Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl. 25.1.1)

Gegeben sei die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_y = g(x, y)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \neq 0$.

a) Man transformiere die Differentialgleichung durch

$$\nu := bx + ay \ , \ \mu := bx - ay$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung.

b) Mit Hilfe von a) bestimme man die Lösung $u(x, t)$ der Anfangswertaufgabe

$$u_t + 3u_x = 36t + 12x \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = 0$$

und fertige eine Zeichnung der Lösung an.

Aufgabe 2: (vgl. 25.2.1)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u_{xy} = (u_y)^2 - 9u_x + 9 \quad \text{mit} \quad u = u_y = 0 \quad \text{längs der Geraden} \quad y = -\frac{2x}{3} \ .$$

a) Mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y) = \omega(2x + 3y)$ löse man die Anfangswertaufgabe. Dabei ist ω eine noch zu bestimmende Funktion.

b) Man bestimme und skizziere den Definitionsbereich D der in a) bestimmten Lösung.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}$ für $u_t = u_{xx} + u$,

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Aufgabe 4:

Man löse

$$u_x - u_y = 1 + 2x + 2y \quad \text{mit} \quad u(x,x) = x$$

mit Hilfe des Summenansatzes $u(x,y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 5: (vgl. 25.1.6)

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$3u_x + y^2 u_y = \frac{xu}{y} .$$

Aufgabe 6: (vgl. 25.1.7, alte Klausuraufgabe)

Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_x + u_y + u_z = x + y + z + u$$

und gebe diejenige Lösung an, die der Anfangsbedingung $u = y - z$ in der Ebene $x - y - z = 0$ genügt.

Aufgabe 7:

Man zeige, dass

$$u_x + u_y = 1 \quad \text{mit} \quad u(x,x) = x^2$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 8: (vgl. 25.3.1)

Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + e^y u_x - \sin(x)u_y = \tan(x^2 + y^2)$,

b) $x^3 u_{xx} + 2u_{xy} + y^3 u_{yy} + u_x - yu_y = e^x$.

Aufgabe 9: (vgl. 25.4.1)

Gegeben sei die Wellengleichung $u_{tt} = 9u_{xx}$.

a) Man zeige, dass durch $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t)$ mit beliebigen C^2-Funktionen f und g eine Lösung der Wellengleichung gegeben ist.

b) Man zeige umgekehrt, dass jede Lösung der obigen Wellengleichung von der in a) angegebenen Form ist. Man transformiere die Differentialgleichung dazu mit Hilfe der Kettenregel zunächst auf die neuen Variablen $\xi = x + 3t$ und $\eta = x - 3t$.

c) Man berechne die Lösung zu den Anfangswerten $u(x, 0) = x^2$ und $u_t(x, 0) = \cos x$ mit Hilfe von b).

Aufgabe 10:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 16u_{xx} &= 6tx\,, && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \frac{15x^3}{16}\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform, löse die homogene Differentialgleichung mit Hilfe der d´Alembertschen Lösungsformel und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 11: (vgl. 25.4.6)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^4 u_{xx} + y^4 u_{yy} = \frac{1}{xy}\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 12: (vgl. 25.4.3)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4x^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + 3yu_y = 3u\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.

b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform und

c) berechne die allgemeine Lösung.

Aufgabe 13: (vgl. 25.2.4)

Mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ bestimme man Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

a) $u_{xxyy} + u_y + u = 0\,,$

b) $2yu_{xx} - (1+y^2)u_y + 4yu = 0\,.$

Aufgabe 14:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x\in(0,\pi), \quad y>0,\\ u(x,0) &= 0\,, && x\in[0,\pi],\\ u_y(x,0) &= (1/n)\sin(nx)\,, && x\in[0,\pi],\\ u(0,y) &= 0\,, && y\geq 0\,,\\ u(\pi,y) &= 0\,, && y\geq 0\,, \end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht sachgemäß gestellt ist.

Aufgabe 15: (vgl. 25.5.3)

a) Man zeige, dass die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}\,, && x\in(0,1), \quad 0<t<1/2,\\ u(x,0) &= x(1-x)\,, && x\in[0,1]\,,\\ u(x,1/2) &= 0\,, && x\in[0,1]\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t\in[0,1/2]\,,\\ u(1,t) &= 0\,, && t\in[0,1/2]\,, \end{aligned}$$

keine Lösung besitzt, das Problem also nicht sachgemäß gestellt ist.

b) Für das Außenraumproblem $x^2+y^2\geq 9$ mit Dirichlet-Randdaten

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad r>3\,,$$

$$u(3,\varphi) = 2\sin^2\varphi + 8\cos^4\varphi\,, \quad \varphi\in[0,2\pi]\,,$$

berechne man die Lösung in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 16: (vgl. 25.5.8)

a) Sei $u(\boldsymbol{x})$ auf einem Gebiet $G\subset \mathbb{R}^3$ harmonisch, $\overline{K}_R(\mathbf{0})\subset G$, und es gelte $u(\boldsymbol{x})\geq 0$ für $||\boldsymbol{x}|| = R$.

Man beweise die Abschätzung von Harnack für $||\boldsymbol{x}||<R$:

$$\frac{R^2 - R||\boldsymbol{x}||}{(R+||\boldsymbol{x}||)^2}\,u(\mathbf{0}) \;\leq\; u(\boldsymbol{x}) \;\leq\; \frac{R^2 + R||x||}{(R-||x||)^2}\,u(\mathbf{0})\,.$$

Hinweis: Man verwende die Abschätzung

$$||\boldsymbol{y}|| - ||\boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{x}||$$

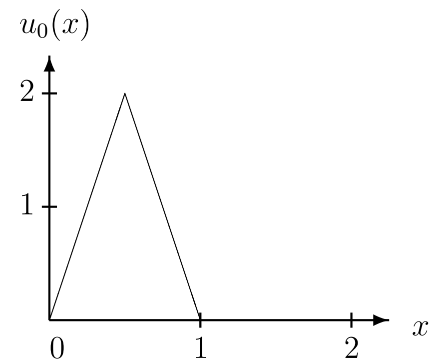
und die Poissonsche Integralformel.

b) Man folgere hieraus den **Satz von Liouville:**
Jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{R}^3$ harmonische Funktion ist konstant.

Aufgabe 17: (vgl. 25.5.10)

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ für } \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t \leq T\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ für } \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(2,t) \text{ für } \quad 0 \leq t \leq T\,. \end{aligned}$$



Man berechne die Lösung des Anfangsrandwertproblems und bestimme das Maximum von $u(x,t)$ in $G := [0,2] \times [0,T]$.

Aufgabe 18: (vgl. 25.5.11)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= t = u(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \leq t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 19: (vgl. 25.6.3)

Das Anschlagen einer Saite wird beschrieben durch die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \\ u_t(x,0) &= v_0(x) := \begin{cases} \pi & \text{für} \quad \dfrac{7\pi}{16} \leq x \leq \dfrac{9\pi}{16}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe

a) mittels Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ für allgemeines v_0,

b) unter Verwendung der allgemeinen Lösung $u(x,t) = f(x-3t)+g(x+3t)$ für allgemeines v_0 und

c) für das oben vorgegebene v_0 und zeichne die Lösung.

Aufgabe 20: (vgl. 25.6.5)

Man löse die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rclcrcl} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u &=& 0\,, & & \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \quad t > 0\,, \\ u(\boldsymbol{x},0) &=& u_0(\boldsymbol{x}) := 0\,, & & u_t(\boldsymbol{x},0) = v_0(\boldsymbol{x}) := x + y^2 + z\,, \end{array}$$

unter Verwendung der Liouvilleschen Lösungsformel

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_S u_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do \right) + \frac{t}{4\pi} \int\limits_S v_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do$$

mit der Einheitssphäre S im $\mathbb{R}^3$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ auf S.

Aufgabe 21: (vgl. 25.5.7)

Man löse das Dirichlet-Problem im Rechteck und zeichne die Lösung:

$$\begin{array}{rcll} \Delta u &=& 0\,, & 0 < x < 2\pi\,, \quad 0 < y < \pi\,, \\ u(x,0) &=& 0\,, & 0 \le x \le 2\pi\,, \\ u(x,\pi) &=& \dfrac{x}{2}\,, & 0 \le x \le 2\pi\,, \\ u(0,y) &=& 0\,, & 0 \le y \le \pi\,, \\ u(2\pi,y) &=& \dfrac{y}{\pi}(2\pi - y)\,, & 0 \le y \le \pi\,. \end{array}$$

Aufgabe 22: (vgl. 25.2.5)

Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$, für $t \ge 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 23: (vgl. 25.6.1)

Man löse die folgende Anfangsrandwertaufgabe mit Hilfe des Produktansatzes

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

und zeichne die Lösung:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 1 - |x-1| \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u_t(x,0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 24: (vgl. 25.7.1)

Gegeben seien die Dreiterm-Rekursion für die Bessel-Funktionen

$$J_{k+1}(x) - \frac{2k}{x} J_k(x) + J_{k-1}(x) \;=\; 0 \;\; (*)$$

und Testwerte für $x = 1.5$

$$\begin{aligned} J_0(1.5) &= 0.511827672\,, \\ J_1(1.5) &= 0.557936508\,, \\ J_{10}(1.5) &= 0.147432690 \cdot 10^{-7}\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne $J_{10}(1.5)$ aus den gegebenen Werten von $J_0(1.5)$ und $J_1(1.5)$ mittels der sich aus $(*)$ ergebenden Vorwärtsrekursion und begründe die Abweichung vom tatsächlichen Wert.

b) Man berechne $J_{10}(1.5)$ aus $J_{14}(1.5) = 0$ und $J_{13}(1.5) = 10^{-12}$ mittels der sich aus $(*)$ ergebenden Rückwärtsrekursion.

Die berechneten Werte sind durch $\quad 1 = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \quad$ zu normieren.

Aufgabe 25: (vgl. 25.6.4)

Gegeben sei die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsbedingungen:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; f(x,t) \qquad \text{mit} \qquad u(x,0) \;=\; 0 \;=\; u_t(x,0)\,.$$

Man zeige, dass die Funktion $\quad u(x,t) = \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_D f(\xi,\tau)\; d(\xi,\tau)$ die Anfangswertaufgabe löst, wobei das Abhängigkeitsdreieck D gegeben ist durch

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq \tau \leq t \;\wedge\; x - c(t-\tau) \leq \xi \leq x + c(t-\tau) \right\}.$$

Aufgabe 26:

Man löse folgende Anfangs-Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \sin x + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cdot e^{-t}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \text{ und } t > 0,\\
u(0,t) &= e^{-t}\,,\\
u(\pi,t) &= -e^{-t}\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{2x}{\pi}\,,\\
u_t(x,0) &= \frac{2x}{\pi} - 1\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 27: (vgl. 25.5.4)

Für den Kreisring $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten):

$$
\begin{aligned}
&r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2\,,\\
&u(1,\varphi) = 1 + 3\cos\varphi + 4\sin(2\varphi)\,,\\
&u(2,\varphi) = 1 + 2\ln 2 + 6\cos\varphi + \sin(2\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

Man gebe die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 28: (vgl. 25.8.1)

Man berechne Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u \;=\; \lambda \quad \text{für} \quad u(x,y) \in (0,a) \times (0,b)\,,\\
&u(0,y) = 0 = u(a,y) \quad \text{für } 0 \leq y \leq b\,,\\
&u_y(x,0) = 0 = u_y(x,b) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a\,,
\end{aligned}
$$

unter Verwendung des Produktansatzes $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Für $a = 2$ und $b = 1$ gebe man die numerischen Werte der zehn kleinsten Eigenwerte an und zeichne die Eigenfunktion zum sechstkleinsten Eigenwert.