Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $\dfrac{y'}{x} - y^2 - 4 = 0$,

c) $\dfrac{y'}{y} = x^2 - \dfrac{x^2}{y}$.

Aufgabe 2:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 3:
Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $x^3 y' - 3xy^2 - x^2 y = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$,

b) $2xy' - y^2 - 2y + x^2 = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = 0$

c) $y' = e^{x+y} - 1 \quad \text{mit} \quad y(1) = -1$.

Aufgabe 4:
Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen und berechne die allgemeine Lösung:

a) $y' - 6y + 3x^2y^2 = -2x^{-3} - 3x^{-2}$,
Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form Cx^α.

b) $3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2) + \big(x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1\big)\, y' = 0$,
Hinweis: Es reicht die Lösung in einer impliziten Gleichung darzustellen.

c) $y' + x^3y + (5x^4 - 2x^3 - 5/4)y^5 = 0$.

Aufgabe 5:
Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$\frac{e^x}{x} + 2y^3 + \left(3xy^2 + \frac{\sin y}{x} + \frac{y\cos y}{x}\right) y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(x)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Aufgabe 6:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^2y'' - (y')^3 \;=\; 0$, b) $y'' + y \;=\; 0$, c) $2xy'' - y' - x \;=\; 0$.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y + 3x\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit
$h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 4 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[4]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 4 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[4]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 8:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' + 2y + \sqrt{y} = 0\,, \quad y(0) = \frac{1}{4}\,.$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, \ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 9:
Für das folgende lineare Differentialgleichungssystem berechne man die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{x} & -\frac{4}{x^3} \\ 2x & \frac{4}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \quad .$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung in Polynomform je Komponente.

Aufgabe 10:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 11:
Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Aufgabe 12:
Man bestimme das Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 7y_2 - 3y_3 \\ y_2' &= -4y_1 + 7y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= -3y_1 + 3y_2 + y_3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{10}{x^2}y = -2x \, .$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.
   Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$.

b) Man berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 14:
Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$y'' + y' - 2y = 2 - 4x \, .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung soll dabei

a) mit Hilfe eines speziellen Ansatzes,

b) über Variation der Konstanten und

c) durch die Methode der Greenschen Funktion

berechnet werden.

Aufgabe 15:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 9y' + 9y = 0 \, .$$

a) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung ,

b) untersuche den Gleichgewichtspunkt des Systems auf Stabilität,

c) gebe die allgemeine Lösung des Systems an und

d) vergleiche diese mit der, die man erhält, wenn die Differentialgleichung mit den Methoden für eine Einzelgleichung höherer Ordnung gelöst wird.

Aufgabe 16:
Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $\dot{x} = y - 3x + 9 \, , \quad \dot{y} = x - 3y - 11$
b) $\dot{x} = 4x + 5y \, , \quad \dot{y} = -5x - 4y \, .$

Aufgabe 17:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-1)(y^2+2y+2)\,, \\ \dot{y} &= (y+1)xy\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 18:
Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_2\,, \\ y_2' &= 2y_1+3y_1^3\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2+by_2^2+cy_1^4$ gesucht werden soll.

Aufgabe 19:
Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y''+y=0\,, \quad 0\le x\le \pi/2\,, \quad y(0)=0\,, \quad y'(\pi/2)=1 \\ \text{b)} & y''+y=0\,, \quad 0\le x\le \pi/2\,, \quad y(0)=0\,, \quad y(\pi/2)\;=2 \\ \text{c)} & y''+y=0\,, \quad 0\le x\le \pi/2\,, \quad y(0)=0\,, \quad y'(\pi/2)=0\,. \end{array}$$

Aufgabe 20:
Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1-7y_2+y_3\,, & y_1(0)+y_1(b)+3 &= 0\,, \\ y_2' &= -7y_1+y_2-y_3\,, & y_2(0)+y_2(b)-2 &= 0\,, \\ y_3' &= y_1-y_2+7y_3\,, & y_3(0)+y_3(b)+1 &= 0\,. \end{aligned}$$

a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenschreibweise und

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaugabe eindeutig lösbar?

Aufgabe 21:
Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^9 4y^2 + 9(y')^2 + 12yy' + 1\,dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y(9) = 4/9$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) bestimme die natürliche Randbedingung und

c) löse die zugehörige Randwertaufgabe.

d) Zur Berechnung verwende man alternativ die Hamilton-Funktion.

Aufgabe 22:
Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y' - \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 0\,.$$

Aufgabe 23:
Man löse die Anfangswertaufgaben

a) $y'' + y' - 12y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 24$

b) $u'''' - 4u''' + 4u'' - 4u' + 3u = 3t - 4 \quad \text{mit}$
$u(0) = 3\,, \quad u'(0) = 6\,, \quad u''(0) = 9\,, \quad u'''(0) = 27.$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 24:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcl} u'' &=& v \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \quad u(0) = 3 \;,\; u'(0) = 6 \\ v'' &=& -3u + 4u' - 4v + 4v' + 3t - 4 \;,\; v(0) = 9 \;,\; v'(0) = 27 \end{array}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.