Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2000/01**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl. 17.1.1)

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = 2x + 3y\ , \qquad \text{b)}\ \ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Aufgabe 2: (vgl. 17.1.2)

Gegeben sei die durch $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ definierte Funktion für $y \neq 0$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet
$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0).$$
Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, 1)$ läuft.

d) Man berechne den Winkel α zwischen $\mathrm{grad} f(3, 1)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, 1)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f

d) und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4: (vgl. 17.1.4)

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ mit $k > 0$ für eine Ortsvariable von der Funktion
$$u(x,t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ die Funktion
$$u(r,t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$$
die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Aufgabe 5: (vgl. 17.2.1)

Man berechne die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(t) \quad &: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T, \\
h(u,v) \quad &: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y, \\
\boldsymbol{p}(u,v) \quad &: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2 y^2 z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: **(keine Ersatzaufgabe)**

Seien $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$;

b) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$;

c) $\operatorname{div}(f \cdot F) = f \cdot \operatorname{div} F + \nabla f^T \cdot F$.

Aufgabe 7:

Berechnen Sie $\det(\Phi'(u))$ für die folgenden Abbildungen Φ:

a) (Lineare Abbildung)

$$\Phi(u) := \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

mit $u = (x, y)^T$;

b) (Rotationsparabolische Koordinaten)

$$\Phi(u) := \begin{pmatrix} xy\cos\varphi \\ xy\sin\varphi \\ \dfrac{x^2 - y^2}{2} \end{pmatrix}$$

mit $u = (x, y, \varphi)^T$;

Aufgabe 8:

Gegeben seien die Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x, y), v(x, y))^T$ für einige ebene Strömungen einer idealen Flüssigkeit:

a)	laminare Gegenströmung	:	$u = cy$	, $v = 0$
b)	isolierte Quelle	:	$u = \varepsilon \dfrac{x}{r^2}$	, $v = \varepsilon \dfrac{y}{r^2}$ mit $r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

Man skizziere die Vektorfelder und berechne die Quelldichte div $\boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte rot $\boldsymbol{u} = v_x - u_y$. Für welches $\boldsymbol{u}$ existiert ein Strömungspotential? (Dies ist eine skalare Funktion $\phi(x, y)$ mit $\nabla\phi = \boldsymbol{u}$.) Gegebenenfalls skizziere man die Äquipotentiallinien von ϕ.

Aufgabe 9:

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 10:

Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y) = x\sin(x + y)$$

im Entwicklungspunkt $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 11: (keine Ersatzaufgabe)

Ein Bewohner des Parabeltals, dessen Topografie gegeben ist durch $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$, fährt mit seinem Auto mit konstanter Geschwindigkeit v aus dem Tal heraus. Das Auto kann höchstens eine Steigung von c bewältigen.

a) Wie sieht die Fahrtroute qualitativ aus (Skizze)?

b) In welchem Winkel zum stärksten Anstieg (bezogen auf die x–y–Ebene) fährt er, wenn er die Höhe h erreicht hat?

Aufgabe 12: (vgl. 17.2.7)

Gegeben seien die Zylinderkoordinaten $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} .$$

Man leite die folgende Darstellung des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten elementar unter Verwendung der Kettenregel her:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Aufgabe 13: (vgl. 18.1.1)

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = xy + x - 2y - 2$,

b) $f(x, y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$,

Aufgabe 14:

Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^T$.

a) unter Verwendung des Taylorschen Satzes für Funktionen zweier Veränderlicher,

b) unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklung der Funktion $\sin(u)$.

Aufgaben 15: (vgl. 18.2.4)

Durch $(x^2 + y^2)^2 - y(3x^2 - y^2) = 0$ ist eine Kurve implizit gegeben. Man bestimme

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente und

c) die singulären Punkte der Kurve.

Aufgabe 16:

Es sei durch

$$f(x,y) := \sin y + \cos x - 1 = 0$$

implizit eine Kurve c in $\mathbb{R}^2$ definiert.

a) Man zeige, dass der Punkt $(0,\pi)$ auf c liegt.

b) Man erstelle einen Höhenlinienplot von f.

c) Man benutze den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass sich obige Gleichung im Punkte $(0,\pi)$ lokal nach einer der Variablen auflösen läßt.

d) Man bestimme die Tangente an die Kurve im Punkt $(0,\pi)$.

Aufgabe 17/18: (vgl. 18.3.1)

a) Man bestimme mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Regel diejenigen Punkte auf dem Kreisrand $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1, 1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben und gebe die Abstände an.

b) Man bestimme die Punkte aus a) mit Hilfe geometrischer Überlegungen.

Aufgabe 19: (vgl. 18.3.2)

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2$$

auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $z = x$.

Aufgabe 20: (vgl. 8.3.1)

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\quad f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$.

Man stelle das Newton-Verfahren auf und berechne ausgehend vom Startwert $x_0 = 4$ die ersten 5 Iterierten des Newton-Verfahrens.

b) Man zeige, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der durch

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2)$$

gegebenen Funktion für den Startwert $x_0 = 1$ nicht konvergiert und veranschauliche diesen Sachverhalt auch graphisch.

c) Für den Startwert $x_0 = 1$ gebe man die Newton-Folge für die durch

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$$

gegebenen Funktion an und begründe auch anhand einer Skizze, warum das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

Aufgabe 21:

Man berechne $\displaystyle \int\int_D xy\, d(x,y)$ mit dem Dreieck

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}\,.$$

a) indem man erst bzgl. y integriert und dann bzgl. x bzw.

b) indem man erst bzgl. x und dann bzgl. y integriert.

Aufgabe 22:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ der von den Ebenen

$$x = 1\,, \quad y = 1\,, \quad y = -1\,, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = x$$

eingeschlossene Bereich. Man skizziere D und berechne den Schwerpunkt von D bei einer Massenverteilung $\rho(x,y,z) = x$.

Aufgabe 23: (vgl. 19.1.4)

a) Man berechne die Masse des Kegels

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) \right\}$$

mit der konstanten Dichte ρ.

b) Man berechne das Trägheitsmoment des Rohres

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

mit homogener Massendichte bezüglich der z-Achse unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 24: (vgl. 19.1.5)

Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ -1 \leq x + y \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x - y \leq 2 \right\},$$

unter Verwendung der Transformation $u = x + y$ und $v = x - y$. Man überprüfe dazu alle Voraussetzungen des Transformationssatzes!

Aufgabe 25:

Man berechne das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} f(\boldsymbol{x})\, ds$ für die Kurve

$$\mathbf{c} \;:\; [0, 2\pi] \;\rightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \, ,$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y)^2$.

Aufgabe 26: (vgl. 19.2.1)

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)^T$$

und die Kurven

$$\mathbf{c}_n : \; [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \, , \quad \mathbf{c}_n(t) = (t, 1 - t^n, t^n)^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

a) Man berechne die Kurvenintegrale $\int\limits_{\mathbf{c}_n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

b) Man bestimme ein Potential für $\boldsymbol{f}$ und begründe damit, dass die Kurvenintegrale aus a) vom Parameter n unabhängig sind.

Aufgabe 27/28: (vgl. 19.3.5) Klausuraufgabe vom 4.10.1996

Gegeben seien das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, y, 1)^T$ und der Körper

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq x + y + 3 \right\} .$$

a) Man veranschauliche sich den Körper K.

b) Man gebe Parametrisierungen der 3 glatten Teilflächen F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.

c) Man berechne $\displaystyle\int\limits_K \operatorname{div} \boldsymbol{f} d(x, y, z)$ sowie den Fluss durch F_1, F_2 und F_3 und bestätige damit den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$.