Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu
komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(2-3i)^2}{3+4i}$ und $z_2 := \sqrt{3} - i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^9 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w + z_2)^3 = 8i$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} :\ |w + z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} :\ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} :\ 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} :\ 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi\ ,\ 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

Man berechne:

a) (i) $\exp(1 + i\pi)$, (ii) $\exp(2 + i\pi/2)$, (iii) $\exp(1 + i\pi) \cdot \exp(2 + i\pi/2)$
sowie $\exp(3 + i3\pi/2)$ und überprüfe an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$,

b) (i) $\ln(1+i\sqrt{3})$, (ii) $\ln(-\sqrt{3}+i)$, (iii) $\ln(1+i\sqrt{3})+\ln(-\sqrt{3}+i)$

sowie $\ln((1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i))$ und überprüfe an diesem Beispiel, ob die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$ gilt. Dabei soll $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus sein.

Aufgabe 4:

Die komplexen trigonometrischen Funktionen sind definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) , \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) .$$

a) Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und $\cos z$.

b) Man zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten

$$\sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz) , \quad \cos z = \cosh(iz) .$$

c) Man bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 5:

a) Für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in S^2 - \{N\}$ zeige man, dass die stereographische Projektion P von $\boldsymbol{x}$ gegeben ist durch

$$z = P(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

und berechne für $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$ die stereographische Projektion z_1.

b) Für das Bild $z \in \mathbb{C}$ der stereographische Projektion zeige man, dass das Urbild P^{-1} von z gegeben ist durch

$$\boldsymbol{x} = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right)^T$$

und berechne zu $z_2 = 1 - i$ das Urbild $\boldsymbol{x}_2$.

c) Für die Zahlen z_1 und z_2 aus a) und b) bereche man den Abstand $|z_1 - z_2|$ und den sphärischen Abstand $d(z_1, z_2) := ||P^{-1}(z_1) - P^{-1}(z_2)||$.

Aufgabe 6:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$, $T(2) = \dfrac{1}{2}$.

b) Welches sind die Bilder von

(i) der reellen Achse,

(ii) der imaginären Achse,

(iii) des Einheitskreises $|z| = 1$?

c) Bestimmen Sie das Urbild von $|w| = 1$.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Möbiustransformation T, und die ihr zugeordnete 2×2 Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

Am Beispiel

$$T(z) = \frac{z+2}{-z-1}$$

überprüfe man die folgenden Aussagen:

a) T besitzt ein oder zwei Fixpunkte.

b) Ist z^* Fixpunkt von T, dann ist $(z^*, 1)^T$ Eigenvektor zu $\boldsymbol{A}$ ist.

c) Sind $\lambda_{1,2}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$, so lassen sich die Fixpunkte berechnen durch:

$$z^*_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - d}{c}\,.$$

Aufgabe 8:

Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

a) $f(z) = z^2 \cos z\,,$

b) $f(z) = \mathrm{Im}(z^3)\,,$

c) $f(z) = \exp(\bar{z})\,,$

d) $f(z) = z + \bar{z} + 1\,.$

Aufgabe 9:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := z^2$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Geraden der z-Ebene $c_1(t) = t + i$ und $c_2(t) = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 10:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it \, , \, t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 11

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it \, , \, t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq \sqrt{5}\}$ (vgl. Aufgabe 10).

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 10 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 12:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2+3it} \, dt,$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4it+3}\,dt$,

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z}\,dz$,

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $\displaystyle\oint_c 6\bar{z} - 5\,dz$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 13:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi\,, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung von a), dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

Aufgabe 14:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \leq t \leq 0$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 15:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint\limits_c \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c: \ |z+1-i| \ = \ 1,$

b) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^2+3}{z+1}\,dz, \quad c_1: \ |z+i| \ = \ 1.3, \quad c_2: \ |z+i| \ = \ 1.5,$

c) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \quad c_1: \ |z+2| \ = \ 2, \quad c_2: \ |z-1.5| \ = \ 2,$

d) $\displaystyle\oint\limits_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c: \ |z-i| \ = \ 3,$

e) $\displaystyle\oint\limits_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \quad c: \ |z-1-2i| \ = \ 2.$

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2}\,, \quad z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{7i}{2}\,,$

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = i\,.$

Aufgabe 17:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 18:

Man bestimme die Laurententwicklung der Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \frac{\exp(z-2)}{z-2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2, \\ \text{b)} \quad f(z) &= z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1 \end{aligned}$$

und gebe die Residuen von $f(z)$ in z_0 an.

Aufgabe 19:

Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \frac{z^2+z-2}{z^3-2z^2}, & \text{b)} \quad f(z) &= \frac{1+z-\exp(z)}{z^4}, \\ \text{c)} \quad f(z) &= \cosh\frac{1}{z} - \sinh\frac{1}{z}, & \text{d)} \quad f(z) &= \frac{z-\pi}{\sin z}\,. \end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_{c_{1,2}} f(z)\,dz$$

für die Kreise $c_k:\ |z-1.5| = k\ ,\ k = 1,2$.

Aufgabe 21:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx,$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx,$ und

c) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx\,.$

Aufgabe 22:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\,d\varphi\,,$

b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos^2\varphi}\,.$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & \text{für } -1 \le t \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

a) Man berechne zu f die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ und überprüfe deren Stetigkeit in $\omega = 0$.

b) Man berechne die Inverse-Fouriertransformierte zu

$$F(\omega) = \frac{2i(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^2}$$

unter Verwendung von

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{\omega}\, d\omega \quad = \quad \begin{cases} \pi i & \text{für} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{für} \quad \alpha = 0 \\ -\pi i & \text{für} \quad \alpha < 0\,. \end{cases}$$

und ohne das Ergebnis aus a).

Aufgabe 24:

Unter Verwendung der inversen Fourier-Transformation berechne man den Cauchyschen Hauptwert von:

$$g(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega\cos\omega - \sin\omega)\sin(\omega t)}{\omega^2} d\omega\,.$$

Hinweis: Man verwende das Ergebnis aus Aufgabe 23.