Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2016**
Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu

komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:
Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : \ |w + z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \ 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \ 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \ , \ 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i\,, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)\,.$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\,,\ 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\,,\ \exp(z_2) \ \text{ und } \ \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\,.$$

Aufgabe 5:

a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -i$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\,,\ \ln(z_2) \ \text{ und } \ \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

b) Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\,.$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 6:
Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{3} + \dfrac{3}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder
   (i) des Kreises $|z| = 3$,
   (ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$,
   (iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Aufgabe 7:
Für die Inversion $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = -1$,

b) des Strahls $\mathrm{Im}(z) > 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$,

c) des Kreises $|z| = 4$,

d) des Kreises $|z - 1| = 1$ und

e) des Kreises $|z - 1| = 3$.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \; .$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.

b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Im}\ z$.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

e) Man berechne die Umkehrabbildung von T.

Aufgabe 9:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i\,.$$

b) Liegen $z_0 = -1-i, z_1 = 0, z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ auf einem Kreis?

c) Man zeichne den Kreis $K:\ |z+1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2,\ z_3 = i-1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 10:
Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit $T(1+i) = -1+i$ und $T(i) = 0$, die die Kreisscheibe $|z-1-i| \le 1$ auf die Halbebene $\mathrm{Im}(w) \ge \mathrm{Re}(w)$ abbildet.

Aufgabe 11:

a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = 2\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3i| = 2\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(i\sqrt{5}) = 0\,, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1\,.$$

c) Zur imaginären Achse und den Kreisen K_1 und K_2 bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter T, gegebenenfalls mit ihren Radien.

Aufgabe 12:
Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

a) $A := \dfrac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)$ und

b) $B := \dfrac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von f nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Aufgabe 13:

a) Man überprüfe, ob

  (i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ holomorph ist,

  (ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,

  (iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

b) Man zeige, dass
$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$
harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 14:
Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 15:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch
$T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 16:
Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D.

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 11 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 17:
Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 (2+3it)^2\,dt,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2+1}{1+it}\,dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_i} \mathrm{Im}(z)\,dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. c_2 verbindet auch z_1 und z_2, läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ berechne man

(i) $\displaystyle\oint_c \bar{z}dz\ ,$

(ii) $\displaystyle\oint_c z^2 dz\ .$

Aufgabe 18:
Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c z^3 + 4\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1-i$ nach $1+i$,

b) $\displaystyle\int_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0,$

c) $\displaystyle\int_{c_k} \frac{1}{z}\,dz$ für die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$,

d) $\displaystyle\int_1^i \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 19:
Man berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale, falls diese erklärt sind. Alle auftretenden Kurven werden einmal positiv orientiert durchlaufen.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz,$

b) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z+2}\,dz, \qquad c: |z+1-i| = 1,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \qquad c_1: |z| = 0.5, \quad c_2: |z| = 1.5,$

d) $\displaystyle\oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z^2+4z+5}\,dz,$

e) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2-iz+6}\,dz, \qquad c_1: |z| = 2.5, \quad c_2: |z-i| = 2.5,$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \qquad c: |z-i| = 3.$

Aufgabe 20:
Man berechne mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz,$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5+2z^4}\,dz,$

c) $\displaystyle\oint_c z^2 + \frac{e^z}{z^2}\,dz, \qquad c:\ |z| \;=\; \pi,$

d) $\displaystyle\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \qquad c:\ |z-1-2i| \;=\; 2.$

Aufgabe 21:

a) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $\displaystyle f(z) = \frac{3}{z^2+2z+5}\,, \qquad z_0 = i$ und $z_0 = 0\,,$

(ii) $\displaystyle f(z) = \frac{2}{e^z-1}\,, \qquad z_0 = 2\pi(1+i)\,,$

(iii) $\displaystyle f(z) = \frac{z}{\ln(3-2z)}\,, \qquad z_0 = 0$ und $\displaystyle z_0 = \frac{11}{8}\,.$

b) Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion $\displaystyle f(z) = \frac{5z}{z^2+z-6}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 22:

a) Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

(i) $\displaystyle f(z) = \frac{e^z-1-z-z^2/2}{z^2}$ im Punkt $z_0 = 0,$

(ii) $\displaystyle f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right)$ im Punkt $z_0 = -\pi,$

(iii) $\displaystyle f(z) = \frac{\cos z}{z^5}$ im Punkt $z_0 = 0.$

b) Für die folgenden Funktionen

(i) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z^4+z^2},$

(ii) $\displaystyle f(z) = \sin\frac{1}{z},$

(iii) $\displaystyle f(z) = \frac{z-\sin z}{z^2},$

(iv) $f(z) = \coth\, z$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 23:
Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\, dz$$

für den Kreis $\quad c: \; |z + 2| = 2$.

Aufgabe 24:
Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\, dx \qquad$ und

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}}\, dx\;,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4 + \cos\varphi}\, d\varphi\;.$