Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $6y' + 7y = 5$,

b) $y'e^{-x} = y^2 + 9$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 3:
Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $x^2y' - y^2 - xy + x^2 = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$,

b) $y' + \dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{4(4y + 3x + 2)^3} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$

Aufgabe 4:
Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen und sie:

a) $y' - 6y + 3x^2y^2 = -2x^{-3} - 3x^{-2}$,
Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form Cx^α.

b) $3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2) + \big(x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1\big)\, y' = 0$,
Hinweis: Es reicht die Lösung in einer impliziten Gleichung darzustellen.

c) $y' + x^3y + (5x^4 - 2x^3 - 5/4)y^5 = 0$.

Aufgabe 5:
Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$\frac{e^x}{x} + 2y^3 + \left(3xy^2 + \frac{\sin y}{x} + \frac{y\cos y}{x}\right) y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(x)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Aufgabe 6:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' - 2yy' \;=\; 0$, b) $y'' - 4y \;=\; 0$, c) $xy'' - 3y' + 2x \;=\; 0$.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 8:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 9:
Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/t^2 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 10:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ 6 - x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

a) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

b) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems und

c) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 11:
Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12:
Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \, .$$

Aufgabe 13:
Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:

a) $y''' - 4y'' - 20y' + 48y = 0$,

b) $y''' - y'' - 15y' - 25y = 0$,

c) $y'''' - 4y''' - 2y'' + 12y' + 9y = 0$.

Aufgabe 14:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 6x^2 - 20x + 7 \, .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung

   (i) der Variation der Konstanten und

   (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Aufgabe 15:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' + y' - 20y = (36x - 23)e^{4x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3 \, , \quad y'(0) = 0$$

mit Hilfe

a) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und

b) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 16:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u' &= -3u - 2v\,, \quad u(0) = 2 \\
v' &= 2u - 3v\,, \quad v(0) = -3
\end{aligned}
$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 17:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 9y' + 9y = 0\,.$$

a) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung ,

b) untersuche den Gleichgewichtspunkt des Systems auf Stabilität,

c) gebe die allgemeine Lösung des Systems an und

d) vergleiche diese mit der, die man erhält, wenn die Differentialgleichung mit den Methoden für eine Einzelgleichung höherer Ordnung gelöst wird.

Aufgabe 18:
Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $\dot{x} = y - 3x + 9\,, \quad \dot{y} = x - 3y - 11$
b) $\dot{x} = 4x + 5y\,, \quad \dot{y} = -5x - 4y\,.$

Aufgabe 19:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (x-1)(y^2 + 2y + 2)\,, \\
\dot{y} &= (y+1)xy\,.
\end{aligned}
$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 20:
Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_2 \,, \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_1^3 \,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2 + cy_1^4$ gesucht werden soll.

Aufgabe 21:
Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

a) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\ y(\pi) = -1,$

b) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\ y(\pi) + y'(\pi) = 0,$

c) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\ y(\pi) = \pi^2 - 3.$

Aufgabe 22:
Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 7y_2 + y_3 \,, & y_1(0) + y_1(b) &= -1 \,, \\ y_2' &= -7y_1 + y_2 - y_3 \,, & y_2(0) + y_2(b) &= 1 \,, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 7y_3 \,, & y_3(0) + y_3(b) &= 2 \,. \end{aligned}$$

a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenschreibweise und

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaugabe eindeutig lösbar?

d) Für $b = 1$ berechne man die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 23:
Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^9 4y^2 + 9(y')^2 + 12yy' + 1 \, dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y(9) = 4/9$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) bestimme die natürliche Randbedingung und

c) löse die zugehörige Randwertaufgabe.

Aufgabe 24:
Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y' - \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 0\,.$$