Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl. 2.3.1)

Um welche Gebilde handelt es sich anschaulich bei folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$
\begin{array}{lllllll}
G_1 & = & \{z \mid z = (1+i) + \lambda(5-2i)\,,\ \lambda \geq 0\}, & G_2 & = & \{z \mid |(1+i)z| = 5\}\,, \\
G_3 & = & \{z \mid z = (3+i) + 5e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\}\,, & G_4 & = & \{z \mid |z-3| < 2|z+3|\,\}\,, \\
G_5 & = & \{z \mid \mathrm{Re}\,(1/z) = 1,\ z \neq 0\}\,, & G_6 & = & \{z \mid \mathrm{Im} z^2 \leq 2\}\ ?
\end{array}
$$

Aufgabe 2: (vgl. 2.3.7)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := -\dfrac{3}{2}i + \dfrac{2+i}{(1-i)^2}$ und $z_2 := \sqrt{2}(-1+i)$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^4 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = 16$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 3: (vgl. 26.1.1)

a) Man zeige, dass der Kreis vom Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene die Darstellung

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = r^2$$

mit $z \in \mathbb{C}$ besitzt.

b) Man bestimme die Kurve, die durch

$$z\overline{z} = (4-3i)\overline{z} + (4+3i)z + 144$$

beschrieben wird.

Aufgabe 4: (vgl. 26.1.1)

Für die Inversion $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 5$,

b) der Strahlen $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$,

c) des Kreises $|z| = 2$,

d) des Kreises $|z+i| = 1$ und

e) des Kreises $|z-3i| = 1$.

Aufgabe 5: (vgl. 26.3.2)

a) Auf welchen Bereich der w-Ebene wird der geschlitzte Winkelbereich

$$V = \left\{-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}\right\} \setminus \{z \in [0,2]\}$$

durch die Funktion $w = f(z) = \sqrt{z^3 - 8}$ abgebildet?

b) Wie ist der Schnitt der Wurzel zu legen?

c) Wie lautet die Umkehrabbildung?

d) Welches ist das Urbild des Strahls $w = x \in [0, \infty[$?

e) Welches Urbild besitzt der Strahl $w = iy$ mit $y \in [0, \infty[$?

f) Man gebe eine Parameterdarstellung für die Stromlinien $\mathrm{Re}\, w = 1$ an.

Aufgabe 6: (vgl. 26.1.2)

Gegeben sei die Abbildung $\quad w = T(z) := \dfrac{z+2i}{z-(1-i)}$.

a) Man überprüfe, ob T eine Möbius-Transformation ist.

b) Man bestimme die Fixpunkte von T.

c) Man berechne die Bilder $w_i = T(z_i)$ für $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ und $z_3 = -2i$.

d) Wie lautet die Umkehrabbildung T^{-1} von T?

e) Welche Urbilder $w_i = T(z_i)$ besitzen $w_4 = 0$, $w_5 = 1$ und $w_6 = \infty$.

f) Man bestimme das Bild der rechten Halbebene ($z \in \mathbb{C}$ mit Re $z \geq 0$) und fertige eine Skizze an.

g) Man gebe die Menge an, auf die das Inneren des Einheitskreises ($z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$) abgebildet wird.

h) Welche Kurven der z-Ebene werden auf (echte) Kreise durch den Nullpunkt in der w-Ebene abgebildet?

Aufgabe 7 (vgl. 26.2.1)

Man überprüfe mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche der folgenden Funktionen holomorph sind:

a) $f(z) \;=\; z^2,$

b) $f(z) \;=\; \bar{z},$

c) $f(z) \;=\; (\text{Im } z + i \text{ Re } z)(1+i),$

d) $f(z) \;=\; \sqrt{z}$ (Hauptwert).

Aufgabe 8:

Zu dieser Aufgabe gibt es keinen Ersatz, sondern Tipps zur Vorgehensweise.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Möbiustransformation T, und die ihr zugeordnete 2×2 Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

Am Beispiel $T(z) = \dfrac{z+2}{-z-1}$ überprüfe man die folgenden Aussagen:

a) T besitzt ein oder zwei Fixpunkte.

b) Ist z^* Fixpunkt von T, dann ist $(z^*, 1)^T$ Eigenvektor zu $\boldsymbol{A}$ ist.

c) Sind $\lambda_{1,2}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$, so lassen sich die Fixpunkte berechnen durch:

$$z^*_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - d}{c}\,.$$

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := e^z$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Koordinatenachsen der z-Ebene unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 11 (vgl. 26.1.3)

a) Man berechne die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen $K_1 \; : \; |z - 3i| = \sqrt{2}$ und $K_2 \; : \; |z + i| = \sqrt{6}$ liegen.

b) Man gebe alle Abbildungen der Form

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

an, für die $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ gilt, mit den in a) berechneten Spiegelpunkten z_1 und z_2.

c) Von der Abbildung T aus b) werde zusätzlich noch $T(3i + \sqrt{2}) = 1$ gefordert. Wohin werden dann die beiden Kreise K_1 und K_2 und der Bereich außerhalb der beiden Kreise unter T abgebildet? Man skizziere Urbild- und Bildbereich.

Aufgabe 12: (vgl. 26.4.1)

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+i} \, dt,$

b) $\displaystyle\oint_c \operatorname{Im} z \, dz \,, \quad c(\varphi) = e^{i\varphi} \,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$

c) $\displaystyle\int_c z \, dz \,, \quad c(t) = (i-1)t, \quad 0 \le t \le 1,$

d) $\displaystyle\oint_c \bar{z} \, dz \,, \quad c(t) = \begin{cases} t & , \quad -1 \le t \le 1 \,, \\ e^{i\pi(t-1)} & , \quad 1 \le t \le 2 \,. \end{cases}$

Aufgabe 13:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi \,, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung von a), dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

Aufgabe 14: (vgl. 26.5.2)

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c e^z \, dz \quad$ für $\quad c(t) = (1+i)t \quad$ mit $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

b) $\displaystyle\int_c \frac{1}{z^2} \, dz \quad$ für $\quad c(t) = e^{it} \quad$ mit $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$,

c) $\displaystyle\int_c \cos z \, dz \quad$ für $\quad c(t) = it \quad$ mit $\quad 0 \leq t \leq 1 \quad$ und

d) $\displaystyle\int_c z^3 + 1 \, dz \quad$ für $\quad c(t) = e^{it} \quad$ mit $\quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 15: (vgl. 26.6.1)

Man berechne die folgenden Kurvenintegrale gegebenenfalls unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel. Die auftretenden Kurven sollen im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\oint_{c_{1/2}} \frac{e^{2z}}{(z-i)^4} \, dz \quad$ für $\quad c_1: \ |z-1| = \frac{\pi}{2}\,, \quad c_2: \ |z+2i| = 2\,,$

b) $\displaystyle\oint_{c_{1/2/3}} \frac{z+3}{z^2-1} dz \quad$ für $\quad c_1: \ |z-1| = 1.9\,, \quad c_2: \ |z-i| = 1.5\,, \quad c_3: \ |z+1+i| = 1.1\,,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1/2}} \frac{\sin^3 z}{(z-\pi/3)^2} \, dz \quad$ für $\quad c_1: \ |z| = 1\,, \quad c_2: \ |z| = 2\,,$

d) $\displaystyle\oint_c \frac{\ln z}{z^2+1} \, dz \quad$ für $\quad c: \ |z-1-i| = 1.414\,,$

e) $\displaystyle\oint_c z^{17} \, dz \quad$ für $\quad c: \ |z-16+17i| = 180\,.$

Aufgabe 16: (vgl. 26.6.2)

a) Man berechne die Taylorreihe von

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{1-\xi}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender gegebenenfalls stetig ergänzter Funktionen zu den Entwicklungspunkten z_0 und z_1, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{z^3+8}{z^2-2z+2}\,, \quad z_0 = 0\,, \quad z_1 = -i\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{2z-\pi i}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{3\pi i}{4}\,, \quad z_1 = \pi\,,$

(iii) $f(z) = \dfrac{z-1}{\ln(z+2)}\,, \quad z_0 = 0\,, \quad z_1 = -2+2i\,.$

Aufgabe 17: (vgl. 26.7.1)

Man bestimme alle Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{3z-2}{z^2-z}$$

mit Konvergenzbereich zum Entwicklungspunkt

a) $z_0 = -1$ und

b) $z_0 = 1$.

Aufgabe 18: (vgl. 26.7.3)

Man bestimme die Laurent-Entwicklungen der folgenden Funktionen zum Entwicklungspunkt z_0, klassifiziere die Singulartäten und gebe $\operatorname{Res}(f;z_0)$ an.

a) $f(z) = ze^{1/(z+1)}, \quad z_0 = -1\,,$

b) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1 + z^2}{z^4}, \quad z_0 = 0$ und

c) $f(z) = \dfrac{z-\sin(z+\pi)}{(z+\pi)^2}, \quad z_0 = -\pi\,.$

Aufgabe 19: (vgl. 26.7.5)

Für die Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^3+1}\,,$

b) $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^2}\,,$

c) $f(z) = z + \sin\dfrac{1}{z}$ und

d) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{\sinh z}\,.$

bestimme und klassifiziere man alle endlichen Singularitäten und berechne die zugehörigen Residuen. Ferner gebe man die zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ gehörige Laurent-Entwicklung an, die im Außengebiet konvergiert, und bestimme $\text{Res}\,(f;\infty)$.

Aufgabe 20: (vgl. 26.7.6)

a) Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4} .$$

b) Man berechne für

$$c(\phi) = 2 + 3e^{i\phi} \quad 0 \leq \phi \leq 4\pi$$

folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_c \frac{z}{\sin z}\, dz .$$

Aufgabe 21: (vgl. 26.8.1)

Man berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuenkalküls:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\, dx$ und b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{3 + \cos x}\, dx$.

Aufgabe 22: (vgl. 26.8.4)

a) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c \frac{e^{iz}}{z^4 + 16}\, dz$$

für die geschlossene Kurve $c = c_r + g_r$ mit $r \geq 2.1$, wobei

$$c_r(\varphi) = re^{i\varphi} \;,\; 0 \leq \varphi \leq \pi$$

und

$$g_r(x) = x \;,\; -r \leq x \leq r .$$

b) Unter Verwendung von a) berechne man das reelle uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 16}\, dx .$$

Aufgabe 23: (vgl. 26.8.5)

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx,$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2 + 2}\, dx,$

c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\, dx$ und

d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx.$

Aufgabe 24: (vgl. 27.1.1/2)

a) Man berechne die Fourier-Transformierte der folgenden Funktion:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 4 - t^2 & \text{für } -2 \le t \le 2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

b) Unter Verwendung der inversen Fourier-Transformation berechne man für $c > 0$:

$$g(t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2c\cos(\omega t)}{c^2 + \omega^2} d\omega\,.$$