$  und  $z_2$ .
- Man bestimme  $z_2^6$ .
- Man gebe alle Lösungen der Gleichung  $(w+z_2)^3 = 1$  in kartesischen Koordinaten an.

### Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmenge in der komplexen Zahlenebene:

- $\{w \in \mathbb{C} : |w+z_2|^3 = |8i|\},$  mit  $z_2 := \sqrt{3} - i,$
- $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\},$
- $\{z \in \mathbb{C} : 9\operatorname{Re}(z^2) + 13(\operatorname{Im}(z))^2 = 36\},$
- $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi, 0 < |z|\}.$

**Aufgabe 3:**

- a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

- b) Für eine komplexe Zahlenfolge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z^*) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z^*).$$

**Aufgabe 4:**

- a) Man bestimme das Bild von  $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$  unter der durch  $f(z) = iz^2 + 2$  definierten Abbildung.

- b) Gegeben seien  $z_1 = 3 + \frac{\pi i}{4}$  und  $z_2 = 1 - \frac{\pi i}{2}$ . Man berechne

$$\exp(z_1), \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der  $e$ -Funktion in  $\mathbb{C}$ :

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

**Aufgabe 5:**

- a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus  $\ln$  und  $z_1 = -i$  und  $z_2 = -2i$  berechne man

$$\ln(z_1), \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

- b) Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von  $\sin z$  und bestimme alle Lösungen von  $\sin z = 2$ .

### Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion  $w = f(z) := \frac{1}{2} \left( \frac{z}{3} + \frac{3}{z} \right)$ .

- a) Man bestimme die Bilder
  - (i) des Kreises  $|z| = 3$ ,
  - (ii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) > 0$ ,
  - (iii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0$ .
- b) Man berechne die Umkehrfunktion  $z = f^{-1}(w)$  für  $|z| > 3$ .

### Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}.$$

- a) Man überprüfe, ob es sich bei  $T$  um eine Möbiustransformation handelt.
- b) Man berechne alle Fixpunkte von  $T$  in kartesischer und Polardarstellung.
- c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ .
- d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?
- e) Man berechne die Umkehrabbildung von  $T$ .

### Aufgabe 8:

- a) Man gebe eine Möbius-Transformation  $T$  an, mit:

$$T(0) = 0, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i.$$

- b) Liegen  $z_0 = -1-i, z_1 = 0, z_2 = -2$  und  $z_3 = i-1$  auf einem Kreis?
- c) Man zeichne den Kreis  $K : |z+1| = 1$  und die Punkte  $z_1 = 0, z_2 = -2, z_3 = i-1$ , sowie  $T(K)$  mit  $T(z_i)$  für  $i = 1, 2, 3$ .

**Aufgabe 9:**

- a) Für die Kreise  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2\}$  und  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3i| = 2\}$  berechne man die Punkte  $z_1$  und  $z_2$ , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man gebe eine Möbius-Transformation  $T$  an, mit:

$$T(i\sqrt{5}) = 0, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1.$$

- c) Zur imaginären Achse und den Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter  $T$ , gegebenenfalls mit ihren Radien.

**Aufgabe 10:**

Für  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = z^2$  berechne man

- a)  $A := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$  und
- b)  $B := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))$ .

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von  $f(z, \bar{z}) = z^2$  nach den unabhängigen Variablen  $z$  und  $\bar{z}$ , also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

**Aufgabe 11:**

- a) Man überprüfe, ob
- (i)  $f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$  holomorph ist,
  - (ii)  $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \operatorname{Im}(z) - 3i$  holomorph ist,
  - (iii)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$  harmonisch ist.

- b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion  $v(x, y)$ , d.h. eine Funktion  $v$ , für die die Funktion

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$  holomorph wird.

**Aufgabe 12:**

Gegeben seien die Kurven  $c_1(t) = t$  für  $t > 0$  und  $c_2(t) = 4e^{it}$  für  $-\pi < t < \pi$ .

- a) Man skizziere die Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in der  $z$ -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der  $w$ -Ebene gehen  $c_1$  und  $c_2$  unter dem Hauptwert von  $w = \sqrt{z}$  über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

**Aufgabe 13:**

- a) Man skizziere die beiden Kreise  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$  und  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$  und berechne die beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$ , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $T(z_1) = 0$  und  $T(z_2) = \infty$ .

- c) Man skizziere das Bild von  $K_1$  und  $K_2$  unter  $T$ , wenn noch  $T(0) = 1$  gilt.

**Aufgabe 14:**

Gegeben sei das durch die beiden Kreise  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$  und  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$  berandete beschränkte Gebiet  $D$ .

Man berechne eine auf  $D$  harmonische Funktion, die auf  $K_1$  den Wert 1 und auf  $K_2$  den Wert 2 annimmt.

*Hinweis:* Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 13 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

**Aufgabe 15:**

Man berechne

$$\text{a) } \int_0^1 (2 + 3it)^2 dt,$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{1 + it} dt,$$

$$\text{c) } \int_{c_i} \text{Im}(z) dz,$$

dabei ist  $c_1$  der geradlinige Weg, von  $z_1 = 1$  nach  $z_2 = i$ .  $c_2$  verbindet auch  $z_1$  und  $z_2$ , läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis  $c(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  berechne man

$$\text{(i) } \oint_c \bar{z} dz,$$

$$\text{(ii) } \oint_c z^2 dz.$$

**Aufgabe 16:**

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

$$\text{a) } \int_c z^3 + 4 dz \text{ entlang des geradlinigen Weges von } 1 - i \text{ nach } 1 + i,$$

$$\text{b) } \int_c ze^z dz \text{ für } c(t) = i\pi t \text{ mit } -1 \leq t \leq 0,$$

$$\text{c) } \int_{c_k} \frac{1}{z} dz \text{ für die Kurven } c_1(t) = it \text{ und } c_2(t) = e^{it} \text{ mit } \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4,$$

$$\text{d) } \int_1^i \ln z dz \text{ für } c(\varphi) = e^{i\varphi} \text{ (positiv orientiert).}$$

**Aufgabe 17:**

Man berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale, falls diese erklärt sind. Alle auftretenden Kurven werden einmal positiv orientiert durchlaufen.

$$\text{a) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4} dz,$$

$$\text{b) } \oint_c \frac{1}{z+2} dz, \quad c: |z+1-i| = 1,$$

$$\text{c) } \oint_{c_{1,2}} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2 + 2} dz, \quad c_1: |z| = 0.5, \quad c_2: |z| = 1.5,$$

$$\text{d) } \oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 5} dz,$$

$$\text{e) } \oint_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2 - iz + 6} dz, \quad c_1: |z| = 2.5, \quad c_2: |z-i| = 2.5,$$

$$\text{f) } \oint_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} dz, \quad c: |z-i| = 3.$$

**Aufgabe 18:**

Man berechne mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

$$\text{a) } \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz,$$

$$\text{b) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 2z^4} dz,$$

$$\text{c) } \oint_c z^2 + \frac{e^z}{z^2} dz, \quad c: |z| = \pi,$$

$$\text{d) } \oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5} dz, \quad c: |z-1-2i| = 2.$$

**Aufgabe 19:**

a) Man berechne die Taylorreihe von  $F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{5 - 3\xi}$  zum Entwicklungspunkt  $z_0 = 1$  und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten  $z_0$ , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

$$(i) \quad f(z) = \frac{3}{z^2 + 2z + 5}, \quad z_0 = i \text{ und } z_0 = 0,$$

$$(ii) \quad f(z) = \frac{2}{e^z - 1}, \quad z_0 = 2\pi(1 + i),$$

$$(iii) \quad f(z) = \frac{z}{\ln(3 - 2z)}, \quad z_0 = 0 \text{ und } z_0 = \frac{11}{8}.$$

**Aufgabe 20:**

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt  $z_0 = i$  an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

**Aufgabe 21:**

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten  $a_{-1}$  der Reihe an:

$$a) \quad f(z) = \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \quad \text{im Punkt } z_0 = 0,$$

$$b) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^5} \quad \text{im Punkt } z_0 = 0,$$

$$c) \quad f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z + \pi}\right) \quad \text{im Punkt } z_0 = -\pi.$$

**Aufgabe 22:**

Für die folgenden Funktionen

$$a) \quad f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2},$$

$$b) \quad f(z) = \sin \frac{1}{z},$$

c)  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2},$

d)  $f(z) = \coth z$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um  $z_0 = 0$ , die für große  $z$  konvergiert.

**Aufgabe 23:**

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}.$$

- a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von  $f$ .
- b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z) dz$$

für den Kreis  $c: |z + 2| = 2$ .

**Aufgabe 24:**

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx,$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx$  und

c)  $\int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}} dx,$

d)  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi} d\varphi.$