Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2010**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu
komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(2-3i)^2}{3+4i}$ und $z_2 := \sqrt{3} - i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^9 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 8i$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : \ |w+z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \ 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \ 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \ , \ 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

Man untersuche die Folge

$$z_0 = 0 \, , \quad z_{n+1} = \frac{2+i}{3}\,(i - 1 + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \Re(z)\ ,\ 0 \le \Im(z)\ ,\ \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \le 1\}$ unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Man berechne:

(i) $\exp(1 + i\pi)$, (ii) $\exp(2 + i\pi/2)$, (iii) $\exp(1 + i\pi) \cdot \exp(2 + i\pi/2)$

sowie $\exp(3 + i3\pi/2)$ und überprüfe an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$,

Aufgabe 5:

a) Man bestimme das Bild von

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 16 \le |z| \le 25\ ,\ \pi/2 \le \arg(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \ln\left(\sqrt{z}\right)$ definierten Abbildung. Dabei sind für $\sqrt{z}$ und $\ln w$ die jeweils zugehörigen Hauptwerte zu wählen.

b) Man berechne für $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = -\sqrt{3} + i$

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \ln(z_1)\ , \\ \text{(ii)} & \ln(z_2)\ , \\ \text{(iii)} & \ln(z_1) + \ln(z_2) \\ \text{(iv)} & \ln(z_1 z_2) \end{array}$$

und überprüfe, ob die folgende Beziehung gilt

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)\ ,$$

wobei $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus ist.

Aufgabe 6:

Die komplexen trigonometrischen Funktionen sind definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\ , \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\ .$$

a) Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und $\cos z$.

b) Man zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten

$$\sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz)\,, \quad \cos z = \cosh(iz)\,.$$

c) Man bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 7:

a) Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

(i) der Geraden $\Re(z) = -1$,

(ii) des Strahls $\Im(z) > 0 \wedge \Re(z) = 0$,

(iii) des Kreises $|z| = 4$,

(iv) des Kreises $|z-1| = 1$ und

(v) des Kreises $|z-1| = 3$.

b) Man berechne die Punkte z und z', die symmetrisch liegen zu beiden Kreisen

$$K_1 \,:\, |z| = 1 \quad \text{und} \quad K_2 \,:\, |z-4i| = 2\,.$$

Aufgabe 8:

a) Man bestimme eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$, $T(2) = \frac{1}{2}$.

b) Welches sind die Bilder von

(i) der reellen Achse,

(ii) der imaginären Achse,

(iii) des Einheitskreises $|z| = 1$?

c) Man bestimme das Urbild von $|w| = 1$.

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = z^2 \cos z$,

(ii) $f(z) = \mathrm{Im}(z^3)$,

(iii) $f(z) = \exp(\bar{z})$,

(iv) $f(z) = z + \bar{z} + 1$.

b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi \ , \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung von a), dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := z^2$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Geraden der z-Ebene $c_1(t) = t + i$ und $c_2(t) = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 12:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it \ , \ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq \sqrt{5}\}$ (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{2+3it}\, dt,$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4it+3}\, dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z}\, dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $\displaystyle\oint_c 6\bar{z} - 5\, dz$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2}$, $z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i$,

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$, $z_0 = \dfrac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)$, $z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Aufgabe 17:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c: |z+1-i| = 1,$

b) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2+3}{z+1}\,dz, \quad c_1: |z+i| = 1.3, \quad c_2: |z+i| = 1.5,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \quad c_1 : \ |z+2| \ = \ 2, \quad c_2 : \ |z-1.5| \ = \ 2,$

d) $\displaystyle\oint_{c} \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c : \ |z-i| \ = \ 3,$

e) $\displaystyle\oint_{c} \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \quad c : \ |z-1-2i| \ = \ 2.$

Aufgabe 18:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 19:

Man bestimme die Laurententwicklung der Funktionen

$$\text{a)} \quad f(z) \ = \ \frac{\exp(z-2)}{z-2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2,$$

$$\text{b)} \quad f(z) \ = \ z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1$$

und gebe die Residuen von $f(z)$ in z_0 an.

Aufgabe 20:

Für die folgenden Funktionen

$$\text{a)} \quad f(z) \ = \ \frac{z^2+z-2}{z^3-2z^2}, \qquad \text{b)} \quad f(z) \ = \ \frac{1+z-\exp(z)}{z^4},$$

$$\text{c)} \quad f(z) \ = \ \cosh\frac{1}{z} - \sinh\frac{1}{z}, \qquad \text{d)} \quad f(z) \ = \ \frac{z-\pi}{\sin z}\,.$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4} \ .$$

a) Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_{c_{1,2}} f(z)\, dz$$

für die Kreise $c_k : \ |z - 1.5| = k \ , \ k = 1, 2 \quad .$

Aufgabe 22:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\, dx$ und

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}}\, dx \ .$

Aufgabe 23:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi\,,$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos^2\varphi}\,.$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & \text{für } -1 \le t \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

a) Man berechne zu f die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ und überprüfe deren Stetigkeit in $\omega = 0$.

b) Man berechne die Inverse-Fouriertransformierte zu

$$F(\omega) = \frac{2i(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^2}$$

unter Verwendung von

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{\omega}\, d\omega \;=\; \begin{cases} \pi i & \text{für} \;\; \alpha > 0 \\ 0 & \text{für} \;\; \alpha = 0 \\ -\pi i & \text{für} \;\; \alpha < 0\,. \end{cases}$$

und ohne das Ergebnis aus a).