**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2012**
Dr. K. Rothe

# Anleitungsaufgaben zu komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

**Aufgabe 1:**
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1$ und $z_2 := -1 + i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von $z_1$ und die Polardarstellungen von $z_1$ und $z_2$.

b) Man bestimme $z_2^{12}$ .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = -64$ in kartesischen Koordinaten an.

**Aufgabe 2:**
Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |3z + 6 - i| = 9\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \le \operatorname{Im}(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((1 - i)z) = 2\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \le \arg(z) \le 3\pi/2 , \ 4 \le |z| \le 5\}$.

**Aufgabe 3:**
Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i , \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

**Aufgabe 4:**

a) Man bestimme das Bild von

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z)\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}(z)\ ,\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$ und $z_2 = -1 + \dfrac{2\pi i}{3}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der $e$-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

**Aufgabe 5:**

a) Man bestimme das Bild von

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 16 \le |z| \le 25\ ,\ \pi/2 \le \arg(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \ln(\sqrt{z})$ definierten Abbildung. Dabei sind für $\sqrt{z}$ und $\ln w$ die jeweils zugehörigen Hauptwerte zu wählen.

b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -i$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\ ,\ \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{4} + \dfrac{4}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

(i) des Kreises $|z| = 5$,

(ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) < 0\ ,\ \mathrm{Im}(z) = 0$,

(iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0\ ,\ \mathrm{Im}(z) < 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 4$.

**Aufgabe 7:**

a) Die cosh-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\cosh z$ und bestimme alle Lösungen von $\cosh z = 0$.

b) Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1 + 2i,\ z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1 + i,\ w_3 = -1 - i .$$

(i) Man berechne die Möbius-Transformation $T$, für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j) .$$

(ii) Liegen $z_0 = 2 + i$ und $z_1, z_2, z_3$ auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

(iii) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und $w_1, w_2, w_3$ auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

**Aufgabe 8:**
Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z - 1 - i} .$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei $T$ um eine Möbiustransformation handelt.

b) Man berechne alle Fixpunkte von $T$ in kartesischer und Polardarstellung.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Im}\ z$.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

e) Man berechne die Umkehrabbildung von $T$.

**Aufgabe 9:**

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = z^2 \cos z$ ,

(ii) $f(z) = \mathrm{Im}(z^3)$ ,

(iii) $f(z) = \exp(\bar{z})$ ,

(iv) $f(z) = z + \bar{z} + 1$ .

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu $u$ konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion $v$, für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

**Aufgabe 10:**
Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven $c_1$ und $c_2$ in der $z$-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der $w$-Ebene gehen $c_1$ und $c_2$ unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

**Aufgabe 11:**

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte $z_1$ und $z_2$, die symmetrisch zu $G$ und $K$ liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von $G$ und $K$ unter $T$, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

**Aufgabe 12:**
Gegeben sei eine ebene, stationäre, wirbel- und quellenfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Querschnitt $|z| \leq 4$ und der konstanten Geschwindigkeit $v_\infty = 5$ im Unendlichen.

a) Man bilde den Bereich $|z| > 4$ der $z$-Ebene mit einer Joukowski-Funktion $w = f(z)$ konform in die Modellebene $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$ ab und berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$.

b) Man berechne das Geschwindigkeitspotential $u$ und das Geschwindigkeitsfeld für $|z| > 4$.

c) Man bestimme die Stromfunktion für $|z| > 4$ und zeichne die Stromlinien für $z = x+iy$ und $x, y \in [-6, 6]$.

**Aufgabe 13:**
Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene $E$ ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq \sqrt{5}\}$ (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine in $E$ harmonische Funktion, die auf dem Rand von $K$ den Wert 1 und auf $G$ den Wert 0 annimmt.

*Hinweis:* Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

**Aufgabe 14:**
Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 (2 + 3it)^2\, dt,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{1 + it}\, dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_i} \mathrm{Im}(z)\, dz,$

dabei ist $c_1$ der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. $c_2$ verbindet auch $z_1$ und $z_2$, läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ berechne man

(i) $\displaystyle\oint\limits_c \bar{z}dz$ ,

(ii) $\displaystyle\oint\limits_c z^2 dz$ .

**Aufgabe 15:**
Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int\limits_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$ ,

b) $\displaystyle\int\limits_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \leq t \leq 0$,

c) $\displaystyle\int\limits_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

**Aufgabe 16:**

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten $z_0$, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{3}{z^2+2z+5}$ , $\quad z_0 = i$ und $z_0 = 0$ ,

(ii) $f(z) = \dfrac{2}{e^z - 1}$ , $\quad z_0 = 2\pi(1+i)$ ,

(iii) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3-2z)}$ , $\quad z_0 = 0$ und $z_0 = \dfrac{11}{8}$ .

**Aufgabe 17:**
Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z-i}\,dz, \qquad c:\ |z-1| \;=\; 1,$

b) $\displaystyle\oint_c \frac{\sin z}{z+\pi/2}\,dz, \qquad c:\ |z+\pi+i| \;=\; 2,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2+3}{z+1}\,dz, \qquad c_1:\ |z+i| \;=\; 1.3, \quad c_2:\ |z+i| \;=\; 1.5,$

d) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2-iz+6}\,dz, \qquad c_1:\ |z| \;=\; 2.5, \quad c_2:\ |z-i| \;=\; 2.5,$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{(2z^3-17z^2+32z+3)e^z}{z^4-4z^3-5z^2+36z-36}\,dz, \qquad c:\ |z| \;=\; 4,$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{z^4}{(z-i)^3}\,dz, \qquad c:\ |z-i| \;=\; 3\,.$

**Aufgabe 18:**
Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{3-2z}{z^2-2z+1}$$

definierte Funktion $f$. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius $r$. Dazu berechne man die Koeffizienten $a_n$ auf verschiedene Weise:

a) $\displaystyle a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,.$

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

*Tipp:* Partialbruchzerlegung von $f$.

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von $f$ einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

**Aufgabe 19:**
Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = i, \qquad \text{b)} \quad z_0 = -3$$

an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

**Aufgabe 20:**
Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten $a_{-1}$ der Reihe an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,, \\
\text{b)} \quad f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -\pi\,, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 21:**
Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{1}{z^4 + z^2}, \qquad & \text{b)} \quad f(z) &= \sin\frac{1}{z}, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^2}, \qquad & \text{d)} \quad f(z) &= \coth z
\end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große $z$ konvergiert.

**Aufgabe 22:**
Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16} \, .$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von $f$.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\, dz$$

für den Kreis $c: \; |z + 2 - 2i| = 3$ .

**Aufgabe 23:**
Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x - 2}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 4}\, dx$ und

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(x^3 + 1)\sqrt{x^3 - 1}}\, dx$ .

**Aufgabe 24:**
Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\varphi}\, d\varphi$ ,

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2 + \sin(2\varphi)}\, d\varphi$ .

*Hinweis:* Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ bzw. $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.