Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. K. Rothe **WiSe 2007/08**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x, y) = 5x + 3y$, c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man zeichne den Funktionsgraphen von f.

c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad} f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y\sqrt{|x|}$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-10, 10] \times [-1, 1]$ mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezsurf'.

b) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f in $\mathbb{R}^2$ und überprüfe, ob diese dort stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x, t) = 3 \ln(x + ct) - 5 \tan(x - ct)$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, y) = e^y \cos x + a + bx + cy + dxy$$

mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 5:

a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (ye^{xy} + z \cos x, xe^{xy} + z^2, \sin x + 2yz)^T \,.$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T \,.$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 6:

a) Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ die Richtungsableitung im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

(ii) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ alle Richtungsableitungen.

(iii) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 7:

a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\boldsymbol{f}_1} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\boldsymbol{f}_2} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(u(r,s), v(r,s), w(r,s))\,. \end{array}$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$\begin{array}{ccccc} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \boldsymbol{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} & \mapsto & h(u,v) = f(u(x,y), v(x,y))\,. \end{array}$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die 'Koordinatentransformation'

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

mit $(u,v) \in D := [0.5, 2] \times [2, 4]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

b) bzgl. D: $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man skizziere $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(D)$ im (x,y)-Koordinatensystem.

d) Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. (u,v)-Koordinaten.

Aufgabe 9:

a) In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0.5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?

b) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = x - y + (x - z)^2 + (y - z)^3 \, .$$

Aufgabe 10:

Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y) = x + (y + 1) \cosh(x + y)$$

im Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[0, 1] \times [-1, 0]$ nach oben ab.

Aufgabe 11:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 16$,

b) $f(x, y) = \sin x \cosh y$,

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$,

d) $f(x, y) = |xy|$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $\quad f(x, y) = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche, die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Man klassifiziere alle stationären Punkte von f.

e) Man zeichne die Funktion mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 13:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve(n),

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 15:

Man berechne und klassifiziere die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 16:

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Ebene $x + y - 2z = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 17:

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = 0.1x^2 + \cos x + y^2$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x, y) \ := \ (\text{grad } f(x, y))^T \ = \ 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x, y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (2, 1)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $||\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k||_\infty < 10^{-4}$.

c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.

d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[0, 4.5] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 18:

Mit $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R} , \quad f(x, y) = x + y$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [(i - 1)/n, i/n] \times [(j - 1)/n, j/n] \ , \ i, j = 1, \ldots, n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 19:

Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^0 (x+1)^2 + y \, dx \, dy$ und $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^2 (x+1)^2 + y \, dy \, dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \frac{x^2+y+1}{xy+x} \, dx \, dy$ und $\displaystyle\int_2^3 \int_0^1 \frac{x^2+y+1}{xy+x} \, dy \, dx$,

c) $\displaystyle\int_A e^{x-y} \, d(x,y)$ mit $A = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$,

d) $\displaystyle\int_B \frac{y^2}{x} \, d(x,y)$ mit $B = [1, e] \times [0, 1]$,

e) $\displaystyle\int_C xy + e^z \, d(x,y,z)$ mit $C = [0,1] \times [0,2] \times [0, \ln 2]$.

Aufgabe 20:

Man beschreibe die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

a) den Halbkreis $H: \; x^2 + y^2 \leq 1, \; x \leq y$,

b) das durch $||\boldsymbol{x}||_\infty \leq 4$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ gegebene Quadrat Q,

c) die von der Höhenline $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eingeschlossene Asteroide A und

d) den durch die Flächen $x + 1 = 0, \; x - 1 = 0, \; y^2 + z^2 = 1$ berandeten Zylinder Z.

Aufgabe 21:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. Dabei ist die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben durch die mathematisch positive durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. Dabei ist die Kurve $\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$ durch Hochintegrieren und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 23:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ der von den Ebenen

$$x = 1\,, \quad y = 1\,, \quad y = -1\,, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = x$$

eingeschlossene Bereich. Man skizziere D und berechne den Schwerpunkt von D bei einer Massenverteilung $\rho(x,y,z) = x$.

Aufgabe 24:

Man berechne die Masse des folgenden elliptischen Zylinders

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 \le 17\,,\ 1 \le z \le 11 \right\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = x^2 z$.

Tipp: Man benutze den Transformationssatz unter Verwendung geeigneter Koordinaten.

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le y \le x \le 1\,,\ z = 1 - x^2 \right\} .$$

a) Man zeichne N,

b) parametrisiere N und

c) berechne den Flächeninhalt von N.

Aufgabe 27:

Gegeben seien der Bereich

$$Z = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq x\,,\ 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, -4y, z)^T\,.$$

a) Man skizziere Z.

b) Man berechne den Fluß bezüglich $\boldsymbol{f}$ durch jede der drei ebenen Teilflächen E_1, E_2 und E_3 des Randes von Z.

c) Man berechne $\displaystyle\int_Z \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x, y, z)$.

d) Man berechne den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch die nichtebene Teilfläche M des Randes von Z.

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (x^3, 2xz, xy)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad z = x^2 + y^2 \right\}.$$

a) Man zeichne die Fläche F.

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_F \operatorname{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, do$.

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial F} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{u}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.