Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu
komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : \, |w+z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \, |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \, 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \, 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \, , \, 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i\,, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)\,.$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\,,\; 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\,,\; \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\,.$$

Aufgabe 5:

a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = i$ berechne man

$$\ln(z_1)\,,\; \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2)\,.$$

b) Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\,.$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

  (i) des Kreises $|z| = 3$,

  (ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$,

  (iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Aufgabe 7:

Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1 + 2i,\ z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1 + i,\ w_3 = -1 - i\,.$$

a) Man berechne die Möbius-Transformation T, für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j)\,.$$

b) Liegen $z_0 = 2 + i$ und z_1, z_2, z_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis K?

c) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und w_1, w_2, w_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis $T(K)$?

Aufgabe 8:

a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3i| = 2\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(i\sqrt{5}) = 0\,, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1\,.$$

c) Zur imaginären Achse und den Kreisen K_1 und K_2 bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter T, gegebenenfalls mit ihren Radien.

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, ob

(i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,

(iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

b) Man zeige, dass
$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$
harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:
Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 11:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch
$T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 12:
Gegeben sei eine ebene, stationäre, wirbel- und quellenfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Querschnitt $|z| \leq 3$ und der konstanten Geschwindigkeit $v_\infty > 0$ im Unendlichen.

a) Man bilde den Bereich $|z| > 3$ der z-Ebene mit einer Joukowski-Funktion $w = f(z)$ in die Modellebene $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$ ab und berechne $f'(z)$.

b) Man berechne das komplexe Strömungspotential Φ für $|z| > 3$.

c) Man bestimme das Geschwindigkeitsfeld in der z-Ebene und gebe die Punkte mit maximaler und minimaler Geschwindigkeit an.

d) Man zeichne die Höhenlinien der Stromfunktion in der z-Ebene für $v_\infty = 1$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in [-5, 5]$.

Aufgabe 13:
Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D.

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 11 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:
Man berechne

a) $$\int_0^\pi e^{2+3it}\, dt,$$

b) $$\int_1^2 \frac{1}{4it+3}\, dt,$$

c) $$\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z}\, dz,$$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbkreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $$\oint_c 6\bar{z} - 5\, dz$$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 15:
Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it$, $-1 \le t \le 1$.

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2 - 2z + 2}$, $z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i$,

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$, $z_0 = \dfrac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)$, $z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Aufgabe 17:
Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\oint\limits_c \frac{1}{z+2}\, dz, \quad c: |z+1-i| = 1,$

b) $\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\, dz, \quad c_1: |z| = 0.5, \quad c_2: |z| = 1.5,$

c) $\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\, dz, \quad c_1: |z+2| = 2, \quad c_2: |z-1.5| = 2,$

d) $\oint\limits_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\, dz, \quad c: |z-i| = 3,$

e) $\oint\limits_c z^2 + \frac{e^z}{z^2}\, dz, \quad c: |z| = \pi,$

f) $\oint\limits_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\, dz, \quad c: |z-1-2i| = 2.$

Aufgabe 18:
Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

definierte Funktion f. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius r. Dazu berechne man die Koeffizienten a_n auf verschiedene Weise:

a) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von f einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 19:
Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 20:
Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{\exp(z-2)}{z-2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2, \\
\text{b)} \quad f(z) &= z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1\,, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^7} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 21:
Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{z^2 + z - 2}{z^3 - 2z^2}, & \text{b)} \quad f(z) &= \frac{1 + z - \exp(z)}{z^4}, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \cosh\frac{1}{z} - \sinh\frac{1}{z}, & \text{d)} \quad f(z) &= \frac{z - \pi}{\sin z}\,.
\end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:
Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint\limits_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $\quad c:\ |z+2| = 2$.

Aufgabe 23:
Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\,dx,$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\,dx$ und

c) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\,d\varphi\,.$

Aufgabe 24:
Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{\exp(z-2)-1}{z^2+z-6}$ definierte Funktion.

a) Man bestimme und klassifiziere alle Singularitäten von f.

b) Man berechne die Residuen für alle Polstellen von f.

c) Für die Potenzreihenentwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ gebe man die ersten drei nicht verschwindenden Glieder an.

d) Für die Laurentreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_1 = -3$ bestimme man den Hauptteil.

e) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+2|=2} f(z)\,dz$.

f) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+1|=1} f(z)\,dz$.