Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**

Hörsaalübungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Ist der Mittelwertsatz $\quad g'(x_0) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad$ mit $\quad x_0 \in]a, b[\quad$ für $a = -1$ und $b = 1$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0.

Aufgabe 2:
Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

a) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = \cosh(x) - 1$,

b) $[a, b] = [-3, -1]$ und $f_2(x) = (x + 2)^2 - 4$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}} \; .$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = \dfrac{1}{2}$ und $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Aufgabe 4:
Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Aufgabe 5:
Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \; , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Aufgabe 6:
Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{a)}\quad f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{x^2}}\ ,\quad \text{b)}\quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\ .$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 7:
Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^3-1)(2-x^3)^k\ ,\qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\ .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 8:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\,x^n\quad ,\quad \text{(ii)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}\ .$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 9:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{6}{5-4z}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 11:

Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Aufgabe 12:

a) (i) Man berechne die Ableitung von $f(x) = \ln(2+x)$ und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

(ii) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter (i) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe für die durch $g(x) = \sqrt[3]{8+3x}$ gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 13:
Für die Stützstellen x_i und sind nur die Funktionswerte f_i bekannt

x_i	-1	1	3	5
f_i	-15	3	-3	15 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Polynoms p_3 an, das die obigen Daten interpoliert.

b) Man zeichne p_3.

c) Man gebe das Gleichungssystem an, dass p_3 in der Darstellung $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ aufgrund der obigen Interpolationsdaten erfüllen muss.

Aufgabe 14:

a) Das (lineare) Polynom $p_{1,1}$ interpoliere die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ und $p_{2,1}$ interpoliere $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Man rechne durch einsetzen nach, dass

$$p_{2,2}(x) = p_{2,1}(x) + \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x) - p_{2,1}(x))$$

die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ interpoliert.

b) Von der Funktion $g(x) = \ln x$ seien nur die Stützstellen

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt.

(i) Für das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades berechne man $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$ mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken.

(ii) Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

(iii) Man berechne $p(1.5)$ mit einem Matlab-Programm nach dem Schema von Neville-Aitken.

Aufgabe 15:

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

x_i	0	3	6
$\sinh x_i$	0	10	201.7

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

e) Man schreibe ein Matlab-Programm zur Koeffizientenberechnung eines Newtonschen Interpolationspolynoms und teste dies am obigen Beispiel.

Aufgabe 16:

a) Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
f_k	4	0	1	4 .

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt.

b) Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$.

c) Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

d) Man zeichne $s(x)$ unter Verwendung der Matlab-Routinen 'spline', 'linspace', 'ppval' und 'plot'.

Aufgabe 17:
Man berechne alle Stammfunktionen zu

a) $f_1(x) = 2x^5 - 5\sin(x)$, b) $f_2(x) = 4\cos(x) - 7\sinh(x)$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 + xe^x}{x}$, d) $f_4(x) = \dfrac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 18:
Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

a) $\displaystyle\int (3x-1)\cosh(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$,

d) $\displaystyle\int \cos(t)\sinh(t)\,dt$, e) $\displaystyle\int 15x\sqrt{x-1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$.

Aufgabe 19:
Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt$, e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$, f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$.

Aufgabe 20:

a) Man berechne den (positiven) Flächeninhalt F, der durch die Teilmenge

$$M = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \colon x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

b) Man berechne die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} e^x\sin(x)\,dx\,, \quad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx\,, \quad \text{(iii)} \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx.$$

Aufgabe 21:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{6x^3-3x^2+2x-3}{2x-1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Aufgabe 22:
Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx\,.$

Aufgabe 23:
Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx\,.$$

Aufgabe 24:
Man berechne die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \cosh^2 t\,dt\,,$ b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx,$ c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx\,,$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx\,.$

Aufgabe 25:

a) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$\text{(i)} \quad \int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx\,.$$

b) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx\,.$$

Aufgabe 26:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) = \int_1^{2x} e^{3x+y}\, dy$$

(i) durch Integration nach y und anschließendes Ableiten nach x,

(ii) durch Ableiten nach x und anschließende Integration nach y.

b) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s > 0$

$$F(s) \;=\; \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt\,.$$

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0, \pi/2] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b) mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezsurf'.

Aufgabe 28:
Man berechne die Bogenlängen der folgenden Kurven $\mathbf{c}$ mit

$$\text{a)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^{3/2} \end{pmatrix},\ t \in [0,1]\,, \qquad \text{b)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/10 \end{pmatrix},\ t \in [0, 8\pi]\,.$$

und zeichne die Kurven.