Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu
Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 3:
Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = \dfrac{x - y}{x}$ für $x \neq 0$,

b) $y' + xy \;=\; xy^3$,

Aufgabe 4:
Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$,

b) $y' = 2xy$ mit $y\,(0) = 3$,

c) $y' - y + e^x y^2 = 0$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 5:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 6:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $(1-y)y'' + 2(y')^2 \;=\; 0$,

b) $xy'' \;=\; y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

Aufgabe 7:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' = \dfrac{x}{4(4y+3x+2)^3} - \dfrac{3}{4}$ mit $y(0) = 0.$

Hinweis: Substitution $u(x) = 4y(x) + 3x + 2.$

b) $y' + (6t-4)y + (3t-1)y^2 = 3 - 3t.$

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y_0(x) = K$ $(= \mathit{konstant})$.

Aufgabe 8:

a) Man bestimme Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

(i) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \, ,$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Eulersche (lineare homogene) Differentialgleichung 2.Ordnung

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0 \, .$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Man zeige, dass jede Linearkombination der berechneten Lösungen wieder die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 9:
Man löse die folgende Anfangswertaufgabe für $x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 16x^2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10:
Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1/t - 2y_2/t^3 \\ \dot{y}_2 &= -2ty_1 + y_2/t \end{aligned} \quad \text{mit} \quad y_1(1) = 3 \;\text{ und }\; y_2(1) = 1.$$

a) Man stelle die Anfangswertaufgabe in Matrix- Vektorschreibweise mit $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ dar.

b) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix} .$$

c) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

d) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 11:
Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme

a)
$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,,$$

b)
$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Aufgabe 12:
Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Aufgabe 13:
Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \boldsymbol{y}\,.$$

a) Man beweise durch Induktion für $k \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{A}^k = 13^{k-1} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\,.$$

b) Man berechne die Matrix-Exponentiallösung $e^{x\boldsymbol{A}}$ des Systems.

c) Man berechne das Fundamentalsystem über Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ und vergleiche das Ergebnis mit dem aus b).

Aufgabe 14:

a) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} .$$

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

(ii) Man berechne eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems über Variation der Konstanten und alternativ über den speziellen Ansatz

$$\boldsymbol{y}_p(x) = (ax+b, cx+d)^T$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(iii) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{6}{x} y' + \frac{10}{x^2} y = -2x .$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$.

b) Man berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 16:

a) Für die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 7y' - 15y = 0$

(i) berechne man die allgemeine reelle Lösung,

(ii) schreibe die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und

(iii) bestimme Eigenwerte, Eigenvektoren und eine Fundamentalmatrix des Systems.

b) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:

(i) $y''' - 12y' - 16y = 0$,

(ii) $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$.

Aufgabe 17:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Aufgabe 18:

a) Für die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3$$

berechne man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Methode der Greenschen Funktion.

b) Für die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 1$$

berechne man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

(i) Durch Lösen des zugehörigen inhomogenen Anfangswertproblems mit $y(0) = 0 = \dot{y}(0)$ über Laplace-Transformation.

(ii) Mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion, wobei die Greensche Funktion über Laplace-Transformation berechnet werden soll.

Aufgabe 19:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y''' - 3y' - 2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 9$$

mit Hilfe

a) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und

b) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 20:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' &= -3u - 2v\,, \quad u(0) = 2 \\ v' &= 2u - 3v\,, \quad v(0) = -3 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 21:
Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$, (Sturmsche Randbedingung)

b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,

c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Aufgabe 22:
Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Sturm-Liouvilleschen Randeigenwertaufgabe

$$y'' - y + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(3) = 0\,.$$

Aufgabe 23:
Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ, berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 9)(y + 4)\,, \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.