Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x,y) = 3x^2 y - y^3$

(iii) $u_3(x,y) = \text{Im}(e^z + z) + 6\text{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:
Man löse folgende Differentialgleichungen

a) $u_{yy} - 4xu_y + 3x^2 u = -8x + 3x^3 + 6x^2 y,$

b) $u_{xy} = 2x \cos y + e^x + 3y^2,$

c) $x(x+1)u_{xy} = (2x+1)u_y.$

Aufgabe 3:
Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(t,x) = e^{x+\alpha t}$ für $u_{tt} = 9u_{xx}$,

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Aufgabe 4:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$4u_x - 7u_y = y^2 , \quad u\,(x,0) = x^2$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{array}{rcl} \xi & = & \alpha x + \beta y \\ \eta & = & \gamma x + \delta y \end{array}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:
Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $(2x - y)u_x + yu_y = 0$,

b) $4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0$.

Aufgabe 6:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$xu_x + (x + 2y)u_y = 3u - 2x \quad \text{mit} \quad u(2x, 2x) = 2x + 8x^2$$

unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + 2xu_y = y\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung.

b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(1, y) = y$ genügt.

c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.

d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\,(x, 2x) = 3x$ genügt.

Aufgabe 8:
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = u_0(x)\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmetode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

   (i) $u_0(x) = 2(x + 1)$ und

   (ii) $u_0(x) = 2(1 - x)$,

   zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Aufgabe 9:
Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le -2 \\ 1\ , & -2 < x \le 0 \\ -1\ , & 0 < x\ . \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 2)$.

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x, t) \in (-3, 1) \times (0, 2)$.

c) Man zeichne $u(x, 0),\ u(x, 1),\ u(x, 2)$ für $x \in (-3, 1)$.

Aufgabe 10:
Man schreibe folgende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1$,

b) $(y+2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23\sin(y-\pi)$,

c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2 u_x - 9yu_z + 4u = 0$.

Aufgabe 11:
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 12:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t)\ , \quad f, g \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x-2t$ und $\eta = x+2t$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}\ , && 0 < x, t < 1 \\ u(x,0) &= x - x^2\ , && 0 \le x \le 1\ , \\ u(x,1) &= 0\ , && \\ u(0,t) &= 0\ , && 0 \le t \le 1\ , \\ u(1,t) &= 0\ . && \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Drehungen ist, d.h. für die um den Winkel φ gedrehten Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 25\,, \\ u(x,y) &= xy \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{aligned}$$

den Wert $u(1,1)$.

Aufgabe 14:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x)\,, \quad u(x,2) = 0\,, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) &= 0\,, \quad u(1,y) = 0\,, \quad 0 \le y \le 2 \end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 15:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring
$2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0\,,$$

$$u(2,\varphi) = \cos\varphi\,,$$

$$u(3,\varphi) = 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi)\,.$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 16:
Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 &\quad \text{für} \quad 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,, \\ u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u\,(r,\pi) = 0 &\quad \text{für} \quad 0 \le r \le 6\,, \\ u(6,\varphi) = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2} &\quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi, \end{aligned}$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 17:
Für den Kreisring $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ löse man das Problem (in Polarkoordinaten) mit gemischten Randdaten

$$\begin{aligned} & r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2\,, \\ & u(1,\varphi) = 0\,, \\ & u_r(2,\varphi) = \frac{5}{2} + \frac{195}{64}\cos 3\varphi\,, \end{aligned}$$

zeichne die Lösung und gebe sie auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 18:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{und} \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{2x+3} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 19:
Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 4\,,\ 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) &= 0 && \text{für} \quad 0 \le t \le T \\ u(4,t) &= 0 && \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le 4 \end{aligned}$$

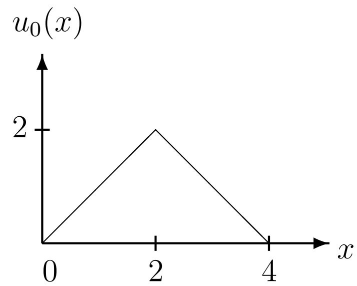

Bild 19 Anfangsfunktion u_0

mit Hilfe eines Produktansatzes und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0,4] \times [0,T]$.

Aufgabe 20:
Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für} \quad (x,y) \in\,]0,1[\, \times\,]0,3[,\ 0 < t\,, \\ u(0,y,t) &= 0 = u(1,y,t) && \text{für} \quad y \in [0,3]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) &= 0 = u(x,3,t) && \qquad\ \ x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) &= (3\sin\pi x - \sin 3\pi x)\sin\pi y && \text{für} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,3]\,. \end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 21:
Die Telegraphengleichung $u_{xx} = 4u_{tt} + 4u_t + u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 5\sin(3t)$, für $t \ge 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(3t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 22:
Man berechne für die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

die partiellen Ableitungen u_x und u_{xx} unter Verwendung der Differentiationsregel für parameterabhängige Integrale

$$F(t) := \int\limits_{r(t)}^{s(t)} f(\xi,t)\, d\xi \;\Rightarrow\; F'(t) = f(s(t),t)s'(t) - f(r(t),t)r'(t) + \int\limits_{r(t)}^{s(t)} f_t(\xi,t)\, d\xi\, .$$

Aufgabe 23:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 2\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) & = & 50 \sin x\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) & = & 2x\,, & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten, löse die homogene Differentialgleichung mit Hilfe der d´Alembertschen Lösungsformel und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - 4u_{xx} & = & 0\,, & x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) & = & v_0(x)\,, & \\ u(0,t) & = & 0\,, & t > 0. \end{array}$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0,t_0) = (3,1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtsheitsbereich der Lösung zum Interval $[0,6]$ für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

   (i) $u_0(x) = x(x-1)(x+1), \quad v_0(x) = 8x\,,$

   (ii) $u_0(x) = 1 - \cos x, \quad v_0(x) = 0\,.$

Aufgabe 25:
Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(1,t) && \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := 0 && \\ u_t(x,0) &= v_0(x) := x^2(x-1) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne die Lösung unter Verwendung der d´Alembertschen Lösungsformel und

b) über den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nach Fourier.

c) Man zeichne die Lösung.

Aufgabe 26:
Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell}\sin t - \frac{x}{\ell}\cos t,\ 0 < x < \ell,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= \sin t\,, \\ u(\ell,t) &= \cos t\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \frac{x}{\ell}, \\ u_t(x,0) &= 1 - \frac{x}{\ell}\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \ell \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Aufgabe 27:
Berechnen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$u_t = u_{xx} + (2x-1)e^{-t} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,,$$

$$u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} -4x+1 & ,\quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & ,\quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}\,,$$

$$u(0,t) = e^{-t}\,,\ u(1,t) = -e^{-t} \qquad \text{für} \quad 0 \leq t\,.$$

Aufgabe 28:
Man löse die folgende Randeigenwertaufgabe mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda\, u\,, && (x,y) \in\,]0,3[\times]0,4[\,, \\ u(x,0) &= 0 = u(x,4)\,, && x \in\, [0,3] \\ u(0,y) &= 0 = u(3,y)\,, && y \in\, [0,4]\,. \end{aligned}$$

Anschließend gebe man die sechs kleinsten Eigenwerte an und zeichne die zugehörigen Eigenfunktionen.