Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**

Hörsaalübungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Aufgabe 2:

a) Für die folgenden Kurven gebe man Parameterdarstellungen an und zeichne sie:

(i) die Gerade, die durch die Punkte $(1,3)$ und $(-3,-4)$ verläuft,

(ii) die durch $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$ beschriebene Ellipse.

b) Man zeichne die Epizykloide mit $t \in [0, 8\pi]$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t/4) - \cos(5t/4) \\ 5\sin(t/4) - \sin(5t/4) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, \infty[$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

a) Man zeichne die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, 3\pi]$.

b) Man berechne den Tangentenvektor zum Parameterwert t im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t)$. In welchen Kurvenpunkten ist $\mathbf{c}$ nicht regulär?

c) Man bestimme in allen regulären Kurvenpunkten, in denen der Anstieg gleich null ist, die Tangentengleichung in Parameterform und als Einzelgleichung.

d) Man berechne näherungsweise die Länge des Kurvenbogens zwischen $\mathbf{c}(\pi)$ und $\mathbf{c}(2\pi)$ unter Verwendung des Differentials der Bogenlänge zum Parameterwert $t = \pi$.

Aufgabe 4:

Mit $t, y \in \mathbb{R}$ wird durch $y - t^2 = 0$ eine Parabel beschrieben.

a) Man bestimme eine Parametrisierung $\mathbf{c}(t)$ der Parabel über den Funktionsgraphen.

b) Man berechne den Kurvenpunkt mit maximaler Krümmung,

c) den Krümmungskreis und

d) zeichne die Kurve mit dem berechneten Krümmungskreis.

Aufgabe 5:

Man berechne alle Stammfunktionen zu

a) $f_1(x) = 2x^5 - 5\sin x$, b) $f_2(x) = 4\cos x - 7\sinh x$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 + xe^x}{x}$, d) $f_4(x) = \dfrac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 6:

Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

a) $\displaystyle\int (3x-1)\cosh x \, dx$, b) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, c) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$,

d) $\displaystyle\int \cos t \sinh t \, dt$, e) $\displaystyle\int 15x\sqrt{x-1} \, dx$.

Aufgabe 7:
Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt$, e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$, f) $\displaystyle\int \tan x\,dx$.

Aufgabe 8:
Man berechne die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int x e^{5x-2}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \cosh^2 t\,dt$,

d) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \sin^3 t\cos^3 t\,dt$, f) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Aufgabe 9:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}$, c) $\displaystyle\int \frac{6x^3-3x^2+2x-3}{2x-1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Aufgabe 10:
Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 11:
Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\, dx\ .$$

Aufgabe 12:
Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\, dx$ unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme, also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x + 4\, dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 14:

a) Man berechne den Flächeninhalt F_1, der sich im Intervall $[-3, 3]$ zwischen x-Achse und der durch $y = x^2 - 4$ gegebenen Funktion befindet.

b) Man berechne den Flächeninhalt F_2, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 15:
Gegeben sei die Funktion

$$f \,:\, [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3 \,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper aus a) und b).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) \;=\; \int\limits_1^{2x} e^{3x+y}\, dy \,.$$

b) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\int\limits_1^{9} \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\, dx \,,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\, dx \,.$

c) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s > 0$.

Aufgabe 17:

a) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx$,

b) Mit Hilfe des Integral-Kriteriums für Reihen zeige man, dass für $0 < \alpha \leq 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

divergiert.

c) Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}}$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.001?

c) Wie lauten die ersten drei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n \right)^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

c) $\displaystyle\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} + \frac{27}{128} + \frac{81}{256} + \cdots$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$.

Aufgabe 20:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{(i)} \quad f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{x^2}}\,, \quad \text{(ii)} \quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\,.$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3-1)(2-x^3)^k\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\,.$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 21:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n\,, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}\,.$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $\quad f(x) = \dfrac{6}{5-4x} \quad$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 23:

a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{6}{5-4x}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Aufgabe 24:

a) Für die durch $f(x) = \frac{2}{4+x^2}$ definierte Funktion berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Konvergenradius unter Verwendung der geometrischen Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan(x/2)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, bestimme den Konvergenzradius, untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihen.

c) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ gilt.

d) Man berechnet die Taylor-Reihe der durch $f(x) = \frac{6}{5-4x}$ definierten Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion für $n \geq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}} \, .$$

Aufgabe 25:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \, .$$

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < \pi \,, \\ 1 & , \quad \pi \leq x < 3\pi \end{cases}$$

a) Man zeichne die 3π-periodische Fortsetzung der Funktion f.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 3π-periodischen Fortsetzung von f.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsumme $S_{30}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Aufgabe 28:

a) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 4y(x) + 11\cos(3x) + 2\sin(3x).$$

b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(i) $3 - 4\sin(2x) + 7\sin(5x) + 6\cos(3x)$,

(ii) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$.

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen führen hier zu Vereinfachungen.