Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2003/04**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $\dfrac{y'}{x} - y^2 - 4 = 0$,

c) $\dfrac{y'}{y} = x^2 - \dfrac{x^2}{y}$.

Aufgabe 2:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 3:

Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $x^3y' - 3xy^2 - x^2y = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$,

b) $2xy' - y^2 - 2y + x^2 = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = 0$

c) $y' = e^{x+y} - 1 \quad \text{mit} \quad y(1) = -1$.

Aufgabe 4:

Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen und berechne die allgemeine Lösung:

a) $y' - 6y + 3x^2y^2 = -2x^{-3} - 3x^{-2}$,
Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form Cx^α.

b) $3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2) + \big(x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1\big)\, y' = 0$,
Hinweis: Es reicht die Lösung in einer impliziten Gleichung darzustellen.

c) $y' + x^3y + (5x^4 - 2x^3 - 5/4)y^5 = 0$.

Aufgabe 5:

Ein Tank enthalte 2000 Liter Wasser, in dem 60 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute 15 Liter Salzlösung abfließen, aber auch 15 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 3 kg zufließen, mit anschließender sofortiger Durchmischung.

a) Wie groß ist der Salzgehalt $m(t)$ in kg im Tank zur Zeit $t > 0$?

b) Auf welchem Niveau stabilisiert sich der Salzgehalt im Tank?

Aufgabe 6:

Man bestimme die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben und zeichne sie:

a) $y'' = \dfrac{x}{y'}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = -1$,

b) $y'' = y^{-3}$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 8:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0.$$

Man zeige die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe für $0 \leq x \leq 0.5$ mit dem Satz von Picard-Lindelöf.

b) Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \cos(xy) \quad , \quad y(0) = 2 \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

gilt: $y(x) \geq 1$.

Aufgabe 9:

Für das folgende lineare Differentialgleichungssystem berechne man die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{x} & -\dfrac{4}{x^3} \\ 2x & \dfrac{4}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \quad .$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung in Polynomform je Komponente.

Aufgabe 10:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x - 2y - 4z \quad , \quad x(0) = 1, \\ \dot{y} &= -2x + 8y - 2z \quad , \quad y(0) = -3, \\ \dot{z} &= -4x - 2y + 5z \quad , \quad z(0) = 5\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Aufgabe 12:

Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 7y_2 - 3y_3 - 4 \\ y_2' &= -4y_1 + 7y_2 - 2y_3 - 1 \\ y_3' &= -3y_1 + 3y_2 + y_3 + 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13:

Für das folgende Differentialgleichungssystem mit Blockdiagonalmatrix bestimme man ein reelles Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Aufgabe 14:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= 4y_0 - 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 2e^x(4x-7)\,. \end{aligned}$$

a) Man schreibe das System um in eine Einzelgleichung höherer Ordnung,

b) bestimme ein reelles Fundamentalssystem und

c) berechne die allgemeine reelle Lösung.

Aufgabe 15:

Man bestimme mit dem Reduktionsverfahren ein Fundamentalsystem von

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{10}{x^2}y = 0\,.$$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$.

Aufgabe 16:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $\dot{x} = 4x + 5y\,,\quad \dot{y} = -5x - 4y\,,$

b) $\dot{x} = y - 3x + 9\,,\quad \dot{y} = x - 3y - 11\,.$

Aufgabe 17:

Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$y'' + y' - 2y = 2 - 4x\,.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung soll dabei

a) mit Hilfe eines speziellen Ansatzes,

b) über Variation der Konstanten und

c) durch die Methode der Greenschen Funktion

berechnet werden.

Aufgabe 18:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-1)(y^2+2y+2)\,, \\ \dot{y} &= (y+1)xy\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 19:

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_2\,, \\ y_2' &= 2y_1+3y_1^3\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2+by_2^2+cy_1^4$ gesucht werden soll.

Aufgabe 20:

Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1-7y_2+y_3\,, & y_1(0)+y_1(b)+3 &= 0\,, \\ y_2' &= -7y_1+y_2-y_3\,, & y_2(0)+y_2(b)-2 &= 0\,, \\ y_3' &= y_1-y_2+7y_3\,, & y_3(0)+y_3(b)+1 &= 0\,. \end{aligned}$$

a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenschreibweise und

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaugabe eindeutig lösbar?

Aufgabe 21:

a) Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^9 4y^2 + 9(y')^2 + 12yy' + 1\,dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y(9) = 4/9$.

(i) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

(ii) bestimme die natürliche Randbedingung und

(iii) löse die zugehörige Randwertaufgabe.

b) Man löse die Randwertaufgabe

$$y'' - 5y' - 6y + 6 = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 6 \quad \text{und} \quad y'(1) = 18e^6 - 2/e\,.$$

Aufgabe 22:

Man bestimme die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{1}{t}y'(t) &= h(t)\,, \quad 1 \le t \le 2 \\ y'(1) = 0\,, \quad y(2) &= 0 \end{aligned}$$

und löse damit die Randwertaufgabe für $h(t) := 2t$.

Hinweis:
Die homogene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y(t) = t^\alpha$.

Aufgabe 23:

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y' - \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 0\,.$$

Aufgabe 24:

Man untersuche das Mehrschrittverfahren

$$Y_{j+3} = Y_{j+2} + \frac{h}{12}\,(23f_{j+2} - 16f_{j+1} + 5f_j)$$

auf starke bzw. schwache Stabilität und bestimme die Ordnung des Verfahrens.