Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine Kugel vom Radius R. Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Aufgabe 2:
Man berechne den minimalen (euklidischen) Abstand des Funktionsgraphen von $h(x) = x^3$ zum Punkt $(2, 0)$ unter Verwendung des

a) Bisektionsverfahrens,

b) Newton-Verfahrens.

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Ist der Mittelwertsatz $\quad g'(x_0) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad$ mit $\quad x_0 \in]a, b[\quad$ für $a = -1$ und $b = 1$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0.

b) Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

(i) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = \cosh(x) - 1$,

(ii) $[a, b] = [-3, -1]$ und $f_2(x) = (x + 2)^2 - 4$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}} \,.$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = \dfrac{1}{2}$ und $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Aufgabe 6:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{(i)}\quad f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{x^2}}\ , \quad \text{(ii)}\quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\ .$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^3-1)(2-x^3)^k\ , \qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\ .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 7:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\,x^n \quad , \quad \text{(ii)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}\ .$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 8:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{6}{5-4z}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 9:

a) Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Aufgabe 10:

a) (i) Man berechne die Ableitung von $f(x) = \ln(2+x)$ und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

(ii) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter (i) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe für die durch $g(x) = \sqrt[3]{8+3x}$ gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 11:
Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung
$$Z_n = \left\{ -1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1 \right\}$$
des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme, also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\int\limits_{-1}^{1} 3x + 4\,dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 12:

a) Man berechne den Flächeninhalt F_1, der durch die Teilmenge $M_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \le y \le \sqrt{x}\big\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

b) Die Gerade $y = x/2+1$ zerteilt den Kreis $x^2+y^2 = 4$ in zwei Segmente. Wieviel Prozent an Fläche verliert der Kreis durch das Abtrennen des kleineren der beiden Segmente?

Aufgabe 13:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) mit Hilfe der partiellen Integrationsregel
$$\text{(i)} \quad \int (t-1)\cos 2t\,dt\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int 9t^2 \ln t\,dt\,,$$

b) mit Hilfe der Substitutionsregel
$$\text{(i)} \quad \int \cos y \sin y\,dy\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int x^2 e^{x^3}\,dx\,.$$

Aufgabe 14:
Man berechne die folgenden Integrale:
$$\text{a)} \quad \int \frac{z^4 - z^2 - 3}{\sqrt[3]{z}}\,dz\,, \qquad \text{b)} \quad \int\limits_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx\,,$$
$$\text{c)} \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx\,, \qquad \text{d)} \quad \int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx\,.$$

Aufgabe 15:
Man berechne folgende Integrale unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 16:
Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx$, unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

Aufgabe 17:
Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x-\sin x}\,dx$.

Aufgabe 18:
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{|x-1|}}$,

c) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+3)^5}$,

d) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^4}$.

Aufgabe 19:
Gegeben sei die Funktion

$$f\ :\ [0,2]\ \longrightarrow\ \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x)=x^3\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper aus a) und b).

Bemerkung: Die Integrale sollen elementar, d.h. ohne Formelsammlung gelöst werden.

Aufgabe 20:
Man berechne die Bogenlängen der folgenden Kurven $\mathbf{c}$ mit

$$\text{a)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 6\pi]\,, \qquad \text{b)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/10 \end{pmatrix},\ t \in [0, 8\pi]\,.$$

und zeichne die Kurven.

Aufgabe 21:

a) Man berechne den Flächeninhalt der von der gewöhnlichen Hypozykloide

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 8\cos t + \cos(8t) \\ 8\sin t - \sin(8t) \end{pmatrix}$$

umschlossenen Fläche. Man zeichne die Kurve.

b) Durch

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \sin(7\varphi)}$$

ist eine siebenblättrige Kurve in Polarkoordinaten gegeben. Man zeichne die Kurve und berechne die überstrichene Fläche eines Blattes.

Aufgabe 22:
Gegeben sei ein Draht mit der Dichtefunktion $\rho(x, y) = \sin\left(\frac{(x+y)\pi}{14}\right)$.
Die Form des Drahtes werde beschrieben durch die Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Man zeichne die Form des Drahtes, berechne seine Gesamtmasse, bestimme seinen Schwerpunkt und ermittle sein Trägheitsmoment bzgl. der y-Achse.

Aufgabe 23:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der direkten 4-periodischen Fortsetzung von f.

c) Man zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 24:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x < \pi \, , \\ 1 & , \quad \pi \le x < 3\pi \end{cases}$$

a) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 3π-periodischen Fortsetzung von f.

b) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

c) Man zeichne die Partialsumme $S_{30}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Aufgabe 25:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \, .$$

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Funktion $f \, : \, [0,\pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

a) Man zeichne die gerade (2π-periodische) Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-3\pi, 5\pi]$.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser geraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_4(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Aufgabe 28:

a) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung
$y'(x) = 4y(x) + 11\cos(3x) + 2\sin(3x)$.

b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(i) $3 - 4\sin(2x) + 7\sin(5x) + 6\cos(3x)$,

(ii) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$.

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen führen hier zu Vereinfachungen.