Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x, y) = 5x + 3y$,

c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$, d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - 4y$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4, 4] \times [-2, 2]$.

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2, 0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad} f(2, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2, 0)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-5,5] \times [-20,20]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion

$$u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 5:

a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (ye^{xy} + z\cos x, xe^{xy} + z^2, \sin x + 2yz)^T\,.$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x,-y)^T\,.$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1,1] \times [-1,1]$.

Aufgabe 6:
Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen.

c) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 8:
Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_2}{\to} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} \mapsto r\cos(s^2)\,.$$

b)

$$\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9:
Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

mit $(x,y) \in Q := [-1,1] \times [-1,1]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

b) $\mathbf{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man zeichne Q und $\mathbf{\Phi}(Q)$.

Aufgabe 10:
(Klausur SoSe 2008) Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ der folgenden Funktion

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ verwendet, nach oben ab.

Aufgabe 11:
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$,

b) $f(x,y) = y(y^2 - 3)$,

c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$,

d) $f(x,y) = |x+y|$.

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 13:
Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:
Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 15:
Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 16:
Für die Funktion $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 17:
Zur Bestimmung eines Extremums der Funktion

$$f(x,y) := (x+y)^2 + \cosh(x) + \cos(y+1)$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x,y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf.

c) Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.

d) Ausgehend vom Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ berechne man damit eine Lösung auf zehn Stellen genau.

e) Man klassifiziere den berechneten stationären Punkt und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 18:
Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]\ ,\ i,j = 1,\ldots,n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 19:
Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^0 (x+1)^2 + y\, dx\, dy,$

b) $\displaystyle\int_2^3 \int_0^1 \frac{x^2+y+1}{xy+x}\, dy\, dx,$

c) $\displaystyle\int_B \frac{y^2}{x}\, d(x,y)$ mit $B = [1,e] \times [0,1],$

d) $\displaystyle\int_C xy + e^z\, d(x,y,z)$ mit $C = [0,1] \times [0,2] \times [0,\ln 2].$

Aufgabe 20:
Man zeichne folgende Mengen und beschreibe sie durch Normalbereiche:

a) das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (0,0)$ und $P_3 = (2,2)$,

b) den durch die Höhenline $x^2 + 4y^2 = 16$ eingeschlossenen Bereich E,

c) den durch $x \leq 0,\ z \geq 1,\ z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich Z.

Aufgabe 21:
Man skizziere den durch $x = 0$ und $x + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich P und berechne $\displaystyle\int\int_P y^2 \, d(x,y)$

a) indem zuerst nach y und dann nach x integriert wird und

b) indem zuerst nach x und dann nach y integriert wird.

Aufgabe 22:
Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 23:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H:\ x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
.

Aufgabe 25:
Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq x \leq 1 \,,\ z = 1 - x^2 \right\} .$$

a) Man zeichne N,

b) parametrisiere N und

c) berechne den Flächeninhalt von N.

Aufgabe 27: (Klausur WiSe 2007/08)
Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \,,\ x \leq 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(y, -x, z^3\right)^T .$$

a) Man skizziere K.

b) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstücke S und ein nicht ebenes Flächenstück H.

   Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke S und H.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Aufgabe 28:
Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^3, 2xz, xy)^T$ einer Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad z = x^2 + y^2 \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche F.

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_F \operatorname{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, do\,.$

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial F} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{u}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.